

مبادئ التحليل الرياضي

تأليف

أ. ج. مادوكس



مبادئ التحليل الرياضي

تأليف

أ. ج. مادوكس

ترجمة

الدكتور وليد ديب

راجعه علميًا

الدكتور محمد عرفات النتشه

راجعه لغويًا

الدكتور احمد سعيدان

منشورات مجمع اللغة العربية الاردني

١٤٠٤هـ - ١٩٨٤م

Introductory Mathematical Analysis

I. J. Maddox
B.A., Ph.D., D.Sc.

Professor of Pure Mathematics
in the Queen's University of Belfast

First published 1977

Published by
Adam Hilger Ltd.
Techno House, Redcliffe Way, Bristol BS1 6NX

Printed in Great Britain by
J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol, BS3 2NT

منشورات

مجمع اللغة العربية الاردني

ضمن مشروع تعريب التعليم العلمي الجامعي

الطبعة الاولى
عمان - الاردن
١٤٠٤هـ - ١٩٨٤م

المحتويات

مقدمة المؤلف

قمت بتأليف هذا الكتاب وانا مؤمن بأن اي مساق أولي في مادة التحليل الرياضي يجب ان يحتوي على بنى رياضية بحتة وعرض للطرق الحسابية بالاضافة الى التحليل التقليدي .

والتحليل هو، بعبارة تقريبية ، دراسة لعمليات النهايات . وهذه الدراسة تبحث في تقارب المتسلسلات اللانهائية ، والاتصال ، والتفاضل والتكامل ثم يأتي بعد ذلك فضاءات الاقترانات والتحليل الدالي . ان تطبيقات التحليل في الفيزياء والهندسة هامة جداً وان تاريخ الموضوع يمتد على مدى ٢٠٠٠ عام ويحفل باسماء رياضيين عظماء مثل : ارخميدس ونيوتن ، وليبنتس، اويلر وكوشي ، آبل ، وفاير شتراس وكانتور، ديديكند وريز، وهلبرت وبناخ .

وان العديد من مساقات التحليل الابتدائي التي تدرس عادة في السنة الاولى في الجامعات لا تعطي الا مختارات من اسهل المواضيع في التحليل كما انحدرت الينا من قبل القرن العشرين على يد كوشي وفاير شتراس . وان من سوء الحظ أن هذا الاسلوب التقليدي البحت

يعـرض عادة بطـريقـة مقتضبـة تجعـل الطـلاب يظنـون ان التحليل هو تفاضل وتكامل شديد الصعـوبـة. فلكي اتفـادى هذا الـوضـع حاولت ان اعـرض ما يكفي من الحسـابات العددية السهلة بالاضـافـة الى اسس التحليـل التقليـدي من أجل توضيح النظرية العامة وجعلها أكثر حيـويـة. وان الحاسبات الميكانيكية واجهزة الحاسب الالكتروني قد سهلت العمليات الحسابية في التحليــل العــددي، ولكن هنــاك خطـر كبـير في ان يظن المبتـديء ان بامكـان الحـاسب الالكتروني حل اي مسألة.

فمن الضــروري ان نبــين، ان امكن، ان هنــاك حلا (وهنــا تكمن اهميـة التحليـل التقليـدي). ثم نحتـاج الى طريقـة ما تعطينـا متتالية من التقريبات تتقارب نحو الحل (وهنا نحتاج الى التحليل العددي).

امـا بالنسبـة للبنى الـريـاضيـة البحتـة، وهـذه ظاهرة من ظواهر القرن العشرين، فقد حاولت أن اتحـدث عن أهميتهـا في التحليـل من حيث شمـوليتهـا. لقـد حان الـوقت حتى في التحليل المبدئي لعرض الافكار الاساسية مثل الزمر، والفضاء الخطي، والمجموعات المفتوحة، والاقترانات التبولوجية.

وبعـد ان يدرس الطـالب هذه الافكـار يصبـح مستعـداً لدراسـة مواضيـع متقدمة مثل التحليل الدالي والتبولوجيا، ويكون لديه الخلفية المناسبة من المصطلحات والافكار الرياضية.

وضـع هذا الكتـاب بصـورة اسـاسية لطلبة الجامعات والمعاهد التقنية، حيث يدرّس في السنـة الاولى او الثـانيـة لطلبة يدرسون الرياضيات أو الفيزياء أو الهندسة. ولكن يمكن لطلبة المدارس الـذين درسـوا التفـاضـل والتكـامل ان يقرأوا جزءاً كبيراً منه. وقد حاولت ان اعطي براهـين مفصلة لكـل نتيجـة في هذا الكتاب، وأعطيت امثلة توضيحية عديدة وعدداً كبيراً من التمارين. كما وضعت في نهايـة الكتـاب ارشادات لحل بعض التمارين. ونأمل بان يساعد هذا الطالب الذي يدرس بدون مشرف.

ولجعل فائدة الكتاب أعم، عالجت، وبصورة مفصلة، الاقترانات الأولية ومواضيع مثل مبـدأ النقطـة الثابتة، وتقريب نيوتن لجذور المعادلات. وان نظرة الى محتويات الكتاب تبين انه ليس موسوعياً. ولا يمكن لأى كتاب في موضوع واسع مثل التحليل ان يحوي كل شيء. وما

نأمله انه عند انتهاء الطالب من هذا الكتاب ان يكون عنده اساس قوي للبحث في العديد من جوانب واحدٍ من روائع مبتكرات العقل الانساني.

(يتوجه المؤلف بالشكر الى من ساعده في اعداد الكتاب وطباعته).

أ، ج، مادوكس
جامعة كوينز في بلفاست ١٩٧٥.

مقدمة المترجم

ان الهـدف من ترجمـة هذا الكتاب هو المساهمة في نقل العلم والمعرفة الى اللغة العربية . والحـديث عن ترجمـة كتب العلوم يطـرح دائماً مشكلة الرموز. هل نستعمل رموزاً غير عربية ام لا . هناك من يقول اللغة العربية لغة واسعة ويمكن ان توفر لنا ما نحتاج من رموز. وهناك من يقول يجب الابقاء على الرموز المستخدمة دولياً لتسهل على الطالب العربي متابعة دراسته . في ترجمـة هذا الكتـاب فضلت استعـمال الـرمـوز العربية بشكل عام . ولكني ابقيت على استعمال الـرمـوز الاغـريقيـة ε، δ في تعـريف الاتصال والنهايات لا عجزا في اللغة العربية بل احتراماً لهذين التعـريفـين اللذين هما من اسس التحليـل . كما استخدمت λ ، μ ، θ ، . . . . في بعض الحالات التحليلة الاخرى للابقاء على الطابع المتعارف عليه لبعض التعاريف .

اما من ناحية المواضيع التي يغطيها الكتاب فقد استعرضها المؤلف في مقدمته وأحب ان اضيف الى قولـه ان هذا الكتـاب لا يحوي كل شيء في التحليـل ولكنـه، ككتـاب في مباديء

التحليل، يحوي اكثر من اي كتاب آخر من مستواه، واعتقد انه اختيار موفق لمجمع اللغة العربية.

د. وليد ديب
الجامعة الاردنية

الفصل الاول

المنطق، المجموعات، البنى الجبرية

١ ـ المنطق

للمنطق اهمية في موضوع التحليل لا تقل عن اهميته في مواضيع الرياضيات الأخرى. ولكن لا مجال لأن نعرض بالتفصيل جميع الافكار المنطقية التي قد نحتاج اليها في هذا الكتاب. ولكن سوف نحاول عرض بعض الافكار التي تستخدم عادة في براهين نظريات في التحليل، وتوضيحها بأمثلة مبسطة.

ولكي نتمكن من اعطاء امثلة ذات اهمية سنفترض ان القاريء ملم بمباديء المجموعات المذكورة ادناه. وهذه المجموعات تتخلل علم الرياضيات باكمله، وسوف نستعرضها بالتفصيل في فصول متقدمة.

سوف نستعمل الرموز $N, Z, Q, R, \mathbb{C}$ لتشير الى المجموعات التالية:

N = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . . } مجموعة الاعداد الطبيعية ،

Z = { ٠ ، ١ ، -١ ، ٢ ، -٢ ، . . . } مجموعة الاعداد الصحيحة ،

Q = { أ/ب | أ ∋ Z ، ب ∋ N } مجموعة الاعداد النسبية ،

R ، مجموعة الاعداد الحقيقية ،

ℂ ، مجموعة الاعداد المركبة .

بالنسبة للمجموعة Q فان الخط الرأسي بعد أ/ب يقرأ «حيث» و « ∋ » يقرأ «ينتمي إلى» أو «عنصر في» . وتسمى N ايضاً مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة . و « Zahlen » هي كلمة المانية تعني «اعداد صحيحة» ، ولهذا استخدم الحرف Z للاشارة الى مجموعة هذه الاعداد .

والاعداد النسبية تدعى ايضاً باللغة الانجليزية « Quotients » ولهذا استخدم الحرف Q للاشارة اليها . اما الحرف R فمن كلمة « Real » (حقيقي) وحرف ℂ من كلمة « Complex » (مركب) .

ومعظم الرياضيين يستعملون هذه الرموز، والذين لا يستخدمونها ربما كان عليهم ان يستخدموها ، ولكن لنكن متسامحين .

جاوس نفسه قال مرة : تعنى الرياضيات بالافكار وليس بالرموز .

ومن الافكار الرئيسية في المنطق فكرة «القضية» : نعرف القضية بانها عبارة خبرية ذات معنى يمكن ان يكون صواباً او خطأ ولكن لا يمكن ان يكون صواباً وخطأ في آن واحد .

وفيما يلي مثال لقضيتين

السماء تمطر . . . . (١)

الشوارع مبللة . . . (٢)

ومن مثل هاتين العبارتين البسيطتين نستطيع تكوين عبارات اخرى باستخدام كلمات واحرف مثل «وَ» ، «ليس» ، «أو» . . . . الخ .

مثال

السماء تمطر والشوارع مبللة .

ونستعمل غالباً الاحرف ف، ن، ر لتشير الى القضايا.

اهم العبارات التي يمكن تكوينها من العبارتين ف، ن هي:

النفي: ليس ف، ورمزها ~ ف

الوصل: ف وَن، ورمزها ف∧ن

الفصل: ف أو ن، ورمزها ف∨ن

التضمين: ف تتضمن ن، ورمزها ف ← ن

التكافؤ: ف اذا وفقط اذا ن، ورمزها ف ←→ ن

والرمز ف ←→ ن هو حسب التعريف (ف ← ن)∧(ن ← ف) ان "ف اذا وفقط اذا ن" تعني ان ف تتضمن ن وكذلك ن تتضمن ف.

وهنالك طريقتان اخريان نعبر بهما عن ف ←→ ن.

أ) ف تكافيء ن

ب) ف شرط ضروري وكافٍ لتحقيق ن

وهذه طرق اخرى شائعة لقولنا «ف تتضمن ن»:

أ) اذا كان ف فان ن

ب) ف فقط اذا ن

ج) ف شرط كافٍ لتحقيق ن

د) ن شرط ضروري لتحقيق ف

المثال ١:

لتكن ف رمزاً للعبارة (١) أعلاه، ن رمزاً للعبارة (٢)، فيكون:

~ ن، ف∧ن، ف ←→ ن تعني على الترتيب: الشوارع ليست مبللة، السماء تمطر والشوارع مبللة، السماء تمطر اذا وفقط اذا كانت الشوارع مبللة.

اننا هنا لا نتحدث عن صواب أو خطأ العبارات الواردة في مثال ١، وانما نوضح معنى الرموز فقط.

ونطمئن القـاريء ان التحليـل الـريـاضي لا يهتم كثـيراً ببلل الشوارع،والسبب الوحيد لذكـر عبـارات كتلك الـواردة في المثال ١ هو انها ابسط الامثلة التي توضح الافكار الرئيسية دون استخدام الرياضيات.

ومن تعـريفنـا للعبارة ف،يجب ان يكون بالامكان وصفها بكلمة صواب أو خطأ. لذلك سنستعمل الحرف ص والحرف خ لنشير الى قيمة الصواب في العبارة.

ونعتبر جدول الصواب التالي تعريفاً لقيم صواب العبارات المذكورة:

(٣)

ف	ن	ف∧ن	ف∨ن	~ ف	ف ← ن
ص	ص	ص	ص	خ	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	ص	ص	ص
خ	خ	خ	خ	ص	ص

المثال ٢ :

باستخدام الجدول (٣) يكون جدول الصواب للعبارة (~ ف)∨ن هو:

(٤)

ف	~ ف	ن	(~ ف)∨ن
ص	خ	ص	ص
ص	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص
خ	ص	خ	ص

لاحــظ ان جدول الصــواب لِ (~ ف)$\vee$ن هو نفس جدول الصــواب لِ ف ← ن بمعنى ان لهاتـين العبـارتـين نفس العمـودين الأخيرين. في هذه الحالة نقول ان العبارتين (~ ف)$\vee$ن ، ف ← ن متكافئتان منطقياً.

ومن الممكن ان نعلل اعطـاء قيم الصـواب المـذكـورة في (٣)، لكن تعليـل اعطـاء قيم صواب لعبارة التضمين (الشرط) غير مقنع . فمن الافضل اتخاذ جدول الصواب بمثابة تعريف لها، مقبول في كل مكان.

ومن المهم ان نذكـر ان العبـارة التي قيم صوابهـا دائـماً ص تدعى تحصيـل حاصـل. اما العبارة التي قيم صوابها خ دائماً فانها تدعى تناقضاً.

المثال ٣:

باستخدام (٣) فان جدول صواب ف $\vee$(~ ف) هو

ف	~ ف	ف $\vee$(~ ف)
ص	خ	ص
خ	ص	ص

لذلك فان ف$\vee$(~ ف) هي تحصيل حاصل.

وبالمثل نرى ان ف $\wedge$(~ ف) هي تناقض.

اليك مثالاً اقل وضوحاً من هذا، وان يكن سهلاً: انه كتابة جدول الصواب لاثبات ان

(٥). . . . [(ف ← ن)$\wedge$(ن ← ر)] ← (ف ← ر)

هي أيضاً تحصيل حاصل. وتدعى العبارة (٥) قانون القياس المنطقي ونستخدمه دائماً في الرياضيات، وهو اذا عبرنا عنه بالكلمات يبدو من الوضوح بحيث ان معظم الناس يستخدمونه وهم لا يعلمون.

طرق البرهان

هناك ثلاث طرق رئيسية للبرهان نجدها في التحليل

$ب_1$: البرهان المباشر

$ب_2$: برهان المعاكس الايجابي

$ب_3$: البرهان بالتناقض.

المقصود بـ $ب_1$ انه اذا اردنا اثبات ف ← ن نبدأ بالعبارة ف ثم نتوصل الى استنتاجات معتمدين على معرفتنا بالوضع حتى نتوصل الى ن.

المثال ٤ :

لنبرهن باستخدام البرهان المباشر على انه اذا كان ن عدداً طبيعياً زوجياً فان $ن^2$ هو عدد زوجي

ن عدد زوجي ← ن = ٢أ حيث أ عدد طبيعي

← $ن^2 = ٤أ^2 = ٢\ (٢أ^2)$

← $ن^2$ عدد زوجي.

لا شيء ابسط من هذا، وبشكل عام يكون البرهان المباشر هو البرهان الطبيعي.

ولكن لسوء الحظ فان معظم النظريات الهامة في التحليل لا يمكن اثباتها بطريقة مباشرة. وعلينا استخدام الطرق غير المباشرة $ب_2$، $ب_3$.

نذكر الآن التعاريف التالية:

برهان المعاكس الايجابي:

هو برهان بدل ان نثبت فيه ان ف ← ن (وهو ما نريد اثباته) فاننا نثبت ان ~ ن ← ~ ف. تدعى العبارة ~ ن ← ~ ف المعاكس الايجابي للعبارة ف ← ن.

البرهان بالتناقض

في هذا البرهان، بدل ان نثبت ان ف ← ن (وهو ما نريد اثباته) فاننا نثبت أن ف ∧(~ ن) ← اي عبارة خاطئة ر.

لا بد ان هذين البرهانين يبدوان غريبين بالنسبة للمبتديء ولكن معظم كتب التحليل تستخدمهما كثيراً، وعادة دون ذكر ذلك. وتبين النظرية التالية صحة استعمال ب١، ب٢ حيث تثبت ان كلاً منهما مكافيء منطقياً للبرهان المباشر ف ← ن.

النظرية ١ :

أ) ~ ن ← ~ ف تكافيء منطقياً ف ← ن

ب) لنفرض ان ر هي اي عبارة خاطئة فان

ف ∧(~ ن) ← ر تكافيء منطقياً ف ← ن

البرهان: علينا ان نبين ان جدولي الصواب للعبارتين ~ ن ← ~ ف وف∧(~ ن) ← ر هما نفس جدول الصواب للعبارة ف ← ن

باستخدام التعريف ٣ نجد ان

ف	ن	~ ن	~ ف	~ ن ← ~ ف	ف∧(~ ن)	ر	ف∧(~ ن) ← ر
ص	ص	خ	خ	ص	خ	خ	ص
ص	خ	ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	ص	ص	خ	خ	ص
خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ	ص

فالعمودان الخامس والثامن من هذا الجدول هما نفس العمود الاخير في جدول ٣. وهذا يثبت النظرية.

المثال ٥:

سنستخدم المعاكس الايجابي لاثبات انه اذا كان م عدداً طبيعياً فان م^{٢} زوجي تتضمن م زوجي (ولنقل ف ← ن).

لاحظ اننا اثبتنا ان ن ← ف في المثال ٤أ. وبالطبع ان العبارة ن ← ف تختلف عن العبارة ف ← ن. وليحذر الطالب كل الحذر ان يظن انه اذا كانت ن ← ف فان ف ← ن. الآن (~ ن) تعني ان م ليست عدداً زوجياً اي انها عدد فردي. إذن م = ٢أ - ١، حيث أ عدد طبيعي، ومنه نستنتج ان م^{٢} = ٢أ (٢أ - ٢) +١ ،اذن م^{٢} عدد فردي، ومنه م^{٢} عدد غير زوجي (وهي ~ ف). لقد اثبتنا ان ~ ن ← ~ ف. وباستخدام النظرية ١ - (أ) نجد ان ف ← ن.

المثال ٦:

في النظرية ٧ الهامة والواردة في الفصل السادس نستخدم البرهان بالتناقض. في تلك النظرية علينا ان نثبت ان الاتصال على مجموعة معينة (لنقل ف) تتضمن الحصر (لنقل ن). لا حاجة لك هنابمعرفةمعنى هذه الكلمات فما يهمنا هو فقط تركيب البرهان.

في الحقيقة فاننا نثبت في النظرية ٧ أن

ف∧ (~ ن) ← ر، حيث ر هي العبارة الخاطئة ١ ⩽ ٠

وفكرة البرهان هي كما يلي: اذا كانت هناك خاصية الاتصال دون الحصر امكننا ان نستنتج ان ١ ⩽ ٠ . وهذا التناقض يثبت ان الاتصال يتضمن الحصر.

السور الكلي والسور الجزئي

هذان اسمان في المنطق يبدوان مخيفين الا انهما شيئان بسيطان ومفيدان. فالرمز ∀ يقرأ «لكل» ويسمى السور الكلي والرمز ∃ يقرأ «يوجد» ويسمى السور الجزئي.

ولن نستخدم هذين الرمزين في غير هذا البند لاننا نفضل استخدام الكلمات التي تؤدي معناهما. ولكن قد يواجه الطالب هذه الرموز عند دراسته المنطق والرياضيات.

المثال ٧:

يمكننا ان نؤكد ان العبارات التالية صائبة:

أ) $\forall$ س $\in R$ ، س$^{٢} \geqslant$ ٠.

ب) $\exists$ ص $\in R$ | ص^{٤} = ١٦.

في أ) نعبر عن نظرية عامة لجميع الاعداد الحقيقية، وفي ب) نلاحظ ان ص = ٢ تحقق الشرط، وكذلك ص = -٢. وعندما نقول «يوجد» نعني بالضبط انه «يوجد على الاقل واحد»

جـ) $\forall$ س $\in R$ ، س^{٢} > ٠ خاطئة لان س = ٠ لا تحقق س^{٢} > ٠

انه لأمر هام جداً ان يدرك الطالب الفرق بين السورين «لكل» و«يوجد» وان لا يستبدل احدهما بالآخر في البراهين أو التعاريف.

وقد يلزم نفي عبارة تحتوي على $\forall$ و $\exists$. والقاعدة العامة انه عند نفي عبارة تحتوي على $\forall$ و $\exists$ فاننا نستبدل $\forall$ ب $\exists$ و $\exists$ ب $\forall$، ثم نقوم بنفي اي عبارة تتبع السورين.

مثالا على ذلك، نفي $\exists$ أ ، $\exists$ ب، $\forall$ جـ بحيث ان ف (أ، ب، جـ) هو $\forall$ أ، $\forall$ ب، $\exists$ جـ بحيث ان $\sim$ ف (أ، ب، جـ).

المثال ٨:

فيما يلي تعريف لقولنا ان المتتالية (س$_{ن}$) تقترب من الصفر. (انظر الفصل ٢).

(٦) ..... $\forall$ ϵ > ٠، $\exists$ ن. تحقق |س$_{ن}$| > ϵ ، $\forall$ ن > ن.

في هذا التعريف نستعمل الحرف الاغريقي ϵ (ابسلون) ليشير الى عدد موجب. ويجب ان لا يخلط بينه وبين $\in$ الذي يعني «ينتمي الى».

نفي (٦): اي ان (س$_{ن}$) لا تقترب من الصفر هو:

(٧) .... E ϵ > ٠ ، $\forall$ نٍ، E ن > نٍ تحقق $|$ س $_{ن}|$ $\leqslant$ ϵ .

وبالكلمات فان (٧) تقول: يوجد عدد موجب ϵ حيث انه لكل نٍ يوجد ن > نٍ يحقق $|$ س $_{ن}|$ $\leqslant$ ϵ .

تمارين ١ - ١

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض هذه التمارين)

١ - اكتب جدول الصواب لِ ف $\longleftrightarrow$ ن

٢ - اذكر اي العبارات التالية تحصيل حاصل او تناقض أو غير ذلك:

أ) ف $\leftarrow$ (ف $\vee$ ن)

ب) ف $\leftarrow$ $\sim$ ف

جـ) [ف $\wedge$ (ف $\leftarrow$ ن)] $\leftarrow$ ن

د) ($\sim$ ف $\leftarrow$ ف) $\wedge$ (ف $\leftarrow$ $\sim$ ف)

٣ - استخدم جدول الصواب لاثبات ان قانون القياس المنطقي هو تحصيل حاصل.

٤ - استخدم جداول الصواب لاثبات التكافؤ المنطقي ت لكل من

أ) $\sim$ (ف $\wedge$ ن) ت ($\sim$ ف) $\vee$ ($\sim$ ن)

ب) $\sim$ (ف $\vee$ ن) ت ($\sim$ ف) $\wedge$ ($\sim$ ن)

جـ) $\sim$ (ف $\longleftrightarrow$ ن) ت ف $\longleftrightarrow$ ($\sim$ ن)

د) ف $\wedge$ (ن $\vee$ ر) ت (ف $\wedge$ ن) $\vee$ (ف $\wedge$ ر)

٥ - اذا تفادى فريق أ الاصابات الجسدية سيفوز بالبطولة . تفادى الفريق الاصابات او الحكم متحيز. إذا كان الحكم متحيزاً يثور الجمهور لكن الجمهور هاديء.

اذا علمت ان كل هذه العبارات صائبة ، فهل سيفوز فريق أ بالبطولة؟

٦ - لنفرض ان س $\ni$ R ولنفرض ان ف ترمز الى س = ١ ون الى س^{٢}=١ ، بين صواب

أو خطأ ما يلي :

أ) ف ← ن

ب) ن ← ف

٧ ـ اكتب كلًا من العبارات التالية على شكل ف ← ن أو ف ⟷ ن. في كل حالة بين صواب العبارة أو خطأها:

أ) يكون ٣س^{٢}+ ٤ = ٧ اذا كانت س = ١ حيث س ∈ R

ب) س = ١ شرط ضروري وكافٍ لتحقيق ٣ س^{٢} + ٤ = ٧ حيث س ∈ R.

جـ) كل عدد صحيح اكبر من ٢ يكون عدداً أولياً فقط اذا كان فردياً.

د) اذا كان العدد الصحيح من مضاعفات ٤، فذلك شرط كاف لان يكون هذا العدد زوجياً.

هـ) ع ∈ ℂ وع = ١ اذا وفقط اذا كان ع ∈ $\bar{ℂ}$ وع^{٣} = ١

٨ ـ لكل ن ∈ N اثبت ان ن^{٣} زوجي تتضمن ن زوجي.

٩ ـ انفِ ما يلي: اذا كان المحاضر كسولاً فان بعض الطلبة لن ينهوا واجباتهم المدرسية.

٢ ـ المجموعات والاقترانات

ترد نظرية المجموعات وفكرة الاقترانات (وتدعى ايضاً الدوال) في معظم كتب الرياضيات المدرسية في وقتنا الحاضر. لذلك سنقدم عرضاً موجزاً لهما (ولكنه كافٍ لغايات التحليل) يفسر الرموز ويقدم التعاريف وبعض النتائج المفيدة

المجموعة هي اي جمع من الاشياء المحددة والمميزة بحيث ينظر اليها كوحدة. هذا ما قاله الرياضي الالماني الشهير ج كانتور (١٨٤٥ ـ ١٩١٨) مبتكر نظرية المجموعات. وسنأخذ بتعريفه هذا مع ان علماء المنطق الرياضي يعتبرون هذا التعريف غير دقيق.

والاشياء المذكورة في التعريف تسمى عناصر أو أعضاء المجموعة وسنرمز للمجموعات بحروف مذنبة مثل سہ، صہ، الخ.

اذا كانت سہ مجموعة فان أ ∈ سہ تعني ان أ عنصر في سہ. اذا كانت ب ليست عنصراً في س فاننا نكتب ب ∉ سہ ونقول ان ب لا تنتمي الى سہ.

المثال ٩:

اذا كانت سہ مجموعة عناصرها هي الأحرف أ، ب، جـ نكتب سہ = { أ، ب، جـ} .
ومن المتعارف عليه استخدام هذا النوع من الاقواس لتضمَّ عناصر المجموعة. وهذه امثلة على الرموز التي نستعملها: ب ∈ سہ، د ∉ سہ وكذلك ٢ ∉ سہ.

المثال ١٠:

يمكن ان تحتوي المجموعة على عناصر متباعدة مثل سہ = { أ، ب، ٣، كتابي} .
ولكن مجموعات كهذه لا تظهر في التحليل.

المثال ١١:

من الخطأ ان نقول ان { ٣، ١، ٦، ١، ٥} هي مجموعة لأن تعريف كانتور ينص على ان العناصر يجب ان تكون مميزة. لذلك فان اي عنصر في المجموعة يظهر مرة واحدة فقط.

المثال ١٢:

تبقى المجموعة كما هي اذا كتبت عناصرها بترتيب مختلف، مثال على ذلك { ٢، ٤، ٣، ١ } هي نفس المجموعة { ١، ٢، ٣، ٤ } . ومن الافضل بالطبع ترتيب العناصر بطريقة طبيعية ومنتظمة.

وقد يستحيل على الطالب كتابة جميع عناصر المجموعة، فمثلاً لا يمكن كتابة جميع عناصر مجموعة الاعداد الطبيعية N وهي من أبسط المجموعات في الرياضيات. ففي هذه الحالة نكتب

N = { ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . } حيث استخدمت الاقواس لتحتوي على العناصر واستخدمت النقاط الثلاث . . . لتعني ان قانون تكوين باقي العناصر معروف.وسنتحدث اكثر عن N في الفصل الثاني .

وتقرأ الصيغة { س ∋ N | س > ٢ } : «مجموعة جميع العناصر س التي تنتمي الى N بحيث ان س > ٢» ويقرأ الخط الرأسي بعد N «حيث ان». وهناك طريقة اخرى لكتابة {س∋ N | س> ٢} هي { ٣، ٤، ٥، . . . } .

مثال آخر { س ∋ R | س^{٢}= ١} ={ ١، -١ }

سنعرّف الآن الفكرة الاساسية للمجموعة الجزئية، والاتحاد والتقاطع، ومتممة المجموعة، مع بعض الافكار المتعلقة بها .

المجموعات الجزئية

اذا كانت سہ ، صہ مجموعتين فاننا نعرف سہ بانها مجموعة جزئية من صہ اذا وفقط إذا كان كل عنصر في سہ هو ايضاً عنصر في صہ. واذا كانت سہ مجموعة جزئية من صہ فاننا نكتب سہ ⊂ صہ. كذلك اذا كانت سہ ⊂ صہ فاننا نقول سہ محتواة في صہ أو أن صہ تحتوي على سہ.

المجموعات المتساوية

تعرف سہ = صہ اذا وفقط اذا كانت سہ ⊂ صہ وكذلك صہ ⊂ سہ، وهذا يعني ان سہ و صہ لهما نفس العناصر.

المجموعات الجزئية فعلاً :

نقول ان سہ مجموعة جزئية فعلاً من صہ اذا وفقط اذا كانت سہ⊂ صہ ولكن سہ ≠ صہ ونكتب سہ ⊂ صہ فعلاً .

المجموعة الخالية

اذا كانت سه مجموعة فان $\emptyset = \{ أ \in سه | أ \neq أ \}$ هي مجموعة جزئية من سه، وندعو $\emptyset$ المجموعة الخالية. المجموعة $\emptyset$ لا تحتوي على عناصر.

وهنـاك خاصيـة هامة جداً للمجموعة الخالية $\emptyset$ وهي انها المجموعة الوحيدة المحتواة في كل مجموعة اخرى.

لاثبـات ذلـك لنأخذ اي مجموعة سه ولنفرض ان $\emptyset$ ليست مجموعة جزئية من سه. اذن يوجد عنصر س $\in \emptyset$ / سه وهذا يناقض حقيقة ان $\emptyset$ لا تحتوي على عناصر. ومنه نستنتج ان $\emptyset \subset$ سه لأي مجموعة سه . س $\in \emptyset$ / سه تعني ان س $\in \emptyset$ ولكن س $\notin$ سه.

لنثبت ان $\emptyset$ وحيدة. لنفرض ان Ψ مجموعة اخرى محتواة في كل مجموعة اخرى. اذن $\Psi \subset \emptyset$. ولكننا نعرف ان $\emptyset \subset \Psi$. لهذا من تعريف المجموعات المتساوية نستنتج ان $\Psi = \emptyset$ اي ان $\emptyset$ وحيدة بالخاصية المذكورة.

المثال ١٣ :

المجمــوعــة { ١، ٣، ٨} ومجموعـة الاعـداد الفـرديـة { ١، ٣، ٥، ٧، . . . } هما مجموعتان جزئيتان من N .

لذلك نستطيع كتابة { ١، ٣، ٨ } $\subset$ N فعلاً.

اتحاد المجموعات

اتحاد المجموعتين سه، صه هو

سه $\cup$ صه = { أ | أ تنتمي الى سه أو الى صه }

وإذا كانت ى عائلة من المجموعات سه فاننا نعرّف

$\cup$ { سه | سه $\in$ ى } = { أ | أ تنتمي لعنصر واحد على الاقل من عناصر ى } .

تقاطع المجموعات:

تقاطع مجموعتين س، ص هو

$$س \cap ص = \{أ \mid أ \in س، أ \in ص\}$$

واذا كانت ى عائلة من المجموعات فاننا نعرف

$$\cap \{س \mid س \in ى\} = \{أ \mid أ \in س \text{ لكل } س \in ى\}$$

المجموعات المنفصلة:

نقول ان المجموعتين س، ص منفصلتان اذا وفقط اذا كان $س \cap ص = \varnothing$ ، اي انه لا يوجد بين س و ص عناصر مشتركة.

مثال ١٤ :

$$\{أ، ب، جـ\} \cup \{أ، جـ، د\} = \{أ، ب، جـ، د\}$$

$$\{ب، جـ\} \cap \{أ، ب، جـ\} = \{ب، جـ\}$$

$$\{أ، ب\} \cap \{جـ، د\} = \varnothing$$

المتممات:

لنفرض ان س مجموعة وان ص، ع $\subset$ س فاننا نعرف

$$ص/ع = \{أ \in س \mid أ \in ص، أ \notin ع\}$$

ونسمي ص/ع متممة ع بالنسبة الى ص.

ص^{م} تعني س/ص ونسمي ص^{م} متممة ص.

المثال ١٥ :

لنفرض ان س = N ، ص = {٢، ٤، ٦، ٨، . . .} ،

ع = { ١^٢، ٢^٢، ٣^٢، ٤^٢، . . . . } فان

صه/ع = { ٢، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٨، . . . }

وصه^م = { ١، ٣، ٥، ٧، . . . }

النظرية ٢ (قوانين ديمورغان)

لنفرض ان سه مجموعة وان { صه ر } عائلة من المجموعات الجزئية من سه، حيث ر تنتمي الى مجموعة عدّ، ى، فاننا بكتابة ∩ صه ر لتعني ∩ { صه ر | ر ∈ ى } . . . الخ نحصل على ما يلي:

$(\cup$ صه ر$)^م$ = ∩ صه ر^م وكذلك

$(\cap$ صه ر$)^م$ = ∪ صه ر^م

البرهان: سنبرهن النتيجة الاولى فقط.

اذا كانت س ∈ $(\cup$ صه ر$)^م$ فان س ∉ ∪ صه ر.

وهذا يعني ان س لا ينتمي الى اي من صه ر. اذن س ∈ صه ر^م لكل ر ∈ ى، وهذا يعني ان س ∈ ∩ صه ر^م. وهكذا نكون قد اثبتنا ان $(\cup$ صه ر$)^م$ ⊂ (∩ صه ر^م)

ومن الواضح انه يمكن الرجوع في البرهان عكسياً لاثبات ان

(∩ صه ر^م) ⊂ $(\cup$ صه ر$)^م$. وهذا يثبت النتيجة الاولى.

النظرية ٣:

لتكن سه اي مجموعة و{ سه ر } عائلة من المجموعات حيث تنتمي ر الى مجموعة العدّ ى

بكتابة ∩ سه ر لتعني ∩{ سه ر | ر ∈ ى } . . . الخ نحصل على

(أ) $\bigcap س_ر \subset س_ر \subset \bigcup س_ر$. لكل $ر \in ى$

(ب) $س \cap (\bigcup س_ر) = \bigcup (س \cap س_ر)$

(ج) $س \cup (\bigcap س_ر) = \bigcap (س \cup س_ر)$

نسمي (ب)، (ج) خاصيتي التوزيع.

البرهان:

سنثبت (أ) و (ب)، ونترك (ج) كتمرين.

لنفرض ان $أ \in \bigcap س_ر$ ، فمن تعريف التقاطع نستنتج أن $أ \in س_ر$ لكل $ر \in ى$. لذلك فان $\bigcap س_ر \subset س_ر$ ، وبطريقة مشابهة من تعريف الاتحاد نحصل على $س_ر \subset \bigcup س_ر$ لكل $ر \in ى$.

لاثبات (ب) نستخدم تعريف المجموعات المتساوية، فلنفرض ان $أ \in س \cap (\bigcup س_ر)$ اذن $أ \in س$ ، $أ \in \bigcup س_ر$. لذلك $أ \in س$ و $أ \in س_و$ لعنصر ما $و \in ى$، لهذا فان $أ \in س \cap س_و \subset \bigcup (س \cap س_ر)$ حسب القسم (أ).

من هذا نستنتج ان $س \subset (\bigcup س_ر) \subset \bigcup (س \cap س_ر)$.

لاثبات العكس لنفرض ان $أ \in \bigcup (س \cap س_ر)$ اذن $أ \in س \cap س_و$ لعنصر ما $و \in ى$ ومنه ينتج ان $أ \in س$ و $أ \in س_و$. اذن $أ \in س$ و $أ \in \bigcup س_ر$ حسب القسم (أ). من هذا ينتج ان $أ \in س \cap (\bigcup س_ر)$.

كما اشرنا في المثال ١٢ : لا تتغير المجموعة بتغيير ترتيب عناصرها. فمثلا { ١ ، ٢ } = {٢ ، ١}، وهناك حالات عديدة (في الرياضيات وغيرها) حيث يكون من الضروري تحديد ترتيب عناصر المجموعة.

مثال: لنفرض ان شخصاً بدأ من نقطة أ في المستوى، ثم سار خطوتين الى الشرق ثم ثلاث خطوات الى الشمال فوصل الى نقطة ب.

يمكن ان نعبر عن كيفية الوصول الى ب بالمجموعة { ٢ ، ٣} . فاذا بدأ الشخص من أ وسار ثلاث خطوات الى الشرق ثم خطوتين الى الشمال نعبر عن النتيجة بـ { ٣ ، ٢ } ، ومن

الواضح انه لم يصل الى ب هذه المرة. لذلك فان تساوي المجموعتين {٢، ٣} و {٣، ٢} لا يفسر الوضع بدرجة مرضية.

من الطبيعي ان تطرح فكرة الازواج المرتبة (س، ص) حيث يكون ترتيب س، ص هاماً. هنا نستخدم اقواساً دائرية بدل المتعرجة للدلالة على الترتيب.

وفي المثال السابق يمكن للرقم الأول ان يدل على عدد الخطوات باتجاه الشرق، والرقم الثاني على عدد الخطوات باتجاه الشمال. لذلك فان (٢، ٣) تختلف عن (٣، ٢).

سنذكر الآن التعريف الدقيق للازواج المرتبة ولِ ن من الاشياء المرتبة.

الأزواج المرتبة ـ النونيات المرتبة

لنفرض ان س، ص شيئان. تعرف (س، ص) كما يلي: (س، ص) = {{س}، {س، ص}}.

وتسمى هذه المجموعة الزوج المرتب (س، ص).

من التعريف يمكننا ان نثبت ان

(س، ص) = (أ، ب) اذا وفقط اذا كان أ = س، ب = ص. وبعبارة أعم يمكن تعريف النوني المرتب (س $_{١}$، س $_{٢}$، . . . . .، س $_{ن}$) بأن الخاصية (س $_{١}$، س $_{٢}$، . . . .، س $_{ن}$) = (ص $_{١}$، ص $_{٢}$، . . . .، ص $_{ن}$) تصح اذا وفقط اذا كانت س $_{١}$ = ص $_{١}$، س $_{٢}$ = ص $_{٢}$، . . . .، س $_{ن}$ = ص $_{ن}$.

المثال ١٦:

العبارة (س، س) = {{س}، {س، س}} تعني {{س}} لاننا لا نسمح بالتكرار في المجموعة. لاحظ ان (س، ص) = (ص، س) اذا وفقط اذا كان س = ص.

المجموعات التي عناصرها ازواج مرتبة تسمى علاقات، وبعض العلاقات

الخاصة (كالضرب الديكارتي، وعلاقة التكافؤ، والاقتران) هامة جداً في الرياضيات. واليك تعاريفها الدقيقة:

العلاقة:

تعرف العلاقة بانها مجموعة ازواج مرتبة.

فاذا كانت ع علاقة وكان (س، ص) ∈ ع نكتب ذلك ايضاً س ع ص.

الضرب الديكارتي:

لنفرض ان سٍ و صٍ مجموعتان، فيكون:

سٍ × صٍ = {(س، ص)| س ∈ سٍ، ص ∈ صٍ}

ويسمى الضرب الديكارتي ل سٍ، صٍ.

نكتب سٍ × سٍ غالباً على صورة سٍ^{٢}، وسٍ^{ن} تعني{(س$_{١}$، س$_{٢}$، ...، س$_{ن}$)}

س$_{١}$، س$_{٢}$، ...، س$_{ن}$ ∈ سٍ}.

وكلمة ديكارتي هي نسبة الى الرياضي الفرنسي رينيه ديكارت.

علاقة التكافؤ:

لنفرض ان سٍ مجموعة وان ~ مجموعة جزئية من سٍ^{٢}. لهذا فان ~ علاقة. ومن غير المحتمل الخلط بين ~ وبين اشارة النفي.

تعرف ~ على انها علاقة تكافؤ اذا وفقط اذا كان:

(أ) س ~ س لكل س ∈ سٍ [خاصية الانعكاس]

(ب) س ~ ص تتضمن ص ~ س [خاصية التماثل]

(ج) س ~ ص و ص ~ ل تتضمن س ~ ل [خاصية التعدي].

الاقتران:

لنفرض ان سه، صه مجموعتان. فالاقتران ق من سه الى صه يعرف على انه مجموعة جزئية من سه × صه تحقق

(أ) لكل س ∋ سه يوجد زوج مرتب (س، ص) ∋ ق

(ب) اذا كان (س، ص) ∋ ق ، (س، ل) ∋ ق فان ص = ل.

سنستخدم ق: سه ← صه لتدل على ان ق هو اقتران من سه إلى صه.

وبعبارة تقريبية اذا كان ق: سه ← صه يمكننا ان نقول انه لكل عنصر س ∋ سه يوجد عنصر وحيد ص ∋ صه يرتبط به،وليس من الضروري ان يشمل هذا جميع عناصر صه. واذا كان ق: سه ← صه وكان (س، ص) ∋ ق فاننا نكتب ق (س) = ص، وهذه هي الطريقة التقليدية لكتابة ص كاقتران في س. نسمي ص قيمة ق عند س أو صورة س تحت تأثير ق.

واذا كان ق: سه ← صه فاننا نسمي س مجال ق ونسمي صه المجال المقابل لِ ق.

وهناك اسماء اخرى تستعمل لتدل على الاقتران: مثل دالة،وتابع،ومؤثر، وتحويل، وتطبيق.

الاقترانات المتساوية

لنفرض ان ق: سه ← صه ، م: سه ← صه

فاننا نعتبر ق = م اذا وفقط اذا كان ق (س) = م (س) لجميع قيم س ∋ سه.

واذا كان ق: سه ← صه فاننا نعرف ق (سه) = {ق (س)| س ∋ سه} ونسمي ق (سه) صورة سه تحت تأثير الاقتران ق، أومدى الاقتران ق. ومن الواضح ان ق (سه) ⊂ صه (وبصورة عامة يكون الاحتواء فعلياً).

واذا كان ق (سه) = صه فان الاقتران ق يدعى اقتراناً شاملاً.

واذا كان ق: سه ← صه وكانت ج ⊂ سه فان الاقتران هـ: ج ← صه والمعرف بـ هـ(س) = ق (س) لجميع س ∋ ج يدعى تحديد ق على ج.

المثال ١٧ :

لنفرض ان س = { ١، ٢، ٣} ، ص = { أ، ب } فان

س × ص = { (١، أ) ، (٢، أ) ، (٣، أ) ، (١، ب) ، (٢، ب) ، (٣، ب) }

ص × ص = { (أ، أ) ، (أ، ب) ، (ب، ب) ، (ب، أ) }

المثال ١٨ :

المساواة هي علاقة تكافؤ على اي مجموعة س : لأن س = س لكل س ∋ س ، تستلزم ان س = ص تعني ان ص = س، وكذلك س = ص، ص = ع تعني ان س ع .

المثال ١٩ :

لنعرف ~ على مجموعة الاعداد الصحيحة Z كما يلي:

س ~ ص اذا وفقط اذا كان س − ص يقبل القسمة على ٣ .

من المتعارف عليه ان نكتب س ≡ ص (مض ٣) وان س تطابق ص في مضاعفات ٣ .

نقول ~ علاقة تكافؤ على Z لأن

أ) س − س = صفراً تقبل القسمة على ٣،

ب) س − ص = ٣م تعطي ص − س = ٣(− م)،

جـ) س − ص = ٣م و ص − ع = ٣ ل تعطي س − ع = ٣(م + ل)

واليك نقطة هامة : لنأخذ ك. = { ص ∋ Z | ص ~ ٠}

من الواضح ان ك. = { ٠ ، ٣، −٣، ٦، −٦، . . . } ، وبصورة عامة اذا كانت ك س = { ص ∋ Z | ص ~ س} نجد ان

ك ١ = { ١، ٤، −٢، . . . . } ، ك ٢ = {٢، ٥، −١، . . . . } ، ك ٣ = ك . ، ك ٤ = ك ١ ، . . .

من الـواضـح ان كل عدد صحيـح ينتمي لمجموعة واحدة فقط من المجموعات ك . ، ك ١ ، ك ٢ . تدعى هذه المجموعات صفوف تكافؤ .

المثال ٢٠ :

لنفرض ان سه = { ١، ٢، ٣ } ، صه = { ١، ٢ } فان :

ق = { (١، ٢) ، (٢، ٢) ، (٣، ١) } هو اقتران من سه الى صه اي ان ق: سه ← صه.

ولكن هـ = { (١، ٢) ، (٣، ١) } ، م = { (١، ٣) ، (١، ٢) } ليسا اقترانين من سه الى صه.

بالنسبة ل هـ فالجزء الاول (أ) من تعريف الاقتران لم يتحقق، وبالنسبة لـ م فان الجزء الثاني (ب) لم يتحقق.

المثال ٢١ :

لنعرف ق (س) = س ^{٢} لكل س $\in R$

اذن ق $R \leftarrow R$ وكذلك ق: R ← { س $\in R$ | س $\geqslant$ ٠ } .

وبعض أنواع الاقترانات لها أسماء خاصة :

الاقتران التبايني (واحد لواحد) :

يدعى الاقتران ق: سه ← صه تباينياً أو واحداً لواحد اذا وفقط اذا كانت ق(س $_{١}$) = ق(س $_{٢}$) تتضمن س $_{١}$ = س $_{٢}$

الاقتران الشامل :

يسمى الاقتران ق: سه ← صه اقتراناً شاملاً اذا وفقط اذا كان لكل ص $\in$ صه يوجد س $\in$ سه بحيث ان ق (س) = ص. لذلك اذا عرفنا ق (سه) = { ق (س) | س $\in$ سه } يكون ق شاملاً اذا وفقط اذا كان ق (سه) = صه.

اقتران التقابل :

يسمى الاقتران ق: سه ← صه تقابلاً اذا وفقط اذا كان الاقتران شاملاً وواحداً لواحد

معاً.

العملية الثنائية :

العملية الثنائية على المجموعة سہ هي اقتران ق: سہ × سہ ← سہ

المثال ٢٢ :

لنعرف ق: Z ← Z بـ ق (ن) = ٢ن

ان ق اقتران واحد لواحد ولكنه ليس شاملاً. انه واحد لواحد لانه اذا كانت ق (ن) = ق (م) فان ٢ن = ٢م ومنه نستنتج ان م = ن. وليس اقتراناً شاملاً لأن ١ ∈ Z .لكن ق(ن) عدد زوجي لذلك ق(ن) ≠ ١ لكل ن ∈ Z . من هذا ينتج ان ق ليس تقابلاً.

المثال ٢٣ :

لتكن صہ = { س ∈ R | س ⩾ ٠} ولنعرف

ق: R ← صہ بـ ق(س) = س اذا كانت س ⩾ ٠

، ق (س) = − س اذا كانت س < ٠ . يسمى هذا الاقتران اقتران القيمة المطلقة. ويكتب عادة ق (س) = | س | .

والشكل التالي هو بيان اقتران القيمة المطلقة.

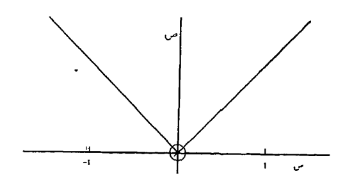
ق ليس واحداً لواحد لان ق (١) = ق (−١) لا يتضمن ١ = −١ . ولكن ق اقتران شامل لانه اذا كانت ص ∈ صہ فان ص ⩾ ٠ ومن التعريف نرى ان ق(ص) = ص. من هذا ينتج ان ق ليس تقابلاً.

المثال ٢٤ :

عرف ق: R ← R بحيث ان ق (س) = ٢س + ٣

ان ق تقابل لأن ق (س ١) = ق (س ٢) يتضمن ٢س ١ + ٣ = ٢ س ٢ + ٣ ومنه ينتج ان س ١ = س ٢ ، واذا كانت ص ∋ R فانه يوجد س ∋ R بحيث ان ق (س) = ص اي ان ٢ س + ٣ = ص وبالتحديد فان

$$س = \frac{ص - ٣}{٢}$$



المثال ٢٥ :

لنرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة بالرمز R^+ اي ان R^+ = { س ∋ R | س > ٠ }
فمن الواضح ان الاقتران
ق: $R \to R^+$ المعرف ب ق (س) = $e^{س}$ هو تقابل.

المثال ٢٦ :

عملية الجمع هي عملية ثنائية على N لأنه اذا كان (س، ص) ∋ N X N فان س + ص ∋ N وهذه بالطبع هي الطريقة العادية لكتابة عملية الجمع. وباستعمال رموز الاقتران فاننا نكتب + : N x N ← N ، وان + ((س، ص)) ∋ N لكل (س، ص) ∋ N X N .
وفائدة استعمال الطريقة العادية واضحة.

لاحظ ان عملية الطرح ليست عملية ثنائية على N لانه على سبيل المثال (١، ٢) ∋

N X N ولكن ١ - ٢ $\notin$ N .

سنبرهن الآن نظريتين عامتين.

النظرية ٤ :

لتكن ~ علاقة تكافؤ على المجموعة سه. ولكل س ∈ سه، لتكن $ك_{س}$ = { ص ∈ سه | ص ~ س} اي ان $ك_{س}$ هوما ندعوه بصف التكافؤ المحتوي على س، فان

(أ) س ∈ $ك_{س}$ لجميع س ∈ سه

(ب) $ك_{س}$ = $ك_{ص}$ اذا وفقط اذا كانت س ~ ص

(ج) $ك_{س}$ ≠ $ك_{ص}$ تتضمن $ك_{س}$ ∩ $ك_{ص}$ = ∅

(د) { $ك_{س}$ | س ∈ سه} (مجموعة صفوف التكافؤ)المختلفة تمثل تجزئة لِ سه، اي ان سه هي اتحاد صفوف التكافؤ المنفصلة $ك_{س}$.

البرهان :

(أ) س ~ س لكل س وهذا يعطي (أ)

(ب) لنفرض ان $ك_{س}$ = $ك_{ص}$. فمن (أ) س ∈ $ك_{س}$ إذن س ∈ $ك_{ص}$ ومنه س ~ ص (من تعريف $ك_{ص}$).

العكس : لنفرض ان س ~ ص، فعلينا ان نثبت ان $ك_{س}$ = $ك_{ص}$ وسنفعل ذلك بان نثبت ان $ك_{س}$ ⊂ $ك_{ص}$ و$ك_{ص}$ ⊂ $ك_{س}$.

لنأخذ ع ∈ $ك_{س}$. اذن ع ~ س وبما ان س ~ ص ينتج من خاصية التعدي ان ع ~ ص، ومنه ينتج ان ع ∈ $ك_{ص}$، الخلاصة : ع ∈ $ك_{س}$ يتضمن ع ∈ $ك_{ص}$ اي $ك_{س}$ ⊂ $ك_{ص}$

لنفرض ان ع ∈ $ك_{ص}$ اذن ع~ ص، ومن خاصية التماثل ينتج ان ص ~ ع، وهذه مع س

~ ص تتضمن س ~ ع ومنه ع ∈ $ك_{س}$ وهذا يثبت (ب).

(جـ) سنثبت (جـ) باستخدام المعاكس الايجابي. لنفرض ان $ك_{س}$ ∩ $ك_{ص}$ ≠ ∅ اذن يوجد ع ∈ $ك_{س}$ ∩ $ك_{ص}$ اي ان ع ∈ $ك_{س}$، ع ∈ $ك_{ص}$ اذن ع ~ س، ع ~ ص وهذا يتضمن س ~ ص ومن (ب) ينتج ان $ك_{س}$ = $ك_{ص}$.

(د) اذا كانت ص ∈ سه من (أ) ينتج ان ص ∈ $ك_{ص}$ ⊃ ∪ $ك_{س}$ ومنه نجد ان سه ⊃ ∪ $ك_{س}$.

وبالعكس اذا كانت ص ∈ ∪ $ك_{س}$ تكون ص ∈ $ك_{س}$ لقيمة ما مثل س ∈ سه، اذن ص ∈ سه. وهكذا ينتج ان ∪ $ك_{س}$ ⊃ سه. وبذلك نكون قد اثبتنا ان سه = ∪ $ك_{س}$، ويتم اثبات النظرية.

المثال ٢٧:

من المثال ١٩ نرى ان Z = $ك_{٠}$ ∪ $ك_{١}$ ∪ $ك_{٢}$ حيث $ك_{٠}$، $ك_{١}$، $ك_{٢}$، مجموعات منفصلة.

النظرية ٥ [الاقتران العكسي]:

اذا كان ق: سه ← صه اقتران تقابل، فانه يوجد اقتران وحيد م: صه ← سه بحيث ان م (ق (س)) = س لجميع قيم س ∈ سه وكذلك

ق (م(ص)) = ص لجميع قيم ص ∈ صه.

ندعوم عكس ق ونكتب م = $ق^{-١}$.

البرهان:

بما ان ق هو اقتران شامل، فاذا كانت ص ∈ صه فانه يوجد س ∈ سه بحيث ان ص = ق (س)، ويوجد س واحد فقط، لأنه اذا كان ص = ق(سَ) فان ص = ق(س) = ق(سَ)، وهذا يعطي س = سَ لأن ق واحد لواحد.

كل عنصر ص ∈ صه يرتبط بعنصر وحيد س ∈ سه. اذن يوجد اقتران م: صه ← سه، بحيث ان م (ص) = س. من هذا ينتج ان م (ق(س)) = س، ق (م(ص)) = ص.

لنثبت ان م وحيـد: لنفـرض انـه يوجـد ل: صه ← سه بحيث ان ل (ق (س)) = س لجميع قيم س ∈ سه. ولنأخذ أي عنصر ص ∈ صه. اذن يوجد س ∈ سه بحيث ان ص = ق (س)، اذن ل (ص) = ل (ق (س)) = س = م (ق (س)) = م (ص) اذن ل = م. وهذا يثبت النظرية.

المثال ٢٨:

(أ) ق: R ← R المعرف بـ ق (س) = ٢س + ٣ هو اقتران تقابل (انظر المثال ٢٤).
وعكسه ق$^{-1}$: R ← R يعطي بالصيغة ق$^{-1}$ (س) = (س − ٣)/٢
(ب) ق: R ← R المعـرف بـ ق (س) = $e^{س}$ هو اقـتران تقـابـل (سنثبت هذا فيـما بعـد)
وعكسه ق$^{-1}$: R ← R^{+} يرمز له بالرمز لو.

المجموعات المتكافئة:

نقول ان المجموعتين سه، صه متكافئتان؛ ونكتب سه ~ صه: اذا وفقط اذا وجد اقتران تقابل؛ ق: سه ← صه.

المثال ٢٩:

{ ١، ٢، ٣} ~ { ١، ٣، ٥} لأن ق المعرف بـ
ق (١) = ١، ق (٢) = ٣، ق (٣) = ٥ هو اقتران تقابل
لكن { ١، ٢} لا تكـافيء { أ، ب، ج} لأنـه اذا فرضنـا ان ق: { ١، ٢} ← { أ، ب، ج} هو اقتران تقابل فان أ = ق (س) لعنصر ما س ∈ { ١، ٢} ، ب = ق (ص) لعنصر ما ص ∈ {١، ٢} و ان أ ≠ ب فان س ≠ ص. الآن ج = ق (١) أو ج = ق (٢)، لذلك اذا كانت س = ١ فان أ = ج. واذا كانت س = ٢ فان ب = ج. لكن هذا يؤدي الى تناقض لان أ ≠ ج و ب ≠ ج.

المثال ٣٠:

N ~ {٢، ٤، ٦، ٨، . . .} أي ان N تكـافيء مجمـوعـة الاعـداد الزوجية وهي مجموعة جزئيـة فعـلاً من N . ولاثبـات ذلـك نلاحـظ ان الاقـتران ق : N ←{٢، ٤، ٦، ٨، . . .} المعرف بـ ق (ن) = ٢ن هو اقتران تقابل.

ليس من الصعب اثبـات ان ~ هي علاقـة تكافؤ على صف جميع المجموعات. فمثلا ق: سه ← سه المعرف بـ ق (س) = س، هو اقتران تقابل.

وفي حساب التفاضل والتكامل يواجه الفرد فكرة الاقتران المركب.

فمثلاً اذا كان ق (س) = جتا س، م (س) = س^{٢} فان ق (م (س)) = جتا س^{٢} وم (ق (س)) = (جتا س)^{٢} وعادة نكتب (جتا س)^{٢} = جتا^{٢}س.

والاقترانان جتا س^{٢} وجتا^{٢} س هما اقترانان مختلفان تماما فمثلا جتا$\pi^{٢}$ ≠ جتا$^{٢}\pi$ سنذكر الآن التعريف العام.

تركيب الاقترانات:

لنفرض ان ق: سه ← صه وم: صه ← ع فان

ل: سه ← ع المعرف بـ ل (س) = م (ق (س)) يدعى تركيب الاقترانين ق ، م ونكتب ل = م ∘ ق لهذا فان

(م ∘ ق) (س) = م (ق (س)) لجميع قيم س ∈ سه .

احيـانـاً يكتب تركيب الاقـترانين م ، ق على صورة م ق ولكن هذا قد يسبب الالتباس لأن حاصل ضرب م ، ق يكتب م ق المعرف بـ (م ق)(س) = م (س). ق (س)، في الحالات التي يكون بها حاصل الضرب ممكنا، مثلا اذا كان م (س) ،ق (س) اعدادا حقيقية.

الصورة وأصل الصورة:

ليكن ق: سه ← صه و ج ⊂ سه ، ي ⊂ صه.

تعرف ق (ج) = { ق (س)| س ∈ ج }،وندعوق (ج) صورة المجموعة ج تحت تأثير الاقتران ق. لاحظ ان ق (ج) ⊂ ص. كذلك نعرف ق$^{-١}$ (ي) = { س ∈ سه | ق (س) ∈ ي } ،

وندعو ق$^{-1}$ (ي) أصل الصورة للمجموعة ي تحت تأثير ق. لاحظ ان ق$^{-1}$ (ي) $\subset$ سه.

نذكر هنا اننا لا نشترط ان يكون ق تقابلا حتى نكتب ق$^{-1}$ (ي)، لانه واضح من تعريف ق$^{-1}$ (ي) ان عكس الاقتران ق لا يرد في التعريف.

المثال ٣١:

عرف ق: $R \leftarrow R$ بـ ق (س) = س^{٢} ولنأخذ

ج = { ١، -١ } ، ي = { س $\in$ | س < ٠ }

اذن ق (ج) = { ١ } ، ق$^{-1}$ (ي) = $\emptyset$ كذلك ق$^{-1}$ (ج) = ج.

في النظرية التالية نعطي مثالين عن خواص الصور واصول الصور.

النظرية ٦:

ليكن ق : سه ← صه ، ح$_1$ ، ح$_2$ $\subset$ سه ، ي$_1$ ، ي$_2$ $\in$ صه فان

(أ) ح$_1$ $\subset$ ح$_2$ ← ق (ح$_1$) $\subset$ ق (ح$_2$)

(ب) ق$^{-1}$ (ي$_1$ $\cap$ ي$_2$) = ق$^{-1}$ (ي$_1$) $\cap$ ق$^{-1}$ (ي$_2$)

البرهان:

(أ) سنثبت ان ص $\in$ ق (ح$_1$) تتضمن ص $\in$ ق (ح$_2$): ص $\in$ ق (ح$_1$) ← ص = ق (س) لعنصر ما س $\in$ ح$_1$، ولكن ح$_1$ $\subset$ ح$_2$ إذن س $\in$ ح$_2$ ومنه ص = ق (س) $\in$ ق(ح$_2$) وهذا يثبت (أ).

(ب) س $\in$ ق$^{-1}$ (ي$_1$ $\cap$ ي$_2$) تعطي ق (س) $\in$ ي$_1$ $\cap$ ي$_2$

ومنه ق (س) $\in$ ي$_1$ ، ق (س) $\in$ ي$_2$ اذن س $\in$ ق$^{-1}$ (ي$_1$)، س $\in$ ق$^{-1}$ (ي$_2$)، وهذا يعطي

س $\in$ ق$^{-1}$ (ي$_1$) $\cap$ ق$^{-1}$ (ي$_2$)

ومن الواضح انه يمكن الرجوع بخطوات البرهان، وهذا يثبت النظرية.

التمارين (١ - ٢)

في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين

١ - اثبت ان سه ∩ صه = صه اذا وفقط اذا كانت صه ⊂ سه

٢ - اذا كانت سه$_1$، سه$_2$ مجموعتين. فأوجد مجموعتين منفصلتين صه$_1$، صه$_2$ بحيث ان سه$_1$ ∪ سه$_2$ = صه$_1$ ∪ صه$_2$.

٣ - لاي مجموعة غير خالية سه، لنرمز الى عائلة جميع المجموعات الجزئية من سه بالرمز قو (سه). ونسمي قو (سه) مجموعة القوة لِ سه. اكتب عناصر قو (سه) حيث سه = { أ، ب، ج }

٤ - اي من المجموعات التالية مجموعة خالية:

سه$_1$ = { ن ∈ Z | ن^2 = ٢ }،

سه$_2$ = { س ∈ R | س^3 - ٢س^2 + س - ٢ = ٠ }

سه$_3$ = { (س، ص) ∈ R^2 | س^2 + س ص + ص^2 < ٠ }

٥ - اثبت انه في اي مجموعات سه، صه، ع يكون:

سه × (صه ∩ ع) = (سه × صه) ∩ (سه × ع)

٦ - اثبت ان < هي علاقة تعدٍّ على R . ولكنها ليست انعكاسية وليست تماثلية.

٧ - اعط مثالا لعلاقة على N بحيث تكون علاقة انعكاس وتعد ولكنها ليست تماثلية.

٨ - (أ) لتكن ق: سه ← صه : عرف علاقة ~ على سه كما يلي: س ~ ص اذا وفقط اذا كان ق (س) = ق (ص). اثبت ان ~ هي علاقة تكافؤ.

نسمي ~ علاقة التكافؤ المعرفة بـ ق.

(ب) لتكن سه هي مجموعة الاعداد الحقيقية عدا الصفر.

عرف ق: سه ← سه بـِ ق (س) = $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ حيث |س| هي القيمة المطلقة لِس. صف علاقة التكافؤ المعرفة بـِ ق. اكتب سه على صورة اتحاد صفوف التكافؤ المنفصلة.

٩ - أ) ثبت عددا ما ن ∈ N . عرف ~ على Z كما يلي: س ~ ص اذا وفقط اذا كان س - ص يقبل القسمة على ن. كالعادة نكتب س ≡ ص (مض ن) ونقول ان س و ص

متطابقان في مضاعفات ن. أثبت ان ~ هي علاقة تكافؤ على Z .

ب) افرض ان س ≡ ص (مض ن) و سَ ≡ صَ (مض ن) اثبت ان س + سَ ≡ ص + صَ (مض ن)،وكذلك س سَ ≡ ص صَ (مض ن)
ومنه استنتج ان

س^{2}≡ ص^{2} (مض ن)، ص^{3}≡ س^{3} (مض ن)، . . .

ج) استخدم الجزء الاخير من(ب)لاثبات ان ٢ ^{252} -١ يقبل القسمة على ٥ .

د) اثبت ان العدد الطبيعي (مكتوبا بشكله العشري) يقبل القسمة على ٩ اذا وفقط اذا كان مجموع ارقامه يقبل القسمة على ٩. مثالا على ذلك ٦٢٨٢ يقبل القسمة على ٩ لأن ٦ + ٢ + ٨ + ٢ = ١٨ يقبل القسمة على ٩.

١٠ ـ لتكن سه أي مجموعة و لتكن قو(سه) عائلة كل المجموعات الجزئية للمجموعة سه. لنفرض ان

ق: قو(سه) ⟵ { س ∈ R / س ⩾ ٠} بحيث ان

ق (ح$_{1}$ ∪ ح$_{2}$) = ق (ح$_{1}$) + ق (ح$_{2}$) لأي مجموعتين جزئيتين منفصلتين ح$_{1}$، ح$_{2}$ من سه.

اثبت أن ح ⊂ ع ⟵ ق (ح) ⩽ ق (ع).

١١ ـ لتكن سه اي مجموعة،وَي ⊂ سه: عرف

ك$_{ي}$: سه ⟵ { صفر، ١} بـ

ك$_{ي}$ (س) = ١ اذا كان س ∈ ي ،

ك$_{ي}$(س)= صفرا اذا كان س ∉ ي

نسمي ك$_{ي}$ الاقتران المميز لـ ي.

اذا كانت ى، ح ⊂ سه فاثبت ان

أ) ك$_{ي}$ = ك$_{ح}$ اذا وفقط اذا كانت ى = ح.

ب) ك$_{ي}$ ⩽ ك$_{ح}$ اذا وفقط اذا كانت ي ⊂ ح

ج) ك$_{ي∩ح}$ = ك$_{ي}$. ك$_{ح}$

د) $ك_{ي \cup ح} = ك_ي + ك_ح - ك_{ي \cap ح}$

لاحظ انه في ج) تعني $ك_{ي \cap ح}(س) = ك_ي(س)\, ك_ح(س)$ لكل $س \in سه$ وكذلك في د) تعني

$ك_{ي \cup ح}(س) = ك_ي(س) + ك_ح(س) - ك_{ي \cap ح}(س)$ لكل $س \in سه$

٣ ـ الزمر، الحلقات، الحقول، الفضاءات الخطية، الجبريات.

مفهوم الزمرة من ابسط الافكار واكثرها اساسية في الرياضيات، والفكرة سهلة الا ان نظرية الزمر واسعة جدا. وتوجد أوليات هذه النظرية في اي كتاب يبحث في الجبر المجرد. والزمر هي اساس نظم اخرى تظهر في التحليل، مثل الحلقات والفضاءات الخطية، لذلك سنذكر بايجاز بعض الافكار الاساسية للزمر.

ولكي نتمكن من اعطاء امثلة سنفترض المعرفة ببعض الخواص الاولية لمجموعة الاعداد الصحيحة ولمجموعة الاعداد الحقيقية الخ.

لنأخذ بعين الاعتبار الزوج المرتب $(Z ، +)$ الذي يتكون من Z وعملية ثنائية هي عملية الجمع على Z. نلاحظ الخواص التالية :

أ) عملية الجمع هي عملية تجميعية اي ان

أ + (ب + ج) =(أ + ب) + ج لجميع أ، ب، ج $\in Z$

ب) يوجد عنصر محايد هـ $\in Z$ بحيث ان هـ + س = س + هـ = س لجميع س $\in Z$.

ج) لكل أ $\in Z$ يوجد نظير $\hat{أ} \in Z$ بحيث ان

أ + $\hat{أ}$ = $\hat{أ}$ + أ = هـ

في ب) هـ هو بالطبع العدد صفر وفي ج) $\hat{أ}$ = −أ

لذلك أ + (−أ) = (−أ) + أ = صفراً.

مثال آخر: لنأخذ الزوج المرتب $(R^+ ، .)$ الذي يتكون من مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة مع عملية الضرب على R^+. عملية الضرب هي عملية ثنائية لأن أ. ب> صفر عندما يكون أ> صفر و ب > صفر.

من السهـل ان نثبت ان الخـواص (أ)، (ب)، (ج) السابقة تبقى صحيحة اذا استبدلنا R^+ بـ Z ، وعملية الضرب بعملية الجمع فمثلا ب) تصبح مـ ٠ أ = أ ٠ مـ = أ لكل أ $\in R^+$ وفي هذه الحالة م هو العدد الحقيقي الموجب ١ .

اذا نظرنا بتمعن الى المثالين السابقين، نرى ان كلاً منهما توضيح لما ندعوه بالزمرة. وها هو التعريف الدقيق للزمرة:

الزمرة (ز، ✱) هي عبارة عن زوج مرتب يتكون من مجموعة غير خالية ز وعملية ثنائية ✱ على ز بحيث ان

١) العملية الثنائية ✱ هي عملية تجميعية، اي ان

(أ ✱ ب)✱ ج = أ ✱ (ب ✱ ج) لجميع أ، ب، ج $\in$ ز

٢) يوجد عنصر محايد مـ $\in$ ز بحيث ان

مـ ✱ أ = أ ✱ مـ = أ لجميع أ $\in$ ز

٣) لكل عنصر أ $\in$ ز يوجد نظير $\hat{أ}$ بحيث ان

أ ✱ $\hat{أ}$ = $\hat{أ}$ ✱ أ = مـ.

من السهل ان نرى ان مـ وحيد وأنه لكل أ يوجد نظير واحد فقط .

في كثير من الزمر المستعملة يكون أ ✱ ب = ب ✱ أ لكل أ، ب $\in$ ز، اي ان العملية ✱ هي عملية تبديلية. مثل هذه الزمر تسمى زمراً تبديلية، أوزمراً أبيلية (نسبة للرياضي النرويجي آبل (١٨٠٢ ـ ١٨٢٩))، لهذا فان (Z ، +)، (R^+ ، ٠) هي زمر تبديلية .

واذا كانت الزمرة تحوي عدداً منتهياً من العناصر فان عدد عناصرها يسمى رتبة الزمرة.

مثـال على ذلـك ز = { ١ ، -١ } مع عمليـة الضـرب هي زمـرة تبـديليـة من الرتبة الثانية . يمكننا اثبات ان جميع الزمر التي رتبتها $\leqslant$ ٥ هي بالضرورة زمر تبديلية .

والمثـال التـالي يؤكـد على ان الـزمـرة يمكن ان تكون اي مجموعة غير خالية مع عملية ثنائية مناسبة، وليس فقط مجموعة ارقام مع عملية حسابية مألوفة .

المثال ٣٢ :

لتكن س اي مجموعة غير خالية، ز هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية للمجموعة س

. لهذا فان $\emptyset \in$ ز، سه $\in$ ز. لنعرف عملية * على ز كما يلي:

$$ح_1 * ح_2 = (ح_1 \cap ح_2^{\prime}) \cup (ح_1^{\prime} \cap ح_2) \quad . . . (8)$$

جرت العادة على تسمية $ح_1 * ح_2$ الفرق المتماثل لـ $ح_1$ و $ح_2$.

$ح_1^{\prime}$ ترمز لمتممة المجموعة $ح_1$.

من الواضح ان (٨) تعرف عملية ثنائية لأن الطرف الايسر منها هو مجموعة جزئية من سه

وبما ان $\emptyset * ح = (\emptyset \cap ح^{\prime}) \cup (ح \cap \emptyset^{\prime}) = \emptyset \cup (ح \cap س) = ح$ وبما ان * عملية تبديلية،نرى ان $\emptyset$ هو العنصر المحايد، لهذا فان الشرط (٢) من شروط الزمرة قد تحقق، ايضاً:

$$ح * ح = (ح \cap ح^{\prime}) \cup (ح \cap ح^{\prime}) = \emptyset \text{ لكل } ح \in ز$$

أي ان ح هي نظير ح لكل ز وهذا يحقق الشرط (٣) من شروط الزمرة.

أما الشرط (١) فهو اعقد الشروط في هذه الحالة:

فباستخدام قانون التوزيع للمجموعات نستنتج من (٨) ان

$ح_1 * ح_2 = (ح_1 \cup ح_2) \cap (ح_1^{\prime} \cup ح_2^{\prime})$ وكذلك فيكون

$$(ح_1 * ح_2)^{\prime} = (ح_1 \cap ح_2) \cup (ح_1^{\prime} \cap ح_2^{\prime})$$

$$(ح_1 * ح_2) * ح_3 = \{(ح_1 \cap ح_2^{\prime}) \cup (ح_2 \cap ح_1^{\prime})\} * ح_3$$

$$= [\{(ح_1 \cap ح_2^{\prime}) \cup (ح_2 \cap ح_1^{\prime})\} \cap ح_3^{\prime}] \cup [\{(ح_1^{\prime} \cap ح_2^{\prime}) \cup (ح_1 \cap ح_2)\} \cap ح_3]$$

وبتبديل $ح_1$ ، $ح_3$ نرى ان $(ح_3 * ح_2) * ح_1 = (ح_1 * ح_2) * ح_3$

ولكن * هي عملية تبديلية. لهذا فان:

$(ح_3 * ح_2) * ح_1 = ح_1 * (ح_3 * ح_2)$. ومنه:

(ح$_1$ * ح$_2$) * ح$_3$ = ح$_1$ * (ح$_2$ * ح$_3$)

وهذا يثبت الشرط (١) من شروط الزمر.

ونرغب احياناً ان نقارن زمرتين (ز ، *) ، (ى ، ه)، ونفعل ذلك عادة بدراسة اقتران بين الزمرتين يحافظ على العمليات الثنائية.

الاقتران المحافظ والتشاكل

الاقتران المحافظ من (ز ، *) الى (ى ، ه) هو اقتران ق : ز ← ي يحقق الشرط

ق (أ * ب) = ق (أ) ه ق (ب) لجميع أ،ب ∈ ز

اذا كان الاقتران المحافظ تقابلا فانه يدعى تشاكلا. وتسمى الزمرتان متشاكلتين اذا وفقط اذا وجد بينهما تشاكل.

اذا كتبنا ز ~ ى لتعني ان ز وَي هما زمرتان متشاكلتان، فانه يكون من السهل التحقق من ان ~ هي علاقة تكافؤ على عائلة جميع الزمر. ولهذا فان الزمرتين المتشاكلتين ينظر اليهما في نظرية الزمر كمتكافئين.

المثال ٣٣

زمرة الاعداد الحقيقية مع عملية الجمع، (R ، +)، وزمرة الاعداد الحقيقية الموجبة مع عملية الضرب، (R^+ ، ·)، هما زمرتان متشاكلتان.

ذلك اننا سنثبت في الفصل التاسع ان الاقتران الاسي

ق : (R ، +) ⟵ (R^+ ، ·) المعرف بـِ ق (س) = $e^{س}$ هو تشاكل

في هذه الحالة فإن خاصية المحافظة ق (أ + ب) = ق (أ)·ق (ب) تصبح $e^{أ+ب}$ = $e^{أ}$·$e^{ب}$، وهذه قد تكون من اهم خواص الاقتران الاسي.

المثال ٣٤

لتكن (ز، ·) هي الزمرة { ١، −١ } مع عملية الضرب . عرف

ق: (Z ، +) ⟵ (ز، ٠) بـ ق(٢أ) = ١،

ق (٢أ + ١) = -١ لكل أ $\in$ Z . بفحص الحالات عندما تكون أ، ب $\in$ Z اعدادا زوجية او فردية : يتضح ان ق هو اقتران محافظ فمثلا اذا كان أ زوجيا وب فرديا فان أ+ب يكون عدداً فردياً.ولهذا فان ق (أ + ب) = -١ ، ق (أ) = ١ ، ق (ب) = -١ ؛ ومنه ق (أ+ب) = ق(أ) ٠ ق(ب) .

من الواضح ان الاقتران ق هو اقتران شامل ولكنه ليس واحدا لواحد . فعلى سبيل المثال ق (٢) = ق (٤).ولكن ٢ ≠ ٤،لهذا فان ق ليس تشاكلا . لاحظ ان هذا لا يثبت أن (Z ، +) وَ(ز، ٠) ليستا متشاكلتين، لانه ربما يكون من الممكن ايجاد تشاكل بينهما . ولكن في هذه الحالة بالذات يمكن اثبات انه لا يوجد تشاكل بين هاتين الزمرتين،(انظر التمرين ١ ـ ٣) .

المثال ٣٥

لنأخذ علاقة التكافؤ ~ ؛ فمن المثال ١٩ حصلنا على ثلاثة صفوف تكافؤ $ك_٠$ ، $ك_١$ ، $ك_٢$ سنرمز لها بـ $\bar{٠}$، $\bar{١}$، $\bar{٢}$ على التوالي. لهذا نحصل على ما يلي :

$\bar{٠}$ = { ٠، ٣، -٣، ٦، ٠٠٠}

$\bar{١}$ = { ١، ٤، -٢، ٠٠٠ }

$\bar{٢}$ = { ٢، ٥، -١، ٠٠٠ } ، تدعى هذه صفوف التكافؤ لمضاعفات ٣ ويرمز لها بالرمز $Z_٣$.

وسنجري عملية ضرب على $Z_٣$ حسب القاعدة التالية $\bar{أ}$ ٠ $\bar{ب}$ = $\overline{أب}$: مثلا $\bar{٢}$ ٠ $\bar{٢}$ = $\bar{٤}$ = $\bar{١}$.

علينا ان نتحقق ان هذه القاعدة تعرف صف تكافؤ وحيدا . اي علينا اثبات انه اذا كان أ~جـ، ب ~ د فان أب~ جـ د،أي ان $\overline{أب}$ = $\overline{جـ د}$.

الآن أ - جـ = ٣$ر_١$ ، ب - د = ٣$ر_٢$،حيث $ر_١$ ، $ر_٢$ $\in$ Z وهذا يعطي أب = جـ د + ٣($ر_١$ د + $ر_٢$ جـ) + ٩$ر_١$ $ر_٢$

ومنه ينتج ان أب - جـ د تقبل القسمة على ٣ أي ان أب~ جـ د.

لنأخذ $Z^*_٣$ = { $\bar{١}$، $\bar{٢}$ }،عناصر $Z_٣$ غير الصفرية، مع عملية الضرب الثنائية التي

عرفناها تواً.

من السهل إثبات ان $Z^*_{٣}$ هي مجموعة رتبتها ٢ وعنصرها المحايد هو ١̄. ومن المفيد ان نكتب جدول زمر لمثل هذه الزمر المنتهية الصغيرة:

	١̄	٢̄
١̄	١̄	١̄
٢̄	٢̄	١̄

$(Z^*_{٣})$

من المفيد ان نلاحظ ان كل زمرة رتبتها ٢ تشاكل $Z^*_{٣}$ *.

لاثبات هذا نفرض ان ز = { س، مـ} هي زمرة تتكون من عنصرين مختلفين حيث مـ العنصر المحايد. اذن س * س ∈ ز ومنه س * س = س أو س * س = مـ، ولوكانت س * س = س فان سَ * (س * س) = سَ * س = مـ اي ان (سَ * س) * س = مـ، مـ * س = مـ اذن س = مـ وهذا يناقض س ≠ مـ اذن س * س = مـ

وجدول الزمرة (ز ، *) هو

	مـ	س
مـ	مـ	س
س	س	مـ

(ز)

وبالنظر الى جدولي (ز) و($Z^*_{٣}$) نرى ان ز تشاكل $Z^*_{٣}$ ، وبعبارة ادق فان الاقتران ق: ز ← $Z^*_{٣}$ المعرف بـ ق(مـ) = ١̄ ، ق(س) = ٢̄ هو تشاكل.

واذا اخذنا $Z_{٤}$ مجموعة صفوف التكافؤ لمضاعفات ٤ حيث أ ~ ب تعني ان أ – ب يقبل

القسمة على ٤، فان العناصر غير الصفر في Z^*_4 مع عملية الضرب لا تكون زمرة، لانه على سبيل المثال $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0} \notin Z^*_4$، لهذا فان عملية الضرب ليست عملية ثنائية.

وبشكل عام يمكن اثبات ان Z^*_n مع عملية الضرب لصفوف التكافؤ تكون زمرة اذا وفقط اذا كان ن عدداً اولياً، اي ان ن لا يقبل القسمة إلا على ن وعلى ١ فقط.

سنفحص الآن الفكرة الهامة: «زمرة داخل زمرة» أو الزمرة الجزئية: لنأخذ زمرة الاعداد الصحيحة مع عملية الجمع (Z ، +). فالمجموعة:

ج = { ٠، ٢، -٢، ٤، -٤، ... } للاعداد الصحيحة الزوجية هي مجموعة جزئية من Z .

ومن الواضح ان (ج، +) هي زمرة. ومن المهم التأكد من ان + ما زالت عملية ثنائية على ج اي ان أ + ب ∈ ج عندما يكون أ، ب ∈ ج. وهذا واضح لأن ٢م + ٢ن = ٢ (م + ن) لكل م،ن ∈ Z . والمجموعة المكونة من عنصر واحد { ٠ } هي زمرة جزئية مع عملية الجمع، بينما المجموعة { ٠، ١، ٢، ٣ ... } ليست زمرة جزئية، فعلى سبيل المثال: العنصر١ليس له نظير في المجموعة ع = { ٠، ١، ٢، ٣، ... } اي انه لا يوجد س ∈ ع بحيث ان س + ١ = ٠ .

ومن الواضح ايضاً ان مجموعة الاعداد النسبية الموجبة مع عملية الضرب (Q^+ ، ٠) هي زمرة جزئية من (R^+ ، ٠).

سنعطي الآن تعريف الزمرة الجزئية:

الزمرة الجزئية:

الزمرة الجزئية (ى، *) للزمرة (ز، *) هي مجموعة ى غير خالية وجزئية من ز بحيث ان (ى، *) هي زمرة ايضاً.

من المفهوم ان * هي عملية ثنائية على ى اي ان أ*ب ∈ ى لكل أ، ب ∈ ى.

والنظرية التالية تعطينا طريقة لمعرفة هل المجموعة الجزئية من زمرة ما هي زمرة جزئية ام لا:

النظرية ٧

اذا كانت ى مجموعة غير خالية وجزئية من الزمرة (ز، *) فان (ى، *) تكون زمرة جزئية اذا وفقط اذا كان أ * بَ ∋ ى لكل أ، ب ∋ ى.

البرهان

اولا لنفرض ان (ى، *) هي زمرة جزئية، لنأخذ أ، ب ∋ ى.
إذن بَ ∋ ي لأن ى زمرة جزئية وايضا أ * بَ ∋ ي لأن * هي عملية ثنائية على ى. وهذا يثبت الجزء (فقط اذا) من النظرية.

ثانيا لنفرض ان أ * بَ ∋ ى لكل أ ، ب ∋ ى. علينا اثبات ان (ي ، *) هي زمرة.
لنأخذ أ ∋ ى اذن أ * أَ ∋ ى اي ان مـ ∋ ى، وهذا يثبت ان العنصر المحايد في المجموعة الاصلية ز هو عنصر محايد في ى.

كذلك لاي عنصر أ ∋ ى، بما ان مـ ∋ ى فان مـ * أَ ∋ ى اي ان أَ ∋ ى. وهذا يثبت الشرط (٣) من شروط الزمرة. وخاصية التجميع واضحة لأن أ * (ب * جـ) = (أ * ب) * جـ لجميع عناصر ز فهي بالتأكيد صحيحة لجميع عناصر اي مجموعة جزئية من ز.

أخيراً لنفرض ان أ، ب ∋ ى. لقد اثبتنا ان بَ ∋ ى، ومنه أ، بَ ∋ ى. ومن الفرض ينتج ان أ * بً ∋ ى ولكن بً = ب. اذن أ * ب ∋ ى. وهذا يثبت ان * هي عملية ثنائية على ى. وهذا يثبت النظرية.

وكثير من الزمر التي نشاهدها في التحليل هي تبديلية،لهذا سوف نهتم بهذه الزمر في معظم ما سيأتي.

اذا كانت (ز ، *) زمرة تبديلية و (ي ، *) زمرة جزئية فيها (بالضرورة ستكون تبديلية)، يمكننا تكوين زمرة جزئية جديدة تدعى بالزمرة الكسرية يرمز لها بالرمز ز/ى.
وعناصر هذه الزمرة هي عبارة عن صفوف التكافؤ التي تحددها علاقة التكافؤ ~ ، المعرفة بـ أ ~ ب اذا وفقط اذا كان أَ * ب ∋ ى حيث أ، ب ∋ ز. سنثبت كل هذا الآن.

النظرية ٨ :

لتكن ز زمرة تبديلية ، ى زمرة جزئية من ز.لكل أ، ب ∋ ز، عرف أ ~ ب لتعني $\hat{أ}$ * ب ∋ ى . اذن تكون ~ علاقة تكافؤ على ز. ولتكن كـ$_{أ}$ = { ب ∋ ز| ب ~ أ} . يمكننا تعريف عملية ضرب على صفوف التكافؤ كـ$_{أ}$ بالقاعدة :

كـ$_{أ}$ ☐ كـ$_{ب}$ = كـ$_{أ*ب}$ لكل أ، ب ∋ ز

مع عملية الضرب ☐ تصبح مجموعة صفوف التكافؤ زمرة تبديلية يرمز لها بالرمز ز/ي وتعرف بالزمرة الكسرية ز على ى.

البرهان :

من السهـل اثبـات ان ~ هي علاقـة تكافؤ . فعلى سبيل المثال اذا كانت أ~ ب ، ب~ جـ فان $\hat{أ}$ * ب ∋ ى ، $\hat{ب}$ * جـ ∋ ى،وَمـنـه ($\hat{أ}$ * ب) * ($\hat{ب}$ * جـ) ∋ ى. وخـاصـيـة التجميع تعطي ($\hat{أ}$ * هـ) * جـ = $\hat{أ}$ * جـ ∋ ى،اي ان أ~ جـ.

علينا اثبات ان كـ$_{أ}$ ☐ كـ$_{ب}$ = كـ$_{أ*ب}$ هي صحيحة التعريف، اي ان عملية الضرب لا تعتمد على العناصر التي نختارها من كـ$_{أ}$ ، كـ$_{ب}$. فلنفرض ان أ~ س ، ب~ ص . الآن $\hat{أ}$ * س∋ ى ، $\hat{ب}$ * ص∋ ى،وَمنه ($\widehat{أ * ب}$) * (س * ص) = $\hat{أ}$ * ($\hat{ب}$ * ص) * س = ($\hat{أ}$ * س) * ($\hat{ب}$ * ص) ∋ ى.

وهذا يعطي أ * ب ~ س * ص.وَمنه كـ$_{أ*ب}$ = كـ$_{س*ص}$

من الواضح ان ز/ي = { كـ$_{أ}$| أ ∋ ز} هي زمرة.

فعلى سبيل المثال: العنصر المحايد هوكـ$_{هـ}$ لان كـ$_{هـ}$ ☐ كـ$_{أ}$ = كـ$_{هـ*أ}$ = كـ$_{أ}$،وكذلك $\hat{كـ}_{أ}$ = كـ$_{\hat{أ}}$ لان كـ$_{أ}$ ☐ كـ$_{\hat{أ}}$ = كـ$_{أ*\hat{أ}}$ = كـ$_{هـ}$

وهذا ينهي اثبات النظرية.

ان فكرة الحلقةالكسرية (التي تشابه فكرة الزمرة الكسرية) سترد بعد قليل وهي مهمة في عملية بناء الاعداد الحقيقية من الاعداد النسبية وسنقوم بهذه العملية في الفصل الثاني.

المثال ٣٦

لتكن ز هي الزمرة التبديلية (Z ، +) ولتكن ى الزمرة الجزئية { ٠، ٣، -٣، ٦، -٦، ٠٠٠ }
فان ز/ى هي الزمرة Z_3 لصفوف تكافؤ مضاعفات العدد ٣ مع الجمع.

ولبعض الزمر التي قدمناها في امثلة سابقة خواص جبرية اكثر مما قدمنا. فعلى سبيل المثال لا نحتاج فقط لجمع الاعداد الصحيحة (اعتبر الزمرة (Z ، +) مثالا) ولكننا نحتاج ان نضرب الاعداد الصحيحة. ولسوء الحظ فان (Z ، ٠) ليست زمرة مع عملية الضرب. وبالطبع فان ٠ هي عملية ثنائية تبديلية وتجميعية على Z ؛ والعدد ١ هو العنصر المحايد في عملية الضرب ولكن لا يوجد نظير لكل عنصر في (Z ، ٠). يوجد نظائر للعنصرين ١ و-١ فقط. وهنالك نقطة اخرى يجب ملاحظتها وهي ان العمليتين +، ٠ تتداخلان في خاصية التوزيع

أ٠ (ب +جـ) = أ ٠ ب + أ ٠ جـ

والنظام الجبري الذي له تقريباً نفس خواص (Z ، + ، ٠) يدعى حلقة، ونقول «تقريبا نفس الخواص» لانه في الحلقة المجردة لا نشترط ان تكون عملية الضرب تبديلية ولا نشترط ان يكون هناك عنصر محايد لعملية الضرب.

الحلقة

نعرف الحلقة على انها ثلاثة اشياء مرتبة (سہ ، + ، ٠) تتكون من مجموعة غير خالية سہ وعمليتي جمع وضرب ثنائيتين على سہ بحيث ان

١) (سہ ، +) هي زمرة تبديلية.

٢) (سہ ، ٠) تحقق الشرط (١) من شروط الزمرة اي ان لها الخاصية التجميعية.

٣) خاصية التوزيع تحقق

أ (ب +جـ) = أب + أجـ و

(أ + ب) جـ = أجـ + ب جـ لكل أ ، ب ، جـ ∈ سہ

لاحظ اننا كتبنا كما هو متعارف عليه أب بدلا من أ ٠ ب. وهذا سيء منطقيا لكنه اوجز.

وسنرمز للعنصر المحايد في (س ، +) بالرمز صـ ويدعى صـ صفر الحلقة في (س ، +) سنشير الى نظير أ بالرمز -أ لذلك فان -أ + أ = أ + (-أ) = صـ .

تدعى الحلقة تبديلية اذا كانت عملية الضرب تبديلية اي اذا كانت أب =بأ لكل أ، ب ∈ س،واذا كانت (س ، ٠) تحقق الشرط ٢) من شروط الزمر اي انه يوجد عنص محايد،ولعملية الضرب فان س تسمى حلقة محايدة.

وفي الغالب سنأخذ الحلقات بحيث اذا كانت تحوي عنصرا محايدا و،فان و ≠ صـ . وهذا يجنبنا الحلقة التي تحوي على صـ فقط.

المثال ٣٧

من اسهل الحلقات س ، بعد الحلقة التي تحتوي على صـ فقط، الحلقة المعطاة بجدولي الجمع والضرب التاليين

+	صـ	و
صـ	صـ	و
و	و	صـ

٠	صـ	و
صـ	صـ	صـ
و	صـ	و

هذه الحلقة هي في الحقيقة، حلقة صفوف التكافؤ لمضاعفات ٢ (Z_2 ، + ، ٠). وبعبارة ادق فإنها تشاكل هذه الحلقة، وهذا يعني انه يوجد اقتران ق : س←Z_2 بحيث ان ق (أ + ب) = ق (أ) + ق (ب) ، ق (أب) = ق (أ) ق (ب) لكل أ، ب ∈ س.
والاختيار الطبيعي لـ ق هو المعرف بـ
ق (صـ) = $\bar{0}$ ، ق (و) = $\bar{1}$.

المثال ٣٨

لعل اهم الحلقات واكثرها اساسية حلقة الاعداد الصحيحة (Z ، + ، ٠) التي مهدت

لتعريف الحلقة المجردة و فلولا حلقة الاعداد الصحيحة لما كنا نعرف الرياضيات بوضعها الحالي.

المثال ٣٩ [اعداد جاوس الصحيحة]

لنفترض المعرفة بالاعداد المركبة (الفصل الثاني). ولنفرض ان ت هو العدد المركب حيث ان ت^2 = −١. ولنفرض ايضا ان س = { أ + ت جـ| أ، جـ ∈ Z }.سنضرب ونجمع عناصر س كما هو الحال في الاعداد المركبة. فمثلا (أ+ت جـ) (س + ت ص) = (أس − جـ ص) + ت (جـ س + أص) حيث أ، جـ، س، ص، ∈ Z .

إذن فعملية الضرب هي عملية ثنائية على س. ومن السهل اثبات ان (س، + ، ٠) هي حلقة،تدعى حلقة الاعداد الصحيحة الجاوسية نسبة الى الالماني جاوس (١٧٧٧ ـ ١٨٥٥) احد أعظم الرياضيين في التاريخ. وفي الفصل الثاني سنقابل حلقات اخرى تتكون من المتتاليات اللانهائية من الاعداد النسبية. وهذه الحلقات هامة في التحليل لعلاقتها في بناء نظام الاعداد الحقيقية من الاعداد النسبية.

وما يقابل الزمر الجزئية والزمر الكسرية هنا الحلقات الجزئية والحلقات الكسرية.

إن تعريف الحلقة الجزئية واضح: فهي مجموعة جزئية غير خالية من حلقة ما، وتكون هي نفسها حلقة. وكمثال على ذلك مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية ج فهي حلقة جزئية من Z . وحاصل جمع وحاصل ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

وبشكل خاص فان ج لها الخاصية التالية: اذا كان أ ∈ ج،وَب ∈ Z فان أب ∈ ج.

وامثال هذه الحلقة الجزئية تدعى مثالية،ويكفي ان نركز اهتمامنا على الحلقات التبديلية.

المثاليات:

لتكن (س ، + ، ٠) حلقة تبديلية،وَم ⊂ س بحيث ان (م ، +) هي زمرة جزئية من (س ، +) وبحيث ان أب ∈ م لكل أ ∈ م ولكل ب ∈ س.

في هذه الحالة نسمي م مثالية في س. لاحظ ان المثالية هي حلقة جزئية لان أب ∈ م

لكل أ ∋ م ، ب ∋ س تتضمن ان أب ∋ م لكل أ، ب ∋ م .

واذا كانت س حلقة تبديلية فاننا نكون الحلقة الكسرية لِـ س بالنسبة لحلقة جزئية مثالية م ، اي س/م . لذلـك وكـما سنثبت فان س/م ستكـون حلقـة . امـا اذا كانت م حلقـة جزئية ليست مثالية فان هذا لن يكون صحيحا .

وكما في النظرية ٨، تعرف ~ بالنسبة للزمرة الجزئية (م ، +) اي لكل أ، ب ∋ س ، أ~ ب تعني -أ + ب ∋ م . ومن النظرية ٨ نحصل على ان (س ، +)/(م ، +) هي زمرة تبديلية . وعملية جمع صفوف التكافؤ تعرف بالطبع كالتالي :

ك$_أ$ ☐ ك$_ب$ = ك$_{أ+ب}$. ولنحاول تعريف عملية ضرب على صفوف التكافؤ بـ ك$_أ$ ⋅ ك$_ب$ = ك$_{أب}$ حيث أب تمثل عملية الضرب على الحلقة س . وسنثبت ان هذا التعريف له معنى .

عندما نثبت ذلك سيكون من السهل اثبات خاصية التجميع والتوزيع . . . الخ .

لنأخذ أ، ب، جـ، د ∋ س . ولنفرض ان أ~ د ، ب~ جـ .

يجب ان نثبت ان أب~ جـ د . فبما ان -أ + د ∋ م ، -ب + جـ ∋ م فان د = أ + و$_١$، جـ = ب +و$_٢$ حيث و$_١$ ، و$_٢$ ∋ م .ومنه

جـ د = أب + و$_١$ (ب + و$_٢$) + أو$_٢$

جـ د + (-(أب)) = و$_١$ (ب + و$_٢$) + أو$_٢$ . . . (٩)

لكن م هي حلقة جزئية مثالية . اذن و$_١$ (ب + و$_٢$) ∋ م وكذلك أو$_٢$ ∋ م . لذلك (٩) تتضمن ان جـ د + (-(أب)) ∋ م ، اي ان أب~ جـ د لهذا فان ك$_{أب}$ = ك$_{جـ د}$ وهذا ما كنا نريد . ولنلخص ذلك :

الحلقات الكسرية :

لتكن س حلقة تبديلية ، م مثالية في س . فيوجد حلقة كسرية س/م تتكون من صفوف التكافؤ التي تعينها العلاقة ~ والمعرفة بِـ أ~ ب اذا وفقط اذا كانت -أ + ب ∋ م .

وعمليتا الجمع والضرب معرفتان على س/م كما يلي :

ك$_أ$ + ك$_ب$ = ك$_{أ+ب}$ ، ك$_أ$ ⋅ ك$_ب$ = ك$_{أب}$

المثال ٤٠

لنأخذ الحلقة Z والمثالية

م = { ٠، ٣، -٣، ٦، -٦، ...} فان Z/م هي حلقة صفوف التكافؤ لمضاعفات ٣. (انظر المثال ٣٥).

المثال ٤١

لنأخذ حلقة الاعداد النسبية Q والحلقة الجزئية Z . Z ليست مثالية في Q . فمثلا ٣ ∈ Z ∌ (٢/١) . ومن السهل ملاحظة انه يوجد أ، ب، جـ، د ∈ Q بحيث ان أ ~ ب، جـ ~ د ولكن أجـ ≁ ب د. وهذا يثبت انه لا يمكن استبدال الحلقة الجزئية المثالية باي حلقة جزئية عند تكوين الحلقات الكسرية.

لقد حاولنا إعطاء فكرة كاملة عن الأشياء التي سوف يحتاج اليها من نظرية الزمر والحلقات. ونريد أن نؤكد أنه في التحليل، كما في الجبر، على الفرد ان يكون مستعداً للتحقق من كون أية فكرة جديدة تطرح ذات بنية جبرية.

فعلى سبيل المثال اذا عرفنا المتسلسلات المتقاربة للمرة الاولى، فعلى الفرد ان يسأل هل يمكن جعل مجموعة جميع المتسلسلات المتقاربة زمرة أوحلقة. وأيضاً هل هناك زمر جزئية أو حلقات جزئية مثالية، وهل يمكن جعل هذا النظام الجديد يشاكل نظاماً معروفاً؟ (وفي هذه الحالة لا يكون النظام في الواقع جديداً).

وهناك ثلاث بنى جبرية يتكرر استعمالها في التحليل هي الحقول والفضاءات الخطية والجبريات. وعلى القارىء ان يلاحظ محتويات فرضيات هذه البنى الآن حيث ستطرح في فصول لاحقة أمثلة طبيعية لها.

الحقل

يعرف الحقل (ح ، + ، ٠) على أنه حلقة تبديلية لها صفر «٠» وعنصر محايد ١ ≠ ٠ ،

بحيث انه لكل عنصر $أ \neq ٠$ يوجد نظير ضربي $\hat{أ} \in ح$. ونكتب عادة $\hat{أ} = أ^{-١}$ لهذا فإن $أ أ^{-١} = أ^{-١} أ = ١$.

وفي الحقول المجردة لا علاقة للصفر والعنصر المحايد بالعددين العاديين ٠ ، ١ لكننا سنستعمل هذين الرمزين لأن اهتمامنا سينحصر في حقل الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة حيث يكون ٠ ، ١ هما صفر الحقل والعنصر المحايد على التوالي.

الفضاء الخطي:

لتكن سـ = { س ، ص ، . . . } زمرة تبديلية مع عملية الجمع + وليكن ح = { أ ، ب ، جـ ، . . . } حقلا صفره ٠ وعنصره المحايد ١ .

فالفضاء الخطي سـ على الحقل ح هو الرباعي المرتب (سـ ، ح ، + ، ٠) حيث العملية ٠ معرفة من ح × سـ الى سـ وحيث

١) ١ ٠ س = س
٢) أ ٠ (س + ص) = أ ٠ س + أ ٠ ص
٣) (أ + ب) ٠ س = أ ٠ س + ب ٠ س
٤) أ ٠ (ب ٠ س) = (أب) ٠ س

وفي الفضاء الخطي نسمي عناصر سـ بالمتجهات وعناصر ح بالاعداد. لاحظ أنه في (٤) نستخدم عملية الضرب أب في الحقل وكذلك عملية ٠ التي تسمى الضرب العددي في أ٠س ، الخ. والعنصر المحايد في (سـ ، +) يرمز له بالرمز صـ ويسمى المتجه الصفري.

الجبريات:

الجبرية هي عبارة عن فضاء خطي سـ على حقل ح بالاضافة الى عملية ضرب على سـ يرمز لها بـ س ص حيث س ص $\in$ سـ لكل س ، ص $\in$ سـ.

وحيث تتحقق الشروط التالية

١) (س ص) ع = س (ص ع)

٢) س (ص + ع) = س ص + س ع

٣) (س + ص) ع = س ع + ص ع

٤) أ ٠ (س ص) = (أ ٠ س) ص = س (أ ٠ ص)

إذا كانت س ص = ص س فان الجبرية تسمى جبرية تبديلية ويستغنى عن الشرط (٣) لانه ينتج من (٢).

واذا وجد عنصر و ∋ سہ بحيث ان و س = س و = س لكل س ∋ سہ فان و يدعى عنصر الجبرية المحايد. وهذا العنصر المحايد وحيد لأنه اذا كان وَ عنصراً محايداً آخر فان وَ = وَ و = و.

وفكرة الاقتران المحافظ والتشاكل في الحلقات والحقول وما الى ذلك، مشابهة لنفس الفكرة في الزمر. وما نطلبه بشكل أساسي هو اقتران محافظ بين حلقتين اوحقلين وما الى ذلك. ثم يعرف التشاكل على انه اقتران محافظ تقابلي. لهذا فإن اقتران ق : سہ ← سَہ بين حلقتين سہ ، سَہ يعرف على أنه اقتران محافظ اذا وفقط اذا كان ق (س + ص) = ق (س) + ق (ص)، وَ ق (س ٠ ص) = ق (س) ٠ ق (ص) لكل س ، ص ∋ سہ .

ونفس هذا التعريف يمكن تطبيقه على الحقول لأن الحقل هو حالة خاصة من الحلقة.

وبطريقة مشابهة اذا كان سہ ، سَہ فضائين خطيين على نفس الحقل ح فان الاقتران ق : سہ ← سَہ يسمى اقتراناً محافظاً اذا وفقط اذا كان:

ق (س +ص) = ق (س) + ق (ص) لكل س ، ص ∋ سہ ، (١٠)

ق (أ س) = أ ق (س) لكل أ ∋ ح ولكل س ∋ سہ (١١)

وفي العادة نجمع (١٠) و (١١) في شرط واحد هو التالي:

ق (أ س + ب ص) = أ ق (س) + ب ق (ص) لكل أ ، ب ∋ ح وس ، ص ∋ سہ (١٢)

والاقتران المحافظ للفضاء الخطي ، اي الاقتران الذي يحقق (١٢)، يسمى عادة اقترانا

خطيا (او مؤثرا خطيا).

وأخيرا اذا كانت سـ ، سـَ جبريتين على نفس الحقل ح فان ق : سـ ← سـَ يسمى اقترانا محافظا اذا وفقط اذا كان

ق (أ س + ب ص) = أ ق (س) + ب ق (ص)

وكذلك ق (س ص) = ق (س) ق (ص) لكل أ، ب ∈ ح ولكل س، ص ∈ سـ.

تمارين (١ - ٣)

في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض هذه التمارين

١ - (وحدانية العنصر المحايد والنظير)

اذا كان مـ$_١$ ، مـ$_٢$ عنصرين محايدين في (ز ، ✻) فاثبت ان مـ$_١$ = مـ$_٢$. واذا كان س ∈ ز، ص ∈ ز بحيث ان س ص = مـ فاثبت ان ص = سَ.

٢ - لنفرض ان (ز ، ✻) هي زمرة مع عملية الضرب اي ان س ✻ ص = س • ص = س ص، وَ سَ = س$^{-١}$. اثبت ان (س$^{-١}$)$^{-١}$ = س، وَ (س ص)$^{-١}$ = ص$^{-١}$ س$^{-١}$. لاحظ ان (س ص)$^{-١}$ ≠ س$^{-١}$ ص$^{-١}$ الا اذا كانت ز تبديلية.

٣ - لتكن (ز ، ✻) كما في السؤال (٢)، اكتب س^٢ لتعني س • س فاذا كان س، ص ∈ ز بحيث ان س^٢ = ص^٢ = (س ص)^٢ = مـ فاثبت ان س ص = ص س .

٤ - خذ عددا صحيحا ثابتا ن ∈ Z، وعرف س ✻ ص = س + ص − ن لكل س، ص ∈ Z .
اثبت ان (Z ، ✻) هي زمرة تبديلية . ما هو العنصر المحايد وما هو سَ ؟

٥ - لنفرض ان (ز ، ✻) زمرة . عرف عملية □ على الضرب الديكارتي ز × ز بـ (أ ، ب) □ (جـ ، د) = (أ ✻ جـ، ب ✻ د) لكل أ ، ب ، جـ ، د ∈ ز. اثبت ان (ز × ز، □) زمرة.

٦ - لتكن R مجموعة الاعداد الحقيقية، *R مجموعة الاعداد الحقيقية ما عدا الصفر. عرف ✻ على *R × R بـ (أ ، ب) ✻ (جـ ، د) = (أ جـ ، ب جـ + د) وهكذا فان أ ، جـ عددان غير الصفر.

اثبت ان ($R^* \times R$ ، ✱) هي زمرة. ما هو العنصر المحايد؟.

اثبت كذلك ان { (١ ، ب)| ب ∋ R } هي زمرة جزئية من ($\times R$ ، ✱).

٧ ـ لتكن سہ المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣} ولتكن سہ (٣) مجموعة اقترانات التقابل من سہ الى سہ واليك على سبيل المثال عنصرين من عناصر سہ (٣) هما ق$_١$(المعرف بـ ق$_١$(١) = ٢ ، ق$_١$ (٢) = ٣، ق$_١$ (٣) = ١)وَق$_٢$(المعرف بـ ق$_٢$ (١) = ٣، ق$_٢$ (٢) = ١ ، ق$_٢$ (٣) = ٢). يمكن التعبير عن ق$_١$، ق$_٢$ كما يلي:

$$ق_١ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix} \qquad ق_٢ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

تسمى عناصر سہ (٣) عادة تبديلات سہ وتسمى ايضا سہ (٣) الزمرة المتماثلة من الدرجة الثالثة. ويوجد في سہ (٣) ستة عناصر، اي انها مجموعة من الرتبة ٦.

وهذه العناصر هي ق$_١$ ، ق$_٢$ اعلاه وَ :

$$ق_٠ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} ، \quad ق_٣ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

$$ق_٤ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix} ، \quad ق_٥ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$$

نعرف العملية الثنائية على سہ (٣) بتركيب الاقترانات فعلى سبيل المثال ق$_١$ ∘ ق$_٢$ (٢) = ق$_١$ (ق$_٢$ (٢)) = ق$_١$ (١) = ٢ . اكتب جدول الزمرة سہ (٣)، لاحظ انها ليست تبديلية فمثلا ق$_٣$ ∘ ق$_١$ = ق$_٤$ ولكن ق$_١$ ∘ ق$_٣$ = ق$_٥$.

٨ ـ ليكن ق : (ز ، ✱) ⟵ (ي ، □) اقترانا محافظا، فاذا كان مـ هو العنصر المحايد في ز فاثبت ان ق (مـ) هو العنصر المحايد في ى.

٩ ـ اثبت ان الزمرتين (Z ، +) ، (ز ، ٠) في المثال ٣٤ غير متشاكلتين ارشاد : لنفرض انه يوجد تشاكل ق : (Z ، +) ← (ز ، ٠) فاذن يوجد س ، ص $\in$ Z بحيث ان ق (س) = ١ ، ق (ص) = -١ . لنأخذ الآن ن $\in$ Z بحيث ان ن ≠ س وَن ≠ ص . اعتبر ق (ن) وتوصل الى تناقض .

١٠ ـ اثبت ان (Q^+ ، ٠) هي زمرة جزئية من (R^+ ، ٠) .

هل يمكن ان يكون لِـ (R^+ ، ٠) زمرة جزئية منتهية بخلاف الزمرة { ١ } .

١١ ـ اثبت انـه في اي حلقـة صـ س = س صـ = صـ ، (-س) ص = س (-ص) = - س ص وكـذلـك (-س) (-ص) = س ص .

١٢ ـ [نظـريـة ذات الحـدين] : في اي حلقـة اكتب ٢س = س + س ، ٣س = ٢س + س . . . الخ . وس^{٢} = س ٠ س ، س^{٣} = س ٠ س^{٢} . . . وهكذا ، كمثال (س + ص)^{٢} = (س + ص) س + (س + ص) ص = س^{٢} + ص س + س ص + ص^{٢} .

اذا كان س ص = ص س فان (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} .

وبشكل عام اذا كان س ص = ص س نحصل على نظرية ذات الحدين الهامة :

$$(س + ص)^{ن} = س^{ن} + \binom{ن}{١} س^{ن-١} ص + \binom{ن}{٢} س^{ن-٢} ص^{٢} + \ldots + ص^{ن}$$

حيث ن $\in$ N و $\binom{ن}{ر}$ هي معامل ذات الحدين ويعرف بـ $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$ حيث ن! = ١ × ٢ × ٣ . . . ×ن . ونعتبر (٠)! = ١ . يمكن كتـابـة نظـريـة ذات الحـدين باستخدام الحرف

الاغريقي $\sum$ (سيجما) مقلوبا ، اشارة للمجموع

$$(س + ص)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} س^{ن-ر} ص^{ر}$$

حيث $\sum_{ر=٠}^{ن}$ تعني اننا نضع ر = ٠ ، ١ ، . . . ، ن بالتتابع ثم نجمع النتائج .

استخدمنا ايضاً $س^{ن-صفر} ص^{صفر} = س^{ن} ، س^{ن-ن} ص^{ن} = ص^{ن}$

يمكن اثبات نظرية ذات الحدين بطريقة الاستقراء الرياضي على ن . وسنشرح هذه الطريقة بالتفصيل فيما بعد .

يمكن ايجاد معاملات ذات الحدين لـ س + ص، $(س + ص)^{٢}$ ، $(س + ص)^{٣}$ ، $(س + ص)^{٤}$ ، $(س + ص)^{٥}$ ، . . . من الشكل التالي (المعروف بمثلث باسكال)

١ ١

١ ٢ ١

١ ٣ ٣ ١

١ ٤ ٦ ٤ ١

١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

١٣ ـ [حلقة المصفوفات ٢ × ٢]

لتكن سه حلقة لها عنصر محايد و. ولنفرض ان $م_{٢}$ (سه) هي مجموعة المصفوفات من الرتبة ٢ × ٢ التي مدخلاتها من سه: وكل عنصر أ ∈ $م_{٢}$ (سه) هو المصفوفة :

$$أ = \begin{pmatrix} أ_{١} & أ_{٢} \\ أ_{٣} & أ_{٤} \end{pmatrix}$$

حيث $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، $أ_{٤}$ ، ∈ سه .

نعرف أ = ب اذا وفقط اذا كان $أ_{ر} = ب_{ر}$ ، ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ونعرف الجمع على $م_{٢}$ (سه) بالمصفوفة :

$$أ + ب = \begin{pmatrix} أ_{١} + ب_{١} & أ_{٢} + ب_{٢} \\ أ_{٣} + ب_{٣} & أ_{٤} + ب_{٤} \end{pmatrix}$$

والضرب على $م_2$ (سه) بالمصفوفة

$$أب = \begin{pmatrix} أ_1 ب_1 + أ_2 ب_3 & أ_1 ب_2 + أ_2 ب_4 \\ أ_3 ب_1 + أ_4 ب_3 & أ_3 ب_2 + أ_4 ب_4 \end{pmatrix}$$

اثبت ان $م_2$ (سه) هي حلقة صفرها هو $\begin{pmatrix} صـ & صـ \\ صـ & صـ \end{pmatrix}$

ويدعى بالمصفوفة الصفرية. وعنصرها المحايد هو $\begin{pmatrix} و & صـ \\ صـ & و \end{pmatrix}$

ويدعى المصفوفة الاحادية.

حلقة الاعداد الصحيحة Z تبديلية ولكن عند ضرب $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ﺅ

$\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ اثبت ان الحلقة $م_2$ (Z) غير تبديلية.

١٤ ـ اثبت ان الحلقة $م_2$ (R) (انظر التمرين ١٣) ليست حقلا. واذا كانت ع هي المجموعة الجزئية من $م_2$ (R) التي تتكون من المصفوفات التي

على شكل $\begin{pmatrix} أ & ب \\ -ب & أ \end{pmatrix}$

حيث أ ، ب $\in$ R ،اثبت ان ع حقل.

اعتبر الاقتران ق : $\mathbb{C} \leftarrow$ ع المعرف بـ

ق (س + ت ص) = $\begin{pmatrix} س & ص \\ -ص & س \end{pmatrix}$ واثبت ان ع متشاكل مع حقل الاعداد المركبة $\mathbb{C}$

١٥ ـ لنأخذ المجموعة الجزئية Q ($\sqrt{٢}$) من R حيث Q ($\sqrt{٢}$) = { أ + ب $\sqrt{٢}$ | أ ، ب ∈ Q }

. اثبت ان Q ($\sqrt{٢}$) هي حقل تحت عملية الضرب والجمع في R . اي ان Q ($\sqrt{٢}$) هي حقل جزئي من R .

١٦ ـ اذا كان سى حقلا جزئياً من Q فاثبت ان Q = سى.

١٧ ـ ثبت ن ∈ N . كما عرفنا من قبل فان $R^{ن}$ هي مجموعة النونيات الحقيقية المرتبة س = ($س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$) حيث $س_ر$ ∈ R وهكذا على سبيل المثال فان (١ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، . . . ، $\sqrt{ن}$) ∈ $R^{ن}$. لـ س ، ص ∈ $R^{ن}$، أ ∈ R عرف

س + ص = ($س_١$ + $ص_١$ ، $س_٢$ + $ص_٢$ ، . . . ، $س_ن$+$ص_ن$)

أس = ($أس_١$ ، $أس_٢$ ، . . . ، $أس_ن$).

تحت هذه العمليات،+ و ·،اثبت ان $R^{ن}$ هو فضاء خطي حقيقي،اي فضاء خطي على R . ما المتجه الصفري هنا وما هو −س ؟

١٨ ـ في التمرين ١٧:لنفرض ان ن = ٣، ولنفرض ان أ = (−١ ، ٠ ، ٢)، ب = (٤ ، ٥ ، ٢). حل المعادلة ٦أ + ٥س = ب في الفضاء الخطي الحقيقي $R^{٣}$.

١٩ ـ عرف ق : $R^{٣}$ ⟵ $R^{٣}$ بـ ق (س) = ($س_٢$ ، −$س_١$ ، $س_٣$) حيث س = ($س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$). اثبت ان ق تشاكل من الفضاء الخطي $R^{٣}$ الى نفسه.

٢٠ ـ باستخدام العمليات المعرفة في التمرين ١٧ تعرف ان $R^{ن}$ هو فضاء خطي حقيقي. الآن س = ($س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$)،ص = ($ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . ، $ص_ن$) في $R^{ن}$ عرف الضرب س ص = ($س_١$ $ص_١$ ، $س_٢$ $ص_٢$ ، . . . ، $س_ن$ $ص_ن$)

.

اثبت ان $R^{ن}$ هي جبرية تبديلية حقيقية ولها عنصر محايد و[ما هو؟]. اذا كانت ن > ١ . جد عنصراً س ≠ و في $R^{ن}$ بحيث ان س ص ≠ و لكل ص ∈ $R^{ن}$

٢١ ـ لتكن سى جبرية على الحقل ℂ ، حيث سى ليس لها عنصر محايد. اعتبر الضرب

الديكارتي صہ = $\mathbb{C}$ × سہ. اثبت ان صہ تصبح فراغا خطيا على $\mathbb{C}$، اذا اخذنا التعريف

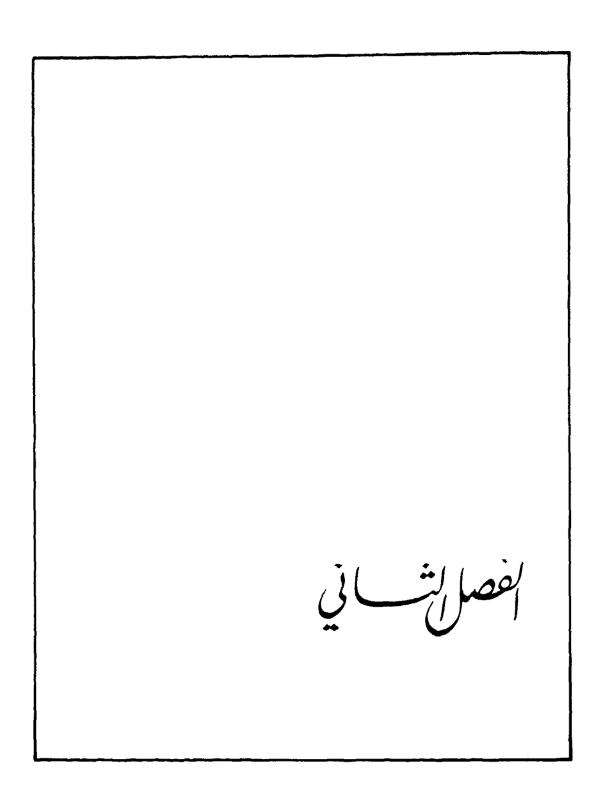
ص + صَ = (أ + أَ ، س + سَ)، وَ ب • (أ ، س) = (ب أ ، ب•س)

حيث ص = (أ ، س) ∈ صہ، الخ،وب ∈ $\mathbb{C}$.

عرف الآن عملية ضرب على صہ كما يلي :

(أ ، س) (أَ ، سَ) = (أأَ ، أسَ + أَس + س سَ)

اثبت ان صہ هي جبرية لها عنصر محايد،و[ما هو ؟] .



الفصل الثاني

انظمة الاعداد

١ ـ الاعداد الطبيعية

يجب ان تحتوي اي مقدمة للتحليل الرياضي على مناقشة حقل الاعداد الحقيقية R . هذا لأن التحليل الاولي يناقش انواعاً مختلفة من الاقترانات (الاقترانات المتصلة والاقترانات القـابلة للاشتقـاق الـخ) التي هي اقـترانـات من R الى R اي انها اقترانات في متغير حقيقي وتأخـذ قيـماً حقيقيـة . ولـدراسـة المـوضوع بطريقة صحيحة يجب ان نعرف ان R هو حقل تام ومرتب كليا (انظر الفصل الثالث ـ البند الاول)، وكثير من المؤلفين يبدأون بفرض معرفة ذلك ويفـترضـون ايضـاً ان الطالب على معرفة ببعض خواص الاعداد الطبيعية N = { ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . } و الاعداد الصحيحة Z = { ٠ ، ١ ، -١ ، ٢ ، -٢ ، . . . } والاعـداد النسبيـة (الاعـداد الكسـريـة) مثـل $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٧}{٥}$.

ونستخدم الرموز N , Z , Q , R في هذا الكتاب، واستخدام الحرف Z للدلالة على الاعداد الصحيحة جاء من الكلمة الالمانية Zahlen التي تعني اعداداً صحيحة، وهذا يشير بطريقة

بسيطة الى المساهمة الكبيرة للرياضيين الالمان في موضوع التحليل.

هناك طريقة اخرى لدراسة التحليل هي افتراض المعرفة بـ N , Z , Q ثم بناء R عادة باستخدام طريقة مقاطع «ديدكاند».هذه الطريقة مستخدمةعلى سبيل المثال في كتاب هاردي المعروف وعلى اي شخص يرغب في دراسة هذا الاسلوب ان يقرأ البحث الأصيل للعالم الالماني الشهير ريتشارد ديدكاند (١٨٣١ ـ ١٩١٦). هذا البحث مترجم الى الانكليزية وفيه يلاحظ الفرد وضوح طريقة العرض التي قدمها ديدكاند ويشاهد احدى الحلقات الهامة في الابداع الرياضي في القرن التاسع عشر. ونحن ننوي البدء من مستوى اقل إذ سنبدأ بمجموعة مسلمات لِـ N ثم نبني بالتتابع $\bar{Z}$, $\bar{Q}$ و R . ومن ثم نبني حقل الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ في البند ٦ ، هذا أمر سهل عندما نفترض وجود $\bar{R}$. وسنرى ان الانتقال من N الى Z ومن Z الى Q ليس بتلك الصعوبة. والمشكلة الرئيسية هي الانتقال من Q الى R .

سنناقش الآن مسائل سهلة لتعطينا الحافز للوصول الى R :

لنفرض اننا نعرف انه لا يوجد س ∈ N بحيث س + ٢ = ١ ، اي انه لا حل لهذه المعادلة في N . لكننا ما زلنا نرغب في حل هذه المعادلة ومعادلات شبيهة ، لهذا علينا ان نوسع N بأن نقدم اشياء جديدة تكون فيها،بطريقة معرفة تماماً، حلولاً.

سندعو هذه الاشياء اعداداً صحيحة وسنرى ان مجموعة الاعداد الصحيحة Z هي حلقة. كذلك سنرى ان Z هي توسيع لِـ N ونعني بذلك انه يمكن النظر الى N على انها مجموعة جزئية من Z . في هذه الحلقة الجديدة Z سنجد حلول معادلات مثل س + أ = ب لكل أ ، ب ∈ Z .

وبالانتقال الى معادلات بسيطة مثل ٢س = ١ سنرى انه لا حل لها في $\bar{Z}$. ومرة ثانية نوسع Z لنحصل على Q ، حقل الاعداد النسبية. لاحظ ان Q هي حقل في حين ان Z هي حلقة فقط. في Q نجد حلول معادلات مثل أس = ب حيث أ ≠ صفر ، أ ، ب ∈ Q .

ولا حل للمعادلة س^{٢} = ٢ في $\bar{Q}$ ، لقد اثبت الاغريق القدامى هذه الحقيقة ، وسبَّبت لهم بعض الحرج.

تنشأ هذه المعادلة عند دراسة مثلث قائم الزاوية طول كل من قاعدته وارتفاعه الوحدة.

من نظرية فيثاغورس فان $س^{٢} = ١^{٢} + ١^{٢}$ حيث س هو طول الوتر. اى ان $س^{٢} = ٢$. بما ان الاغريق عرفوا الاعداد النسبية فقط فكل ما استطاعوا عمله هو ايجاد تقريب نسبي للحل. فعلى سبيل المثال $(\frac{٧}{٥})^{٢} < ٢ < (\frac{١٧}{١٢})^{٢}$ ، ومنه $\frac{٧}{٥}$ و$\frac{١٧}{١٢}$ هما تقريبان غير دقيقين للحل، من اعلى ومن أسفل.

سيبدو ان فكرة تقريب الحل يمكن ان تصل الى درجة كافية من الدقة (باستخدام متتاليات كوشي والمتتاليات التقاربية للاعداد النسبية) ليتم بناء R من Q . ولم يتم ذلك الا في القرن التاسع عشر على يد كانتور (١٨٤٥ ـ ١٩١٨).

وسوف نستخدم طريقة كانتور، باسلوب حديث. وما تفعله الطريقة هو دراسة مجموعتين من المتتاليات اللانهائية المكونة من عناصر في Q . فالمجموعة الاولى هي حلقة متتاليات كوشي ، سه، والثانية هي المثالية م المكونة من المتتاليات التي تقترب من الصفر. ومن ثم نكون الحلقة الكسرية سه/م. هذه الحلقة هي الاعداد الحقيقية R وهي حقل يحتوي على حل $س^{٢} = ٢$، وحيث Q تشاكل حقلا جزئياً من R .

سننهي هذه المقدمة بذكر انه لا حل للمعادلة التربيعية $س^{٢} + ١ =$ صفراً في R . هذا يهيء لبناء حقل الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث يوجد حل لهذه المعادلة. ونجد ان كل معادلة $أ_{٠} + أ_{١}س + \ldots + أ_{ن} س^{ن} =$ صفراً حيث $ن \in N$ لها حل في $\mathbb{C}$.

من هذا يتضح ان توسيع R الى $\mathbb{C}$ هو نهائي بمعنى ما.

وقبل ان نبدأ نذكر ان معالجتنا للاعداد الطبيعية ستكون بشكل مختصر وذلك لان اثبات جميع خواص N يستغرق وقتاً طويلاً (انظر كتاب لاندو . ننصح القاريء الذي لا يرغب في تأمل مسلمات N الخمس ان ينتقل الى نظرية ١ حيث ذكرنا خواص N التي نحتاج اليها.

مجموعة الاعداد الطبيعية N :

هي مجموعة غير خالية من اشياء تحقق المسلمات التالية، وتعرف باسم مسلمات بيانو

نسبة الى الرياضي الايطالي بيانو (١٨٥٨ ـ ١٩٣٢).

N_1 : يوجد عنصر في N يرمز له بالرمز ١ .

N_2 : يوجد اقتران ق : N ⟵ N يسمى الاقتران التالي.

نكتب ق(أ) = أَ لكل أ ∈ N

ندعو أَ تابع أ .

N_3 : أَ ≠ ١ لكل أ ∈ N

N_4 : الاقتران التالي هو واحد لواحد اي ان أَ = بَ تتضمن أ = ب

N_5 : (مسلمة الاستقراء): لتكن سہ مجموعة جزئية من N فاذا كان ١ ∈ سہ وأَ ∈ سہ لكل أ ∈ سہ فان سہ = N .ويمكن استنتاج علم الحساب من مسلمات بيانو الا ان الأمر صعب. وما سنحاول عمله هو ان نبين كيف يمكن الحصول على بعض خواص N الهامة.

من N_1 فان ١ ∈ N ومن N_3 فان ١ ≠ ١َ .

سنرمز لـ ١َ بالرمز ٢، لهذا فان ١ ≠ ٢ . من الطبيعي ان نفكر بـ ١ «كأول» عنصر في N وبـ ٢ «كثاني» عنصر. بما ان ٢ ∈ N فمن N_2 ينتج ان ٢َ ∈ N . من N_3 نحصل على ٢َ ≠ ١ . لو فرضنا ان ٢َ = ٢ فان N_4 تعطي ٢ = ١ وهذا يناقض ٢ ≠ ١ . اذن الفرض ٢َ = ٢ هو خطأ، لهذا فان ٢َ ≠ ٢ . سنرمز لـ ٢َ بالرمز ٣. لقد اثبتنا ان ١ ، ٢ ، ٣ هي ثلاثة عناصر مختلفة في N . وبمتابعة هذه الطريقة يمكن ان نكتب عناصر N بالطريقة المعتادة: ١ ، ٢ ، ٣ ، . . .

من مسلمات بيانو فقط يمكن اثبات انه يوجد اقتران ج : N X N ⟵ N بحيث ان ج(أ ، ١) = أَ لكل أ ∈ N وبحيث ج (أ ، بَ) = [حـ(أ ، ب)]َ . هذا الاقتران يسمى عملية الجمع ونكتب ج (أ ، ب) = أ + ب. اذن يمكن كتابة خاصيتي ج على شكل:

أ + ١ = أَ وأ + (ب + ١) = (أ + ب) + ١

من الواضح ان هذه النتائج تشكل اسس خاصية التجميع لعملية الجمع، اي ان أ + (ب +حـ) = (أ + ب) +حـ لكل أ ، ب ،حـ ∈ N . تجد البرهان في نظرية ١ .

وبعد ان تم التوصل الى عملية الجمع يمكن اثبات انه يوجد عملية ضرب وحيدة

بحيث ان

أ • ١ = أ   وَأ • بَ = أ • (ب + أ)

سوف نحذف النقطة ونكتب أ • ب = أ ب . وتفاصيل كيفية استنتاج عمليتي الجمع والضرب من مسلمات بيانو تجدها في كتاب لاندو.

وفكرة ترتيب بعض العناصر هي فكرة هامة في التحليل. ففي N نعرف الترتيب بان نقول أ > ب اذا وفقط اذا كانت أ = ب + حـ حيث حـ ∈ N . نقرأ «أ>ب» «أ اكبر من ب» ويكافيء ذلك «ب أقل من أ» تكتب ايضاً «ب < أ»، لهذا فان أ > ب و ب < أ هما طريقتان مختلفتان لكتابة نفس الشيء. أ ≥ ب تعني أ > ب أو أ = ب. لهذا يمكن ان نقول ١ ≥ ١ و ٢ ≥ ١.

والنظرية التالية تلخص خواص عديدة وهامة لِـ N . ودراسة البراهين المقدمة مهمة ولكنها ليست ضرورية لفهم ما يأتي بعدها.

النظرية ١ : لتكن أ ، ب ، جـ عناصر في N . فان

١) (أ + ب) + جـ = أ + (ب + حـ) و (أب) حـ = أ (ب حـ).

٢) أ + ب = ب + أ و أ ب = ب أ.

٣) أ (ب + حـ) = أ ب + أ حـ.

٤) اذا كان أ + ب = أ + حـ فان ب = حـ.

٥) اذا كان أ ب = أ حـ فان ب = حـ.

٦) (قانون التثليث): لأي أ ، ب تتحقق واحدة وواحدة فقط من الحالات الثلاث التالية:

أ = ب أو أ > ب أو ب > أ

٧) أ ≥ ١ لكل أ ∈ N .

٨) اذا كان أ < ب وَب < حـ فان أ < حـ.

٩) اذا كان أ > ب فان أ + حـ > ب + حـ وَأ حـ > ب حـ .

١٠) اذا كان أ > ب فان أ ≥ ب + ١ أي ان

أ > ب + ١ أو أ = ب + ١

١١) خاصية الترتيب الحسن

كل مجموعة جزئية غير خالية س من N تحتوي على اصغر عنصر. اي انه يوجد عنصر ص ∈ N بحيث ان ص ≤ أ لكل أ ∈ س.

البرهان: سنقدم عينة من البراهين

لنأخذ العبارة الاولى في ١) وهي خاصية التجميع للجمع؛ لنثبّت أ ، ب ولنفرض ان س = { حـ ∈ N | (أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) } الآن (أ + ب) + ١ = أ + (ب + ١) هي احدى خواص +، لهذا فان ١ ∈ س. لنفرض ان حـ ∈ س. اذن

(أ + ب) + حَـ = ((أ +ب) + حـ)َ = (أ + (ب + حـ))َ

= أ + (ب + حـ)َ = أ + (ب + حَـ) لهذا فان حَـ ∈ س.

من N ٥، مسلمة الاستقراء، نجد ان س = N . لهذا فان حـ ∈ N تعطي حـ ∈ س اي ان (أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) لكل حـ ∈ N .

الآن نبرهن ٤). لنفرض ان أ + ب = أ + حـ ولكن ب ≠ حـ. لنفرض ان س = { أ ∈ N | أ + ب ≠ أ + حـ } . من N ٤ نحصل على بَ ≠ حَـ، اي ان ب + ١ ≠ حـ + ١ . لهذا فان ١ ∈ س. لنفرض ان أ ∈ س. اذن أ +ب ≠ أ + حـ. ومنه (أ + ب)َ ≠ (أ + حـ)َ فاذن أَ + ب ≠ أَ + حـ، اي ان أَ ∈ س. ومن N ٥، فان أ + ب ≠ أ + حـ لكل أ ∈ N . وهذا يناقض الفرض أ + ب = أ + حـ. لهذا يجب ان يكون ب = حـ.

وكعينة اخيرة سنبرهن ٨): اذا كان أ > ب فان ب = أ + د. واذا كان ب > جـ فان حـ = ب + و. ومن ١) حـ = (أ + د) + و = أ + (ب + و). وهذا يعطي أ > حـ.

قد يكون القاريء على معرفة بمسلمة الاستقراء بصورة مكافئة. وهي: اذا كانت ج(ن) جملة مفتوحة تعتمد على ن ∈ N واذا كانت ج (١) صحيحه . وكانت ج (ن + ١) صحيحة عندما تكون ج (ن) صحيحة، فان ج (ن) تكون صحيحة لكل ن ∈ N .

من الآن فصاعداً سنفرض ان معنى $أ^{ن}$ معروف حيث أ ، ن ∈ N . سنعرف $أ^{٢}$ = أ • أ و $أ^{٣}$ = أ • $أ^{٢}$ الخ، ولكننا بحاجة لاستخدام N ٥ لاثبات وجود اقتران وحيد، ق، بحيث ان ق (ن + ١) = أ ق(ن) لكل ن ∈ N ، اي ان ق(ن) = $أ^{ن}$، حيث $أ^{١}$ تعني أ.

المثال ١ .

لنثبت باستعمال الاستقراء ان $٢^{ن} >$ ن لكل ن $\in$ N .

لنفــرض ان ج (ن) هي الجملة المفتــوحــة $٢^{ن} >$ ن . الآن $٢^{١} = ٢ > ١$ إذن ج (١) صحيحــة . لنفـرض ان ج (ن) صحيحـة . فالجـزء (٩) من النظـريـة ١ يعطي $٢^{ن+١} > ٢$ن . لكن تعريف الضرب يعطي ن ٠ ١َ = ن ٠ ١ + ن ومنه ٢ن = ن + ن . من الجزء (٧) من النظرية ١ نحصل على ن $\leqslant$ ١ لهذا فباستخدام (٩) من النظرية ، نحصل على ن + ن $\leqslant$ ن + ١ . لهذا فان $٢^{ن+١} > ٢$ن ، و ٢ن $\leqslant$ ن + ١ وهذا يعطي $٢^{ن+١} >$ ن + ١ من الجزء (٨) النظرية ١ . هذا يثبت ج (ن + ١) صحيحة ومن الاستقراء نستنتج ان ج (ن) صحيحة لكل ن $\in$ N ، اي ان $٢^{ن} >$ ن لكل ن $\in$ N .

المثال ٢

باستعمال الاستقراء يمكن اثبات ان اي عدد طبيعي يكون اما زوجياً او فردياً ولا يمكن ان يكون الاثنين ، اي انه يمكن كتابة اي أ اما على صورة أ = ٢ن لعنصر ما ن $\in$ N ، واما على صورة أ = ٢م + ١ لعنصر ما م $\in$ N الا عنـدمـا يكـون أ = ١ . سنعتـبر العـدد ١ عدداً فرديــاً . سنثبت الآن انــه لا يوجـد أ ، ب $\in$ N بحيث ان $أ^{٢} = ٢ب^{٢}$. (بـاستخـدام فكـرة الاعداد النسبية فان هذا سيثبت انه لا يوجد حل موجب على صورة $\frac{أ}{ب}$ للمعادلة $س^{٢} = ٢$) .

لنفـرض أنـه يوجـد أ ، ب $\in$ N بحيث ان $أ^{٢} = ٢ب^{٢}$. من الـواضح ان أ $>$ ١ . فإذا كان أ فردياً فان أ = ٢م + ١ ومنه $٤م^{٢} + ٤م + ١ = ٢ب^{٢}$ وهذا مستحيل . اذن يجب ان يكون أ زوجياً ، أ = ٢حـ . لهذا فان $(٢حـ)^{٢} = ٢ب^{٢}$ ومنه $٢حـ^{٢} = ب^{٢}$ ومنه نستنتج ان ب زوجي ، ب = ٢د . لنأخذ الجملة المفتوحة ج (ن) التي تنص على ان أ = $٢^{ن}$ و، ب = $٢^{ن}$ ر لعنصرين: ما و ، ر $\in$ N . لقد اثبتنا ان ج (١) صحيحة . لنفرض ان ج (ن) صحيحة . اذن أ = $٢^{ن}$ و ، ب = $٢^{ن}$ ر ، $أ^{٢} = ٢ب^{٢}$. وهذا يعطي $و^{٢} = ٢ر^{٢}$ ومنه نستنتج ان و، رهما عددان زوجيان ، و= ٢ل ، ر= ٢ي . وهذا يعطي أ = $٢^{ن+١}$ ل، ب = $٢^{ن+١}$ ي ، ومنه نستنتج ان ج (ن + ١) صحيحة . ومن

الاستقراء ينتج ان أ = ٢^{ن} و، لكل ن $\in$ N . وبشكل خاص فان أ = ٢^{أ}ولعنصر ما، و $\in \bar{N}$
ولكننا اثبتنا في المثال ١ أن ٢^{أ} > أوبما ان و ≥ ١، نحصل على أ = ٢^{أ}و ≥ ٢^{أ} > أ. وهذا
تناقض لان أ = أ ولا يمكن ان يكون أ > أ، من الجزء ٦) من النظرية ١. اذن لا يوجد أ ، ب
$\in \bar{N}$ بحيث ان أ^{٢} = ٢ب^{٢}.

تمارين ٢ ـ ١

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض هذه التمارين)

١ ـ باستخدام مسلمة الاستقراء على
سه = { أ $\in$ N | أ ≥ ١ } ، اثبت ان أ ≥ ١ لكل أ $\in$ N.

٢ ـ اثبت خاصية الترتيب الحسن، (١١)، من النظرية ١.
كارشاد : اعتبر ي = { أ | أ ≤ كل عنصر من سه } .

٣ ـ بدراسة سه = { ١ } $\cup$ { أ | أ = ٢ب أو أ = ٢ب + ١ }
اثبت ان كل عدد طبيعي يكون اما زوجياً واما فردياً
اثبت انه من المستحيل ان يكون ٢أ = ٢ب + ١

٤ ـ اثبت انه لا يوجد ن $\in$ N بحيث ان ١ < ن < ٢

٥ ـ اثبت ان ٢ (١ + ٢ + ٣ + . . . + ن) = ن (ن + ١) لكل ن $\in$ N .

٦ ـ ثبّت أ $\in \bar{N}$. اثبت ان (١ + أ)^{ن} ≥ ١ + ن أ لكل ن $\in$ N .

٧ ـ هناك صورة ساذجة للاستقراء تنص على انه اذا كانت ج (ن) صحيحة لِـ ن = ١ ، ٢ ، . . . (الى ان يتعب الفرد من التحقق) فان ج (ن) صحيحة لكل ن $\in \bar{N}$. ادرس هذا على ج (ن) المعطاة بِـ ٢^{ن} < (ن + ١)^{٣}.

٨ ـ اثبت ان ٢أب ≤ أ^{٢} + ب^{٢} لكل أ ، ب $\in$ N .
اذا كان أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، . . . ، أ$_{ن}$ ، ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، . . . ، ب$_{ن}$ $\in$ N

اثبت باستخدام الاستقراء ان

$(أ_1 ب_1 + أ_2 ب_2 + ... + أ_ن ب_ن)^2 \leqslant (أ_1^2 + ... + أ_ن^2)(ب_1^2 + ... + ب_ن^2)$.

٩ ـ نقول ان $أ \in N$ يقبل القسمة على $ب \in N$ اذا كان أ = ب حـ لعنصر ما $حـ \in N$.

اثبت ان ن $(ن^2 + ٥)$ يقبل القسمة على ٦ لكل $ن \in N$.

١٠ ـ اثبت انه لا يوجد أ ، $ب \in N$ بحيث ان $أ^2 = ٣ب^2$.

٢ ـ الاعداد الصحيحة

سوف نبين الآن كيف نبني الاعداد الصحيحة Z من الاعداد الطبيعية N : لنأخذ N X N ولنرمز لعناصرها بـ (أ ، ب)، (حـ ، د) الخ، حيث أ ، ب ، حـ ، $د \in N$. ولنعرف العلاقة ~ على N X N كما يلي:

(أ ، ب) ~ (حـ ، د) اذا وفقط اذا كان أ + د = ب + حـ . . . (١)

سنثبت في النظرية ٢ ان ~ هي علاقة تكافؤ . سنبسط الرموز بان نكتب [أ ، ب] = $ك_{(أ،ب)}$ ، حيث $ك_{(أ،ب)}$ هو صف التكافؤ الذي يحتوي على (أ ، ب).

يسمى كل صف تكافؤ عدداً صحيحاً، وترمز Z الى مجموعة صفوف التكافؤ هذه.

ونعرف عمليات الجمع والضرب على Z كالتالي

[أ ، ب] + [حـ ، د] = [أ + حـ ، ب + د] . . . . (٢)

[أ ، ب] × [حـ ، د] = [أحـ + ب د ، أد + ب حـ] . . . . (٣)

والنتيجة التالية تثبت ان (Z ، + ، ×) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد.

النظرية ٢ : استناداً الى العمليات المعرفة في (٢) ، (٣) تصبح Z حلقة تبديلية ذات عنصر محايد، وصفرها هو[١ ، ١] ويرمز له بالرمز ٠ ، والعنصر المحايد هو[٢ ، ١] ويرمز له بالرمز ١ (سنعرف السبب فيما بعد) .كما ان قانون الاختزال يتحقق في Z :

أ × ب = حـ × ب ، ب ≠ ٠ تعطي أ = حـ .

البرهان

البرهان مباشر ولكنه يكون مملاً اذا كتب بجميع تفاصيله . فسنثبت بعض النتائج ونترك الباقي كتمارين : اولا نثبت ان (١) تعرف علاقة تكافؤ : بما ان أ + ب = ب + أ فان (أ ، ب) ~ (أ ، ب). الآن اذا كان (أ ، ب) ~ (جـ ، د) فان أ + د = ب + حـ ومنه حـ + ب = د + أ اي ان (حـ ، د) ~ (أ ، ب). واخيراً، لنفرض ان (أ ، ب) ~ (حـ ، د) و(حـ ، د) ~ (ي ، ر). اذن أ + د = ب + حـ ، حـ + ر = د + ي
وباستخدام خواص الاعداد الطبيعية المعروفة (النظرية ١) نحصل على أ + د + حـ + ر = ب + حـ + د + ي. لهذا فان أ + ر = ب + ي اي ان (أ ، ب) ~ (ى ، ر).
اذن ~ هي علاقة تكافؤ على N X N .
يجب ان نثبت ان العمليتين (٢) ، (٣) صحيحتا التعريف. سوف نتحقق من (٢) فقط .وذلك بان نثبت انه اذا كان [أ ، ب] = [أَ ، بَ] و[حـ ، د] = [حَـ ، دَ] فان
[أ + حـ ، ب + د] = [أَ + حَـ ، بَ + دَ].
الآن اذا كان أ + بَ = ب + أَ و حـ + دَ = د + حَـ فان
أ + حـ + بَ + دَ = ب + د + أَ + حَـ، ومنه
(أ + حـ ، ب + د) ~ (أَ + حَـ ، بَ + دَ). ولهذا فان [أ + حـ ، ب + د] = [أَ + حَـ ، بَ +دَ].

وتنتج خاصيتا الجمع والتبديل على (Z ، +) بسهولة من (٢) ومن الخواص المشابهة على (N ، +).

والصفر في (Z ، +) هو[١ ، ١] لان
[أ ، ب] + [١ ، ١] = [أ + ١ ، ب + ١] من (٢).وكذلك فإن
[أ + ١ ، ب + ١] = [أ ، ب] من (١). اذن وبكتابة ٠ = [١ ، ١] نحصل على [أ ، ب] + ٠ = [أ ، ب].
بما ان [أ ، ب] + [ب ، أ] = [أ + ب ، ب + أ] = [١ ، ١] = ٠ ،

نجد ان [ب ، أ] هو نظير [أ ، ب]. لهذا اذا كان حـ = [أ ، ب] عدداً صحيحاً فان -حـ = [ب ، أ] وحـ + (-حـ) = ٠ ونكتب هذه العبارة الاخيرة على صورة حـ - حـ = ٠

باستخدام (٣) و(١) من السهل ان نرى ان [٢ ، ١] هو العنصر المحايد لعملية الضرب. اي ان [أ ، ب] × [٢ ، ١] = [أ ، ب].

والتأكد من باقي شروط الحلقة لـ Z هو تمرين سهل. سنثبت الآن خاصية الاختزال (٤):

لنفرض ان س = [أ ، ب] ، ص = [أَ ، بَ] ، ع = [حـ ، د]. اذن س ع = ص ع تعطي:

[أ حـ + ب د ، أد + ب حـ] = [أَ حـ + بَ د ، أَد + بَ حـ] ،

أ حـ + ب د + أَد + بَ حـ = أد + ب حـ + أَحـ + بَ د ،

حـ(أ + بَ) + د(أَ + ب) = حـ(أَ + ب) + د(أ + بَ)

لنقل حـ و + د ى = حـ ى + د و (حيث و = أ + بَ ، ى = أَ + ب) ..... (٥)

بما ان [حـ ، د] ≠ ٠ نحصل على حـ ≠ د. ومن (٦)، النظرية ١، يكون حـ > د أو د > حـ. اذا كان حـ = د + ن لعنصر ما ن ∈ N فان (٥) تعطي

د و + ن و + د ى = د ى + ن ى + د و،

ن و = ن ى،

و = ى .... (٦)

اذا كان حـ < د نحصل على (٦) بطريقة مشابهة. اذن و = ى اي ان أ + بَ = أَ + ب لهذا فان (أ ، ب) ~ (أَ ، بَ) ومنه [أ ، ب] = [أَ ، بَ] اي ان س = ص. هذا يثبت خاصية الاختزال وينهي برهان النظرية.

تعرف فكرة الترتيب على Z بالتالي:

[أ ، ب] > [حـ ، د] اذا وفقط اذا كان أ + د > ب + حـ .... (٧)

فعلاقة الترتيب معرفة تعريفاً حسناً ، وثلاثية التقسيم. ونعني بذلك انه اذا كان س ، ص ∈ Z فان واحدة فقط من الحالات الثلاث التالية تتحقق: س = ص أو س > ص أو ص > س

وكالعادة نكتب ص < س لتعني س > ص.

المثال ٣.

لاي س $\in$ Z فان س^٢ $\geqslant$ ٠ . لبرهنة ذلك نفرض ان س = [أ ، ب] ، حيث أ ، ب $\in$ N . اذن س^٢ = [أ^٢ + ب^٢ ، ٢أب]. اذا استطعنا اثبات ان

أ^٢ + ب^٢ $\geqslant$ ٢أب . . . . (٨)

فاننا سنحصل على أ^٢ + ب^٢ + ١ $\geqslant$ ٢أب + ١ ومنه س^٢ $\geqslant$ [١ ، ١] = ٠.

لاثبات (٨)، نفرض اولاً ان أ = ب. اذن أ^٢ + ب^٢ = ٢أب = ٢أ^٢، اذن (٨) تتحقق. ثانياً لنفرض ان أ > ب اذن أ = ب + ن لعنصر ما ن $\in$ N . اذن أ^٢ + ب^٢ = ٢ب^٢ + ٢ب ن +ن^٢ = ٢أب + ن^٢ > ٢أب، اذن (٨) تتحقق. والحالة أ < ب تعطي (٨) بطريقة مشابهة.

لقد اثبتنا ان مربع اي عنصر في Z يكون دائماً غير سالب، اي انه اكبر من، او يساوي الصفر. ومن الواضح انه اذا كان س $\neq$ ٠ فان س^٢ > ٠ .

والنظرية التالية تعبر عن خاصيتين من خواص الاعداد الصحيحة. وفي الحقيقة ان هاتين الخاصيتين تتحققان في اي حلقة. وهما: «حاصل ضرب اي عدد صحيح في الصفر يساوي صفراً»، و«السالب مضروباً في السالب موجب».

النظرية ٣.

اذا كان س ، ص عددين صحيحين فان

(١) ٠ × س = ٠ ،

(٢) (−س) × (−ص) = س ص.

البرهان:

(١) ٠ + ٠ = ٠، فمن خاصية التوزيع نحصل على س × ٠ = س × ٠ + س × ٠ . لنفرض ان ص = س × ٠، لهذا ص = ص + ص. لكن ص له نظير جمعي −ص يحقق ص + (−ص) = ٠. ومنه ص + (−ص)= (ص + ص) + (−ص)، فخاصية التجميع تعطي ٠ = ص + (ص − ص) = ص. لهذا فان س × ٠ = ص = ٠ وهذا يثبت (١).

(٢) من (١) نحصل على

٠ = ٠ × (−ص) = (س + (−س)) (−ص) = س (−ص) + (−س) (−ص)، باضافة س ص لطرفي هذه المعادلة ينتج:

س ص = س ص + س (−ص) + (−س) (−ص) = س (ص + (−ص)) + (−س) (−ص). لكن ص + (−ص) = ٠، اذن من (١) نحصل على س ص = (−س) (−ص)، وهذا يثبت النظرية.

ويمكن ان توضع الاعداد الطبيعية N على شكل اقتران واحد لواحد يحافظ على الترتيب من N الى مجموعة جزئية من Z ، وهذا يمكننا من اعتبار N كمجموعة جزئية من Z . وسنوضح هذا الاقتران في النظرية التالية، وهوينقل ١ ∋ N الى [٢ ، ١] في Z ، وهذا يفسر سبب استخدامنا للرمز ١ ليدل على [٢ ، ١] في النظرية ٢ .

النظرية ٤ .

لتكن س = { [٢ ، ١] ، [٣ ، ١] ، [٤ ، ١]، . . . } . اذن يوجد اقتران تقابل ق : N ← س يحافظ على الجمع والضرب والترتيب.

تسمى المجموعة س مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة وسنعاملها في المستقبل كأنها N

البرهان:

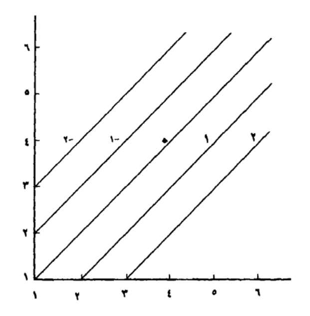
عرف ق بـ ق(ن) = [ن + ١ ، ١] لكل ن ∋ N . من الواضح ان ق اقتران شامل.

الان اذا كان ق(ن) = ق(م) فان (ن + ١ ، ١) ~ (م + ١ ، ١) ومنه ن + ٢ = م + ٢ ، واذن ن = م . لهذا فان ق واحد لواحد .

الآن لنأخذ اي عنصرين ن ، م ∋ N . اذن ق(ن) + ق(م) = [ن + م + ٢ ، ٢] = [ن+ م + ١،١] = ق(ن + م) . وبطريقة مشابهة فان ق(م ن) = ق (م) ق(ن)، اي ان ق يحافظ على عمليتي الجمع والضرب .

اخيراً، لنفرض ان ن > م . اذن ن + ٢ > م + ٢ ، ومنه [ن + ١ ، ١] > [م + ١،١] من (٧)، لهذا فان ق(ن) > ق(م) . اي ان ق يحافظ على الترتيب . وبذا يتم برهان النظرية .

الخطوط المائلة في الشكل التالي تمثل الاعداد الصحيحة



فالخط المستقيم الذي ميله ١ ويمر في (أ ، ب) يمثل العدد الصحيح [أ ، ب] . لهذا فان الخط الذي يمر بـ(١ ، ١) يمثل ٠ ،والخط الذي يمر بـ (٢ ، ١) يمثل ١،والخط الذي يمر بـ (١ ، ٢) يمثل -١ ، وهكذا .

من الآن فصاعداً سنكتب عناصر Z على شكل ۰ ، ۱ ، -۱ ، ۲ ، -۲ ، . . . .
وسندعو { ۱ ، ۲ ، ۳ ، . . . } مجموعة الاعداد الطبيعية او الاعداد الصحيحة الموجبة ،
{ ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، . . . } هي مجموعة الاعداد الصحيحة غير السالبة ، و{ -۱ ، -۲ ، -۳ ،
. . . } هي مجموعة الاعداد الصحيحة السالبة ، حيث نعرف -ن = [۱ ، ن + ۱].

المثال ٤ .

المعادلة أ + ۲ = ۱ التي لا حل لها في N ، لها حل في Z . لانه باستخدام ۱ = [۲ ، ۱]،
۲ = [۳ ، ۱] نحصل على [۱ ، ۲] + [۳ ، ۱] = [۲ ، ۱]، اي ان [۱ ، ۲] + ۲ = ۱ ، ومنه
أ = [۱ ، ۲] = -۱ هو حل .

تمارين ۲ ـ ۲

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

۱ ـ اذا كان $أ^{۲}$ = أ في Z ، فاثبت ان أ = ۰ أو أ = ۱ .

۲ ـ جد اقتران تناظر ق : N ⟵ Z . هذا الاقتران يثبت ان N و Z متكافئتان كمجموعتين .

۳ ـ اثبت قانون الانقسام الثلاثي في Z . اثبت كذلك خاصية التعدي ، اي ان أ < ب و ب < حـ تعطي أ < حـ .

٤ ـ اثبت انــه في Z ، أ < ب اذا وفقــط اذا كان أ + حـ < ب + حـ . ومنـه اثبت ان أ < ب اذا وفقط اذا كان -أ > -ب .

اذا كان حـ > ۰ ، اثبت ان أ حـ < ب حـ اذا وفقط اذا كان أ < ب .

٥ ـ عرف اقتران القيمة المطلقة ق : Z ⟵ { ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، . . . } بـ ق(أ) = أ اذا كان أ ≥ ۰ وق(أ) = -أ اذا كان أ < ۰ . وعادة نكتب ق(س) = | س | . اثبت انه في Z ، | أ ب | = | أ | | ب | و | أ + ب | ≤ | أ | + | أ ب | . أعط مثالا حيث | أ + ب | < | أ | + | ب | .

٦ ـ اذا كان أ ، ب ∈ Z و $أ^{۲}$ < $ب^{۲}$ هل نستطيع ان نستنتج ان أ < ب ؟

٧ ـ في Z ، اثبت ان $أ^٢ + أب + ب^٢ \geqslant ٠$. ومنه اثبت ان أ > ب تعطي $أ^٣ > ب^٣$.

٣. الأعداد النسبية

ليس هناك جديد في عملية بناء حقل الاعداد النسبية من الحلقة Z . لهذا سنوجز البحث.

لنكتب

$$س = \{ (أ ، ب) \mid أ ، ب \in Z ، ب \neq ٠ \} .$$

لنعّرف (أ ، ب) ~ (حـ ، د) اذا وفقط اذا كان أ د = ب حـ. ان ~ هي علاقة تكافؤ على س . وسوف نكتب

$$ك_{(أ،ب)} = \frac{أ}{ب} = أ/ب$$

حيث $ك_{(أ،ب)}$ هو صف التكافؤ الذي يحتوي على (أ ، ب). يسمى كل صف تكافؤ عددا نسبيا، Q ترمز الى مجموعة جميع الاعداد النسبية.

نؤكد هنا على انه في اي عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ فان المقام ب ≠ ٠ . ويمكن للبسط أ ان يساوي الصفر.

نعرف عمليتي الجمع والضرب على Q بالطريقة المألوفة :

$$\frac{أ}{ب} + \frac{حـ}{د} = \frac{أد + ب حـ}{ب د} ، \frac{أ}{ب} \cdot \frac{جـ}{د} = \frac{أحـ}{ب د} \quad . . . . (٩)$$

وانه لأمر مباشر اثبات ان هاتين العمليتين هما صحيحتا التعريف وان Q مع العمليتين في (٩) هي حلقة تبديلية صفرها $\frac{٠}{١}$ وعنصرها المحايد $\frac{١}{١}$. ولكي نثبت ان Q هي حقل،

لنفرض ان $\frac{أ}{ب}$ هو عنصر في Q لا يساوي الصفر. اذن أ ≠ ٠ ومنه $\frac{ب}{أ} \in Q$. اذن من (٩)

$$\frac{أ}{ب} \cdot \frac{ب}{أ} = \frac{أب}{بأ} = \frac{١}{١}،$$

اي ان نظير $\frac{أ}{ب}$ في عملية الضرب هو $\frac{ب}{أ}$، لكل عنصر $\frac{أ}{ب}$ لا يساوي الصفر.

من الواضح انه يمكن ان تطابق Z مع $\{\frac{أ}{١} \mid أ \in Z\}$ ، وسوف نكتب $٠ = \frac{٠}{١}$ و

$١ = \frac{١}{١}$ حيث ٠ هو صفر Q ، ١ هو عنصرها المحايد.

وسنرى الآن كيف نعرف الترتيب في Q : اذا كان أ > ٠ ، وَب > ٠ فاننا نرغب في

ان يكــون $\frac{أ}{ب} > ٠$ ولـكـن $\frac{(-أ)}{(-ب)} = \frac{أ}{ب}$ ، لذلــك اذا كان أ > ٠،وَب > ٠ فان (-أ) > ٠،وَ

(-ب) > ٠ . اذن من الطبيعي ان نعرف $\frac{أ}{ب}$ كعدد موجب، اي ان $\frac{أ}{ب} > ٠$ ، كما يلي:

$\frac{أ}{ب} > ٠$ اذا وفقط اذا كان أب > ٠ . (١٠)

ثم نعرف $\frac{أ}{ب} > \frac{حـ}{د}$ لتعني ان $\frac{أ}{ب} - \frac{حـ}{د} > ٠$، اي ان $\frac{أد - بحـ}{بد} > ٠$.

ومن (١٠) نحصل على

$\frac{أ}{ب} > \frac{حـ}{د}$ اذا وفقط اذا كان (أ د - ب حـ) ب د > ٠ . (١١)

وكالعادة اذا كان س ، ص $\in$ Q فاننا سنكتب ص $<$ س لتعني س $>$ ص.
سنثبت الآن ان Q حقل مرتب كلياً.

النظرية ٥.

الاعداد النسبية Q هي حقل. هذا الحقل مرتب كلياً، اي انه يحقق:
ت١.(قانون التثليث) اذا كان س ، ص عنصرين في Q ، فان واحدة فقط من الحالات التالية صحيحة: س = ص أو س $>$ ص أو ص $>$ س.
ت٢. (التعدي) س $<$ ص وَ ص $<$ ع تعطي س $<$ ع
ت٣. (وتيرية الجمع) س $<$ ص تعطي س + ع $<$ ص + ع.
ت٤. (وتيرية الضرب) س $<$ ص وَ ع $>$ ٠ تعطي س ع $<$ ص ع.

البرهان.

لقد ذكرنا ان Q هي حقل. لنبرهن ت١، لنفرض ان س = $\frac{أ}{ب}$ ، ص = $\frac{حـ}{د}$.فاذا كان س $\neq$ ص فان أ د $\neq$ ب حـ ، ومنه أ ب د٢ $\neq$ حـ د ب٢ من خاصية الاختزال في Z . اذن قانون الانقسام الثلاثي في Z يعطي أ د٢ ب $>$ حـ د ب٢ أو أ د٢ ب $<$ حـ د ب٢. ففي الحالة الاولى نحصل على أ ب د٢ - حـ د ب٢ = (أ د - حـ ب) ب د $>$ ٠ ، ومن (١١) نحصل على س $>$ ص. وفي الحالة الثانية نحصل على س $<$ ص. هذا يثبت ت١.ونترك برهان ت٢ ، ت٣ كتمرين.

لاثبات ت٤ لنفرض ان س $<$ ص وَ ٠ $<$ ع = $\frac{و}{ى}$. (١١) تعطي أ ب د٢ $<$ حـ د ب٢، ٠ $<$ و ى. ومنه أ ب د٢ و ى $<$ حـ د ب٢ و ى، وبما ان ى٢ $>$ ٠ فمن المثال ٣ نحصل على

$(ب حـ و ى - أ د و ى)\ ب د ى^{٢} > ٠$ ،

وهذا يكافيء $ص ع > س ع$ من (١١). هذا ينهي برهان النظرية.

وبما ان Q حقل فانه لكل $س \neq ٠$ يوجد نظير $س^{-١}$ بحيث ان $س \cdot س^{-١} = ١$.واذا كان

$س = \frac{أ}{ب}$ $(أ \neq ٠ ، ب \neq ٠)$ فان $س^{-١} = \frac{ب}{أ}$.

سوف نكتب ايضاً

$س^{-١} = \frac{١}{س} = ١/س$ لكل $س \neq ٠$ في Q .

$\frac{ص}{س}$ أو ص/س تعني العدد النسبي $ص\ س^{-١}$. فاذن اذا كان $س = \frac{أ}{ب} \neq ٠$ و $ص = \frac{حـ}{د}$ فان

$$\frac{ص}{س} = \frac{حـ/د}{أ/ب} = \frac{ب حـ}{أ د}$$

اذا اعطينا زوجاً مرتباً $(س_١ ، س_٢)$ من عددين نسبيين $س_١$ ، $س_٢$ فاننا كثيراً ما نحتاج الى اخذ العدد الاكبر $(\overline{أك})$ والعدد الاصغر $(\overline{أص})$ من هذا الزوج المرتب. فمن قانون التثليث فان واحدة فقط من الحالات التالية تتحقق:

(١) $س_١ = س_٢$، (٢) $س_١ > س_٢$ ، (٣) $س_٢ > س_١$.

نعرف «اكبر» كما يلي ففي (١) $\overline{أك}\ (س_١ ، س_٢) = س_١$ ؛ وفي (٢) $\overline{أك}\ (س_١ ، س_٢) = س_٢$ ؛ وفي (٣) $\overline{أك}\ (س_١ ، س_٢) = س_١$. اذن ، في جميع الحالات فان $أك\ (س_١ ، س_٢)$ هو احد عناصر الزوج المرتب $(س_١ ، س_٢)$ و

$س_ر \leqslant \overline{أك}\ (س_١ ، س_٢)$ حيث $١ \leqslant ر \leqslant ٢$.

فعلى سبيل المثال، $\overline{أك}\ (\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣}) = \frac{١}{٢}$.

وبالمثل : تعرف $\overline{أص}\ (س_١ ، س_٢) = س_١$ في (١)، $س_١$ في (٢)، و$س_٢$ في (٣). واذن

فان $\overline{أص}$ (س$_1$ ، س$_2$) هو احد عناصر الزوج المرتب (س$_1$ ، س$_2$) وان

س$_ر$ $\leqslant$ $\overline{أص}$ (س$_1$ ، س$_2$) حيث ١ $\leqslant$ ر $\leqslant$ ٢ .

فعلى سبيل المثال $\overline{أص}$ (٠ ، −١) = −١ .

واذا اخذنا عنصراً مكوناً من ثلاثة اعداد نسبية مرتبة (س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$) فاننا نكتب أ = $\overline{أك}$ (س$_1$ ، س$_2$) ، م = $\overline{أك}$ (أ ، س$_3$).اذن نرى ان م هو احد عناصر (س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$) وان س$_ر$ $\geqslant$ م حيث ١ $\leqslant$ ر $\leqslant$ ٣. اذا عرفنا م = $\overline{أك}$ (س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$) فاننا نحصل على

س$_ر$ $\geqslant$ $\overline{أك}$ (س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$) حيث ١ $\leqslant$ ر $\leqslant$ ٣.

وبطريقة مشابهة تعرف أص (س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$) .

وبشكل عام ، اذا كان (س$_1$ ، س$_2$ ، . . . ، س$_ن$) نونياً مرتباً من الاعداد النسبية ، فانه يوجد اكبر واصغر عنصر بحيث ان ، لِـ ١ $\leqslant$ ر $\leqslant$ ن ،

س$_ر$ $\geqslant$ $\overline{أك}$ (س$_1$ ، س$_2$ ، . . . ، س$_ن$)

س$_ر$ $\leqslant$ $\overline{أص}$ (س$_1$ ، س$_2$ ، . . . ، س$_ن$) .

على سبيل المثال $\overline{أك}$ (٣ ، −٢ ، ١ ، ٣ ، $\frac{١}{٤}$) =٣ ، $\overline{أص}$ (٥ ، −$\frac{١}{٧}$ ، −$\frac{١}{٣}$ ، ٢) = −$\frac{١}{٣٠}$.

وفي الحقيقة فانه اذا كان س < ص فان ع = $\frac{س+ص}{٢}$ هو عدد يحقق س < ع < ص .

بالاضافة الى احتواء $\bar{Q}$ على حل المعادلة ٢س = ١ ، أي س = $\frac{١}{٢}$، فان Q تتمتع

بخاصية لا تتمتع بها Z أو $\bar{N}$. انها نوع من خاصية الكثافة حيث انه بين اي عددين نسبيين مختلفين س، ص يوجد عدد نسبي ثالث ع،لهذا فاذا كان س < ص فانه بالامكان ايجاد ع بحيث ان س < ع < ص. باستخدام هذه الخاصية ثانية فانه يمكن ايجاد أ ، ب بحيث ان

س > أ > ع > ب > ص. وبتكرار ذلك فانه يمكن ان نجد اي عدد نريده من الاعداد النسبية بين س ، ص.

على سبيل المثال، س < ص تعطي ٢س < س + ص من ت٣ ، ولهذا س < $\frac{(ص + س)}{٢}$ من ت٤. لهذا فان س < ع ، وبطريقة مشابهة ع < ص.

والنظرية التالية تتحدث عن حقيقة واضحة ولكن مفيدة. هذه النتيجة معروفة منذ القدم واصبحت تعزى الى ارخميدس (٢٨٧ - ٢١٢ ق.م.)، مع انه يبدو انها تعود الى يودكسس(٤٠٨ - ٣٥٥ ق.م.) . وسوف ندعوها كما هو متعارف عليه مسلمة ارخميدس. الا انها بالنسبة لنا نظرية وليست مسلمة.

النظرية ٦ [مسلمة ارخميدس].

لنفرض ان أ ، ب اعداد نسبية موجبة فانه يوجد ن $\in$ N بحيث ان أن > ب.

البرهان.

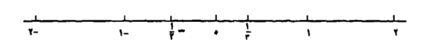
اذا كان أ ⩾ ب فاننا نأخذ ن = ٢. الهدف هو انه إذا كان ب > أ > ٠ (وب عدد أكبر من أ بكثير) فانه يمكن تخطي ب باخذ مضاعفات كثيرة لِـ أ ؛ خطوات صغيرة تتخطى خطوة واحدة كبيرة.

لبرهنة ذلك لنفرض ان أ = $\frac{حـ}{د}$ ، ب = $\frac{و}{ى}$ حيث حـ ، د ، و ، ى $\in$ N . ان

ن = د و + ١ تحقق العلاقة، لان

ن أ = (د و + ١) $\cdot$ $\frac{حـ}{د}$ > د و $\cdot$ $\frac{حـ}{د}$ = وحـ ⩾ و ⩾ $\frac{و}{ى}$ = ب.

اننا مدينون بكثير مما نعرفه عن الاعداد النسبية للرياضيين الاغريق القدماء. لقد عبروا عن معظم افكارهم هندسياً. وكثيراً ما يكون ذلك مفيداً، وبناء على ذلك يمكن تخيل الاعداد النسبية كنقاط على خط مستقيم حيث يقع العدد ٠ في المركز.



ثم يتم اختيار وحدة طول وتوضع الاعداد الصحيحة الموجبة على يمين ٠، والسالبة على يساره. والاعداد النسبية غير الصحيحة مثل $\frac{١}{٣}$ هي اجزاء من وحدة الطول.

لهذا فانه يمكننا التحدث عن بُعد النقطة عن المركز (عدد نسبي) او المسافة بينهما.

على سبيل المثال المسافة بين ١ و ٠ هي ١، والمسافة بين -٢ و ٠ هي ٢ ، أي اننا نقيس المسافة دون الاهتمام بالاشارة.

ترمز للمسافة بين س وص بالرمز |س - ص| .وجرت العادة على تسمية |س| القيمة المطلقة لِـ س . والتعريف الدقيق كما يلي:

القيمة المطلقة.

اذا كان س ∈ Q فان القيمة المطلقة لِـ س تعرف بـ |س| = س اذا كان س ≥ ٠
وَ |س| = -س اذا كان س < ٠.

نظرية ٧.

اذا كان س ، ص ∈ Q . فان |س| ∈ Q و

(١) |س| ≥ ٠ وَ |س| = ٠ اذا وفقط اذا كان س = ٠ .

(٢) |س| = |-س| وَ |س|^{٢} = س^{٢} .

(٣) - | س | ⩾ س ⩾ | س |

(٤) | س ص | = | س | ٠ | ص | .

(٥) [المتباينة المثلثية] | س + ص | ⩾ | س | + | ص | .

(٦) | س - ص | ⩽ || س | - | ص || .

(٧) $\left| \frac{س}{ص} \right| = \frac{|س|}{|ص|}$ بشرط ان ص ≠ ٠

(٨) اذا كان ص > ٠، فان | س | < ص اذا وفقط اذا كان -ص < س < ص .

البرهان.

(١) اذا كان س ⩽ ٠ فان | س | = س ⩽ ٠ واذا كان س < ٠ فان | س | = -س <٠. لنفـرض ان س = ٠ . اذن | س | = س = ٠ . وبـالعكس : لنفـرض ان | س | = ٠ فمن قانون التثليث فانه اما س = ٠ أوس > ٠ أوس < ٠ . في آخر حالتين فان | س | > ٠ ، اذن | س | = ٠ تعطي س = ٠

(٢) اذا كان س ⩽ ٠ فان | س | = س وبما ان -س ⩾٠ فان | -س | = - (-س) = س، ومنه | س | = | -س | . واذا كان س < ٠ فان | س | = -س و | -س | = -س، واذن | س | = | -س | . وكذلك س ⩽ ٠ تعطي | س $|^{٢}$ = س^{٢}، وس < ٠ تعطي | س $|^{٢}$ = (-س)^{٢} = س^{٢}.

(٣) نأخذ حالات أخرى : على سبيل المثال س ⩽ ٠ تعطي س = | س |، وس < ٠ تعطي -س > ٠ لهذا فان س < ٠ < -س = | س | . اذن س ⩾ | س |، وبطريقة مشابهة -| س | ⩾ س.

(٤) من الجزء الثاني في (٢) نحصل على | س ص $|^{٢}$ = (س ص)^{٢} = (| س | ٠ | ص |)^{٢} ولكن | س ص | ⩽ ٠ و | س | | ص | ⩽ ٠ من (١)، اذن | س ص | = | س | | ص | من التثليث.

(٥) هذه الخاصية مفيدة جداً في التحليل. وسنعرف سبب تسميتها بالمتباينة المثلثية عندما نعممها على الاعداد المركبة في البند ٦.

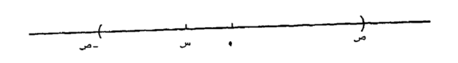
ولاثباتها نأخذ |س + ص|^{2} = (س + ص)^{2} = س^{2} + ٢ س ص + ص^{2} = |س|^{2} + ٢ س ص + |ص|^{2} ≥ |س|^{2} + ٢ |س| |ص| + |ص|^{2} = (|س| + |ص|)^{2}، باستخدام اجزاء سابقة من النظرية. وبما ان |س + ص| ≤ ٠ و |س| + |ص| ≤ ٠ فان النظرية تتبع من التثليث.

(٦) هذه هي «المتباينة المثلثية معكوسة». وهي تنتج بسهولة من (٥) عندما نكتب |س| = |(س − ص) + ص| ≥ |س − ص| + |ص|.

(٧) من (٤) نحصل على |س/ص| = |س| |١/ص|. لكن ١ = ص · ١/ص ولهذا، ومن (٤) ثانية يكون ١ = |ص| |١/ص|. واذن |١/ص| = ١/|ص| وهذا يعطي النتيجة المطلوبة.

(٨) لنفرض ان |س| < ص. فاذا كان س ≤ ٠ فان س = |س| < ص، اي ان س < ص. واذا كان س < ٠ فان |س| = −س < ص، ومنه −ص < س. لهذا اذا كان |س| < ص فان س تقع بين −ص وَ ص.

ويمكن اثبات العكس بطريقة مشابهة اذا اخذنا الحالتين س ≤ ٠ وس < ٠. واذا فكرنا بالاعداد النسبية كنقاط على خط فانه لأي ص > ٠ ثابت، فان كل قيم س، بحيث ان |س| < ص، تكون فترة من الاعداد النسبية التي تقع بين −ص و ص.

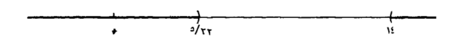


المثال ٥ .

حل المتباينة | ٢س - ٤ | < ٣ | س - ٦ | في Q . اي جد جميع قيم س ∋ Q التي تحقق المتباينة. وضح هندسياً على خط الاعداد النسبية.

من الواضح ان س = ٦ ليست حلا. لنفرض ان س > ٦ هو حل اي ان | ٢س - ٤| < ٣س - ١٨ . من (٨) نظرية ٧ نحصل على -٣س + ١٨ < ٢س - ٤ < ٣س - ١٨ .
لهذا فان
س > ١٤، وس > $\frac{٢٢}{٥}$. وهذا يبين ان س > ١٤ هو حل.

اذا كان س < ٦ هو حل فان | ٢س - ٤ | < ١٨ - ٣س وَمنه ٣س - ١٨ < ٢س - ٤ < ١٨ - ٣س وَمنه س < ١٤ وَس < $\frac{٢٢}{٥}$. وهذا يبين ان س < $\frac{٢٢}{٥}$ هو حل . فمجموعة الحل هي { س ∋ Q | س < $\frac{٢٢}{٥}$ } ∪ { س ∋ Q | س > ١٤ } ، كما هو موضح .



المثال ٦ .

يمكن تعميم المتباينة المثلثية باستخدام الاستقراء الى عدد منتهٍ من الحدود. لهذا وباستخدام اشارة المجموع فانه اذا كان $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$ هي ن من الاعداد النسبية، (غير مختلفة بالضرورة)، سنكتب

$$\sum_{ر=1}^{ن} س_ر = س_1 + س_2 + \ldots + س_ن . \qquad (١٢)$$

في الطرف الايمن لِـ (١٢) فان الحرف الاغريقي سجما المقلوب $\sum_{ر}$ يعني اننا نضع ر = ١ ، ٢

، . . . ، ن ثم نجمع $س_1$ ، $س_2$ ، . . . ، $س_ن$. فتعم المتباينة المثلثية الى

$$\left|\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right| \leqslant \sum_{ر=1}^{ن} |س_ر| \quad \ldots (١٣)$$

وبالكلمات فان (١٣) تقول «القيمة المطلقة للمجموع اقل من، اوتساوي مجموع القيم المطلقة للأفراد».

وكمثال على استخدام (١٣) فاننا سنجد عدداً ما أ بحيث ان

ق (س) = $|س^3 + ٢س^2 - ٣س + ١| \leqslant$ أ حيث $-٣ \leqslant س \leqslant ١$.

الآن من (١٣)، و(٤) نظرية ٧، نحصل على:

ق (س) $\leqslant |س|^3 + ٢|س|^2 + ٣|س| + ١$.

ولكن $-٣ \leqslant س \leqslant ١$ تعطي $-٣ \leqslant س \leqslant ٣$، ومنه $|س| \leqslant ٣$. اذن

ق (س) $\leqslant ٣^3 + ٢ \times ٣^2 + ٣ \times ٣ + ١ = ٥٥$

تمارين ٢ - ٣

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - أثبت أنـه لا يوجـد س $\in Q$ بحيث ان $س^2 = ٢$. ولكن اذا كان أ = $\frac{م}{ن}$ حلاً تقريبياً

فاثبت ان ب = $\frac{م + ٢ن}{م + ن}$ هو تقريب افضل، المقصود بذلك ان | ب^{٢} - ٢| > | أ^{٢} - ٢ | .

مبتدئاً بـ أ = ١، جد ى ∋ Q بحيث ان | ى^{٢} - ٢| > $\frac{١}{٨٤٠}$

٢ ـ اثبت ان س^{٢} ⩾ ٠ لكل س ∋ Q .

٣ ـ لنفرض ان س = $\frac{أ}{ب}$ ، ص = $\frac{حـ}{د}$ عناصر في Q ، بحيث ان ب > ٠ وَد > ٠. اذا كان

س > ص فاثبت ان $\frac{أ + حـ}{ب + د}$ يقع بين س وص.

٤ ـ لنفرض ان س عدد نسبي ثابت، ولنفرض ان | س| ⩽ $\frac{١}{ن}$ لكل ن ∋ N . استخدم

مسلمة ارخميدس لاثبات ان س = ٠ .

٥ ـ اذا كان ص ∋ Q وص ⩾ -١، فاثبت باستخدام الاستقراء ان

(١ + ص)^{ن} ⩾ ١ + ن ص لكل ن ∋ N

٦ ـ لنفرض ان س ، أ عددان نسبيان ثابتان بحيث ان ٠ > | س | > ١ وأ > ٠. استخدم السؤال ٥ ومسلمة ارخميدس لاثبات انه يوجد م ∋ N ، تعتمد على س ، أ ، بحيث ان

| س |^{ن} > أ لكل ن > م. كارشاد اكتب | س | = $\frac{١}{١ + ص}$ حيث ص > ٠ .

٧ ـ حل المتباينة | س + ٢ | ⩽ ٢ | س + ١ | في Q .

٨ ـ قرب القيمة المطلقة لِـ $س^{٤} - ٩س^{٢} + ٣س - ١$ ، حيث س عدد نسبي و $-١ \leqslant س \leqslant ٢$

٩ ـ اوجد اكبر عدد نسبي م بحيث ان $|س^{٢} - ٢ص^{٢}| \geqslant م$ لكل س ، ص $\in Z$.

١٠ ـ اذا كان أ ، ب ، حـ اعداداً نسبية موجبة وكان أ + ب + حـ = ١ ، فاثبت ان

$(١ - أ)(١ - ب)(١ - حـ) \geqslant ٨$ أ ب حـ، حيث تحصل المساواة اذا وفقط اذا كان

$أ = ب = حـ = \frac{١}{٣}$

١١ ـ اذا كان أ ، ب $\in Q$ ، فاثبت ان $أ(ب - أ) \leqslant (\frac{ب}{٢})^{٢}$. استنتج ان $ب! \geqslant \frac{ب^{ب}}{٢^{ب-١}}$

لكل ب $\in N$.

١٢ ـ اذا كان أ ، حـ $\in Q$ وحـ > أ > ٠ ، حيث $ب = (جـ + \frac{أ^{٢}}{جـ})/٢$. فاثبت ان

أ > ب > حـ.

٤ ـ متتاليات الأعداد النسبية

ان الاعـداد النسبيـة تفي بكثـير من الاغـراض، كالحسـابـات اليـوميـة ، والقيـاسات المخـبريـة الفيزيائية والهندسية. ولكن معادلات مثل $س^{٢} = ٢$ ، التي ليس لها حل في الاعداد النسبيـة ، تظهـر على غير انتظـار، ونرغب ان نجد لها حلا ، والبحث عن الحل يؤدي الى بناء حقل الاعداد الحقيقية $\bar{R}$. ويتحقق به اكثر من مجرد ايجاد الحل لمعادلة مثل $س^{٢} = ٢$. لان $\bar{R}$ ، وهو حقل تام ومـرتب كلياً ، يعطينا اسلحة قوية نهاجم بها مجالا واسعاً من المسائل الرياضية والفيزيائية .

نبـدأ بالبحث عن تقـريب نسبي «للحـل الموجب» للمعادلة $س^{٢} = ٢$. وبما انه لا يوجد

حل في الاعداد النسبية فاننا نريد ان نجد عدداً نسبياً س بحيث ان $|س^2 - 2|$ صغير الى الدرجة التي نريدها ونحن نعلم انه لن يكون صفراً. ومن الاساليب التي سندرسها في النظرية (١٠) تكوين متتالية من الاعداد النسبية ($س_1$ ، $س_2$ ، . . .) بحيث ان

$$س_{ن+1} = \frac{2 + س_ن}{1 + س_ن}، ن \in N ،$$

ابتداء بـ $س_1 = 1$. فباجراء العمليات الحسابية نجد ان ($س_ن$) = (1 ، $\frac{3}{2}$، $\frac{7}{5}$، . . .)،

وكلما حسبنا حدوداً اكثر في المتتالية سيبدو اننا نقترب من الحل الذي تخيلناه للمعادلة $س^2 = 2$. إن فكرة «متتالية من الاشياء» (ليست بالضرورة اعداداً) هي من الافكار الرئيسية ذات الاهمية الكبيرة. واليك التعريف الدقيق للمتتالية :

لتكن ى مجموعة غير خالية. تعرف المتتالية في ى على انها اقتران س : $N \longrightarrow$ ى حيث

N هي مجموعة الاعداد الطبيعية. سوف نكتب س = ($س_ن$) = ($س_1$ ، $س_2$ ، . . .) ونسمي $س_ن$ الحد النوني للمتتالية ($س_ن$).

اذا كانت ى = N فان س تسمى متتالية من الاعداد الطبيعية. واذا كانت ى = Q فان س تسمى متتالية نسبية . . . الخ. نذكر هنا انه ليس من الضروري ان تكون حدود المتتالية مختلفة، اي انه لا ضرورة لأن يكون س واحداً لواحد.

ونستعمل الاقواس المستديرة للمتتالية لكي نميزها عن المجموعة لهذا فان س = ($س_ن$)، {$س_ن$} = س (N) التي هي مجموعة الحدود $س_ن$، هما شيئان مختلفان تماماً.

المثال ٧.

(١) أ $\in$ Q ، $س_ن$ = أ لكل ن تعرف المتتالية الثابتة س = (أ ، أ ، أ ، . . .).

(٢) أ $\in$ Q ، م $\in$ N ، م > ١. عرف س$_{ن}$ = أ لكل ن $\geqslant$ م. اكتب اي س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، . . . ، س$_{م-١}$ ، اذن س = (س$_{ن}$) تسمى ثابتة النهاية:

اي ان س = (س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، . . . ، س$_{م-١}$ ، أ ، أ ، أ ، . . .).

(٣) س = (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، . . .) هي متتالية من الاعداد الصحيحة.

يمكن تعريف الحد النوني بالعلاقة التالية:

$$س_{ن} = \frac{١ + (-١)^{ن+١}}{٢}$$

في هذه الحالة س (N) = { ٠ ، ١ }.

(٤) س = (ن) = (١ ، ٢ ، ٣ ، . . .) هي متتالية من الاعداد الطبيعية وس (N) = N

(٥) س = (٠ ، -١ ، -٢ ، -٣ ، . . .) هي متتالية اعداد صحيحة.

(٦) س = $(\frac{١}{ن})$ = (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ . . .) هي متتالية نسبية.

(٧) س = (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣، . . .) هي متتالية الاعداد الاولية.

وهنا لا يوجد صيغة سهلة معروفة لِـ س$_{ن}$.

(٨) س$_{ن}$ = ن! = ١ × ٢ × ٣ × . . . × ن يسمى مضروب ن. هذا يعطي متتالية س = (١ ، ٢ ، ٦ ، ٢٤ ، ١٢٠ ، . . .).

(٩) س$_{١}$ = ١، س$_{ن+١}$ = ١ + ١ + $\frac{١}{٢!}$ + . . . + $\frac{١}{ن!}$ لكل ن $\geqslant$ ١ هذا يعطي متتالية الاعداد النسبية س = (١ ، ٢ ، $٢\frac{١}{٢}$ ، $٢\frac{٢}{٣}$ ، . . .)؛ ولهذه المتتالية علاقة بـ «e»

اساس اللوغاريثم الطبيعي. (انظر الفصل ٩، البند ١).

(١٠) [متتالية فيبوناتشي]. يمكن الحصول على المتتالية (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، . . .) بجمع كل حدين متتالين للحصول على الحد التالي لهما. كتطبيق على هذا انظر التمارين ٢ - ٤.

سيكون اهتمامنا من الآن فصاعداً، اذا لم نذكر غير ذلك، محصوراً بالمتتاليات النسبية س = (س ن)، وهي تضم بالطبع متتاليات الاعداد الصحيحة والاعداد الطبيعية. والتعاريف التالية تعطي تصنيفات هامة للمتتاليات.

المتتالية المحصورة.

(١) يقال ان المتتالية س = (س ن) محصورة من اعلى اذا وفقط اذا وجد عدد نسبي م لا يعتمد على ن بحيث ان س ن $\leqslant$ م لكل ن $\in N$.

(٢) يقال ان المتتالية س = (س ن) محصورة من اسفل اذا وفقط اذا وجد عدد نسبي و بحيث انس ن $\geqslant$ و لكل ن $\in N$.

(٣) يقال ان المتتالية س = (س ن) محصورة اذا وفقط اذا كانت محصورة من اعلى ومن أسفل، اي انه يوجد عدد نسبي م $>$ ٠ بحيث ان | س ن | $\leqslant$ م لكل ن $\in N$. يرمز لمجموعة المتتاليات المحصورة بالرمز ل$^{\infty}$.

المتتاليات التقاربية

يقال أن المتتالية س = (س ن) تقاربية اذا وفقط اذا وجد عدد نسبي م بحيث انه لكل $\in$ > ٠ في Q، يوجد ن٠ = ن٠ ($\in$) $\in N$ بحيث ان | س ن - م | $< \in$ لكل ن $\geqslant$ ن٠.

نسمي م نهاية المتتالية ونقول ان (س ن) تتقارب من م. ونكتب نها س ن = م، أوس ن $\leftarrow$ م (ن $\leftarrow \infty$). ونرمز لمجموعة المتتاليات التقاربية بالرمز تق. تسمى المتتالية غير التقاربية بالمتتالية التباعدية.

المتتالية الصفرية

اذا كانت (س ن) متتالية تقاربية وكانت نها س ن = ٠، فاننا نسمي (س ن) متتالية صفرية. ويرمز لمجموعة المتتاليات الصفرية بالرمز تو.

المتتالية الكوشية.

تسمى المتتالية (س ن) متتالية كوشية اذا وفقط اذا كان لكل $\in$ > ٠، $\in$ عدد نسبي، يوجد ن٠ = ن٠($\in$) بحيث ان |س ن − س م| < $\in$ لكل م ⩾ ن٠ ون ⩾ ن٠ . واذا كانت س متتالية كوشية فسنكتب س ن − س م ← ٠ (م، ن ← ∞) ويرمز لمجموعة المتتاليات الكوشية بالرمز ك

المتتاليات الوتيرية

(١) تسمى المتتالية س = (س ن) وتيرية متزايدة اذا وفقط اذا كان س ن ⩽ س ن+١ لكل ن $\in$ N . واذا كان س ن < س ن+١ لكل ن $\in$ N فاننا نسمي المتتالية وتيرية متزايدة فعلا.

(٢) تسمى المتتالية س = (س ن) وتيرية متناقصة (متناقصة فعلا) اذا وفقط اذا كان س ن ⩾ س ن+١ (س ن > س ن+١) لكل ن $\in$ N .

التباعد الى ∞ أو ـ ∞ .

(١) نقول ان (س ن) تتباعد الى ∞ اذا وفقط اذا كان لكل عدد نسبي أ > ٠ يوجد ن٠ = ن٠ (أ) بحيث ان س ن > أ لكل ن ⩾ ن٠ . ونكتب س ن ← ∞

(٢) نقول أن (س ن) تتباعد الى ـ ∞ اذا وفقط اذا كان (−س ن) ← ∞ كما هو معرف في (١)، ونكتب س ن ← ـ ∞ .

قبل ان نعطي أمثلة لتوضيح هذه التعريفات لا بد من ذكر بعض الشروح والتحذيرات. فمن الـواضـح ان عدداً من الرموز غير المفسرة قد ظهرت. ولبعض التعريفات، وخصوصاً فيما يتعلق بالمتتاليات التقاربية، تعقيدات منطقية. وهذه التعقيدات تجعل بعض المبتدئين يخطئون في قراءة التعريفات مما يؤدي بهم الى الوقوع في الاخطاء التحليلية.

فبالنسبة للمتتاليات المحصورة نشدد على ان الاعداد م ، وهي اعداد ثابتة ولا تعتمد على ن. لهذا فمع انه صحيح ان | ن | > ن + ١ لكل ن ∋ N ، فان المتتالية (ن) = (١ ، ٢ ، ٣ . . .) غير محصورة. والرمز ل ∞ متعارف عليه ولا يمكن تفسيره دون الرجوع الى تاريخ الرياضيات. فنطلب منك ان تقبله كما هو، مجرد رمز.

وتعريف المتتالية التقاربية متوازن بطريقة دقيقة وبحاجة الى تفسير دقيق. واي انحراف بسيط عما هو مذكور في النص قد يؤدي الى اشياء لا معنى لها.

اولا ، العـدد م ، نهايـة المتتـالية ، مذكور قبل ∈ > ٠. لهذا فان م ستعتمد على طبيعة المتتالية ولن تعتمد على ∈ . ثم نتحدث عن «لكل ∈ > ٠» ونعني بهذا «لاي قيمة ∈ > ٠» وبالتأكيد لا نعني «لقيمة ما لـ ∈ > ٠» أو «يوجد ∈ > ٠». وليست هناك اهمية خاصة لاستخـدام الحـرف الاغـريقي ∈ (ابسلون) في التعريـف، سوى انه متعارف عليه. كذلك لا حاجـة لان نقـول ∈ > ٠ عدد صغـير لان مجموعة الاعداد الموجبة تحتوي على كل الاعداد الموجبة الصغيرة.

والجملة «يوجد ن٠ = ن٠ (∈) ∋ N » تعني انه بعد ان اعطينا ∈ > ٠ فانه بامكاننا ان نجد عدداً صحيحاً موجباً ن٠ يعتمد على ∈ بصورة عامة، وهذا الاعتماد يرمز له بالصيغة ن٠ = ن٠ (∈). وهنـاك طريقـة اخـرى لكتـابة ذلك هي «يوجد اقتران ق : Q^+ ← N »، حيث Q^+ هي مجموعة الاعداد النسبية الموجبة.

واخيراً نشترط ان يكون | سن − م | > ∈ لكل ن > ن٠ . نشدد هنا على «لكل». لا نمانع اذا حدث وكان | سن − م| > ∈ لكل ن ≥ ١ ، فهذا ممكن، ولكن نادر الحدوث. ولا نمانع اذا كان | سن − م | > ∈ لاعداد ما، أو لكل ن > ن٠ .

وستساعد الامثلة في توضيح الافكار التي نبني عليها المتتاليات التقاربية، ولكن من يفشل في فهم التعريف الاساسي فهماً تاماً لن ينجح في فهم التحليل.

لا يحتاج الرمز نها س ن = م الى تفسير. ولكن نذكر هنا ان م قد لا تكون حداً من حدود المتتالية، اي قد يكون س ن ≠ م لكل ن ∋ N . والسهم في س ن ← م يساعد في فهم ذلك. وتقرأ «س ن تقترب من م». فمن العلاقة | س ن - م | > ∈ لكل ن ≤ نـ. يمكن ان نقول ان س ن تقترب في النهاية من م، اي لـِ ن كبيرة، ولكن لا نستطيع بشكل عام ان نقول ان س ن تساوي م.

والرمز ∞ (لا نهاية) الذي نجده في س ن ← م (ن ← ∞) هو شيء خطر وغير ضروري. لقد استخدم لعدة قرون في الرياضيات ولا ضرر منه اذا استخدم كرمز وليس في الاستنتاج. وهو بالطبع يحمل فكرة ان س ن تقترب من م عندما تكبر ن.

وبالنسبة لنا فان ∞ هي اشارة او رمز فقط نستخدمه فيما يتعلق بالمتتاليات، انه ليس عدداً نسبياً. لهذا فلن نكتب ثانية تعبيرات مثل ١ + ∞ ، ٠ × ∞ ، $\frac{1}{\infty}$ ، ولن نحاول حسابها او استنتاج اي شيء منها.

المتتالية الكوشية سميت نسبة الى عالم الرياضيات الفرنسي كوشي (١٧٨٩ - ١٨٥٧) احد مؤسسي التحليل. وتعريف المتتالية الكوشية داخلي: بمعنى انه يستخدم حدود المتتالية فقط، بينما تعريف المتتالية التقاربية يحتاج الى عدد م الذي قد لا يكون احد حدود المتتالية، وقد يكون من الصعب معرفته صراحة.

وسوف نفحص متتاليات المثال (٧) لمعرفة هل هي تقاربية الخ:

من الواضح ان المتتالية (١) محصورة وتقاربية (نهايتها أ) كما انها متتالية كوشية. وهي متتالية صفرية اذا وفقط اذا كان أ = ٠ كما انها متتالية وتيرية متزايدة، وايضاً وتيرية متناقصة، لكنها لا تتباعد الى ∞ أو -∞ .

والمتتالية (٢) لها نفس خواص (١) ما عدا الوتيرية. وفي (٣) نحصل على ٠ ≥ س ن ≥ ١ لكل ن ∋ N ، لهذا فان س ∋ ل ∞ . المتتالية ليست تقاربية ولا كوشية، على سبيل

المثال، اذا كان $س_ن \leftarrow م$ فخذ $\in = \frac{١}{٢}$، فانه يوجد $ن_• = ن_• (\frac{١}{٢})$ بحيث ان $| س_ن - م |$

$< \frac{١}{٢}$ لكل $ن \geqslant ن_•$. الآن لنأخذ اي $ن \geqslant ن_•$، فان $ن + ١ > ن_•$. ومن المتباينة المثلثية

نحصل على

$$| س_{ن+١} - س_ن | = | س_{ن+١} - م + م - س_ن | \leqslant | س_{ن+١} - م | + | س_ن - م | < ١.$$

لكن $| س_{ن+١} - س_ن | = ١$ لأن $س_ن = ٠$ تعطي $س_{ن+١} = ١$ و$س_ن = ١$ تعطي $س_{ن+١} = ٠$
لهذا حصلنا على تناقض $١ < ١$، ولذلك $(س_ن) \notin$ تق. وبالمثل يثبت ان $س \notin$ ك.

وبما ان (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، . . .) ليست تقاربية فهي بالتأكيد ليست صفرية. وواضح انها ليست وتيرية ولا تتباعد الى ∞ أو $-\infty$.

وفي (٤)، س = (١ ، ٢ ، ٣ . . .) متتالية وتيرية متزايدة فعلا تتباعد الى ∞. ولاثبات الاخيرة لنفرض ان $أ > ٠$ عدد معطى، اذن من مسلمة ارخميدس، يوجد $ن_•$ بحيث ان $ن_• > أ$. لهذا اذا كان $ن \geqslant ن_•$ فان $س_ن = ن \geqslant ن_• > أ$، ومنه $س_ن \leftarrow \infty$. فمن الواضح ان $(س_ن)$ ليست محصورة من اعلى. ولكنها محصورة من اسفل لأن $١ \leqslant ن$ لكل $ن \in N$
من السهل ان نرى ان (ن) ليست تقاربية ولا كوشية.

بالنسبة لـ (٥) من الواضح ان $١ - ن \leftarrow -\infty$، وان $(١ - ن)$ محصورة من اعلى بالصفر، ولكنها ليست محصورة من اسفل، وكذلك $(١ - ن)$ وتيرية متناقصة فعلا. انها ليست تقاربية ولا كوشية.

في (٦) سوف نثبت ان $\frac{١}{ن} \leftarrow ٠$، ونترك باقي التصنيفات كتمرين؛ لنفرض ان $\in > ٠$

عدد معطى، علينا ان نجد $ن_0$ بحيث ان $|\frac{1}{ن} - 0| < \epsilon$ لكل $ن \geqslant ن_0$، اي ان $\frac{1}{ن} < \epsilon$ لكل $ن \geqslant ن_0$. $\epsilon > 0$ تعطي $\frac{1}{\epsilon} > 0$ ومن مسلمة ارخميدس فانه يوجد $ن_0 > \frac{1}{\epsilon}$. اذا كان $ن \geqslant ن_0$ فان $ن \geqslant ن_0 > \frac{1}{\epsilon}$، ومنه $\epsilon > \frac{1}{ن}$، وهذا يثبت ان $\frac{1}{ن} \leftarrow 0$ ($ن \leftarrow \infty$).

لا يمكن التحدث كثيراً عن (٧) و (٨) سوى انهما متباعدتان الى ∞ .

امـا المتتـاليـة (٩) فهي كوشيـة لكنها لا تتقارب الى اي عدد نسبي . لن نثبت ذلك لاننا سندرس هذا المثال بتفصيل عند دراسة المتسلسلات.

وأخيراً : متتالية فبوناتشي (التي سميت نسبة الى رياضي ايطالي عاش في القرن الثالث عشر تتباعـد الى ∞ . ولكن سيجـد القاريء ان في متتالية النسب (1 ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{5}$ ، $\frac{5}{8}$، . . .) ما يسترعي الاهتمام. هذه المتتالية هي كوشية لكنها لا تتقارب من اي عدد نسبي .

وفي تعريف المتتالية التقاربية تحدثنا عن نهاية المتتالية التقاربية ($س_ن$). كان هذا يتضمن ان المتتالية التقاربية لها نهاية واحدة فقط. وليس من الصعب اثبات ذلك.

النظرية ٨. [وحدانية النهاية].

اذا كانت ($س_ن$) متتـاليـة تقـاربيـة من الاعـداد النسبيـة فان نهايتها وحيدة، اي انه اذا كانت $س_ن \leftarrow م_1$ وَ $س_ن \leftarrow م_2$ فان $م_1 = م_2$.

البرهان.

لنفرض ان $س_ن \to م_١$ و$س_ن \to م_٢$. لنفرض ان امكن ان $م_١ \neq م_٢$. اذن $|م_١ - م_٢| > ٠$. لنأخذ $\epsilon = \frac{|م_١ - م_٢|}{٢}$، اذن $\epsilon > ٠$. من تعريف $س_ن \to م_١$، فانه يوجد $ن_٠$ بحيث ان $|س_ن - م_١| < \epsilon$ لكل $ن > ن_٠$.

ومن تعريف $س_ن \to م_٢$ فانه يوجد $ن_١$ بحيث ان $|س_ن - م_٢| < \epsilon$ لكل $ن \geqslant ن_١$. وبما ان $م_١ \neq م_٢$ فاننا نتوقع ان تكون $ن_٠ \neq ن_١$: لنأخذ $ن = ن_١ + ن_٠$. من ن هذه فاننا نحصل على $|س_ن - م_١| < \epsilon$ و $|س_ن - م_٢| < \epsilon$، لان $ن \geqslant ن_٠$ و $ن \geqslant ن_١$.

ومن المتباينة المثلثية نحصل على

$$|م_١ - م_٢| = |م_١ - س_ن + س_ن - م_٢| \leqslant |س_ن - م_١| + |س_ن - م_٢| < \epsilon + \epsilon$$
$$= ٢\epsilon.$$

ولكن $٢\epsilon = |م_١ - م_٢|$ من الفرض، لهذا فقد اثبتنا ان $|م_١ - م_٢| < |م_١ - م_٢|$، وهذا تناقض. لهذا يجب ان يكون $م_١ = م_٢$، بما يثبت النظرية.

سنبحث الآن في علاقات أعم، وخصائص لمجموعات مختلفة من المتتاليات.

النظرية ٩.

$تو_٠ \subset تو_ت \subset ك \subset ل_\infty$ لمتتاليات الاعداد النسبية، وجميعها مجموعات جزئية فعلا.

البرهان.

تقول النظرية ان كل متتالية صفرية هي تقاربية وهذا بديهي، وان كل متتالية تقاربية هي كوشية، وان كل متتالية كوشية هي محصورة. وايضاً، يوجد متتالية تقاربية غير صفرية، ويوجد متتالية كوشية غير تقاربية، الخ.

واضح ان تق٠ ⊂ تق لأن س ∈ تق٠ تعطي $س_{ن} \leftarrow ٠$، واذن س ∈ تق. والمتتالية الثابتة (١ ، ١ ، ١ ، . . .) ∈ تق ∩ تقَ٠ ، لهذا فان تق٠ ⊂ تق مجموعة جزئية فعلا.

لنأخذ س ∈ تق ولنفرض ان $س_{ن} \leftarrow م$. اذن لاي ∈ > ٠ يوجد ن٠ (∈) بحيث

ان $|س_{ن} - م| < ∈$ لكل ن > ن٠ (∈). بما ان ∈ > ٠ فان $\frac{∈}{٢} > ٠$، لهذا فانه يوجد

ن٠ $(\frac{∈}{٢})$ بحيث ان $|س_{ن} - م| < \frac{∈}{٢}$ لكل ن ≥ ن٠ $(\frac{∈}{٢})$.

لنأخذ ر ≥ ن٠ $(\frac{∈}{٢})$ ون ≥ ن٠ $(\frac{∈}{٢})$. اذن $|س_{ر} - م| < \frac{∈}{٢}$ و $|س_{ن} - م| <$

$\frac{∈}{٢}$. ومن المتباينة المثلثية نحصل على $|س_{ر} - س_{ن}| = |س_{ر} - م + م - س_{ن}| \leq$

$|س_{ر} - م| + |س_{ن} - م| < \frac{∈}{٢} + \frac{∈}{٢} = ∈$،

ومنه $(س_{ن})$ متتالية كوشية، اي ان س ∈ ك. هذا يثبت الاحتواء الثاني باستثناء انه احتواء فعلي. واثبات ذلك صعب وسنترك هذا الآن، ونثبته كنتيجة منفصلة (النظرية ١٠).

واخيراً لنفرض ان س ∈ ك، لنأخذ ∈ = ١ في تعريف المتتالية الكوشية لهذا فانه يوجد ن٠ = ن٠ (١) بحيث ان

$|س_{ن} - س_{م}| < ١$ لكل ن ، م ≥ ن٠ .

من المتباينة المثلثية نحصل على $|س_{ن}| \leq |س_{ن} - س_{م}| + |س_{م}| < ١ + |س_{م}|$ لكل ن ، م ≥ ن٠ . وبأخذ م = ن٠ نحصل على $|س_{ن}| \leq |س_{ن٠}| + ١$ لكل ن ≥ ن٠. ولباقي الاعداد ن، أي ١ ≤ ن ≤ ن٠ ، يوجد اكبر عدد في المجموعة { $|س_{ن}|$ | ١ ≤ ن ≤

ن٠ } ، لنقل ص = | س ر | ، ١ ≥ ر ≥ ن٠ . لنفرض الآن أن

حـ = أك (ص ، ١ + | س ن٠ |)، اي العدد الاكبر بين ص و ١ + | س ن٠ | ، نرى ان

| س ن | ≥ حـ لكل ن ∈ N ،

واذن س ∈ ل ∞ . اذن اثبتنا ان ك ⊂ ل∞ . والاحتواء فعلي لأن (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، . . .) هي متتالية محصورة وليست كوشية.

ألنظرية ١٠ .

الاحتواء تو ⊂ ك لمتتاليات الاعداد النسبية هو فعلي، اي انه توجد متتالية كوشية غير تقاربية.

البرهان.

سوف نبرهن ان س = (س ن) المعرفة بـ س١ = ١، وَ

$$س_{ن+1} = \frac{٢ + س_ن}{١ + س_ن} \text{ لكل } ن \in N \qquad (١٤)$$

هي متتالية تحقق الغرض.

اليك الآن فكرة عن سبب اختيارنا للمتتالية (١٤). لنفرض انه لدينا حل تقريبي س ن > ٠ للمعادلة $س^٢ = ٢$. اذن سيكون $٢ - س_ن^٢$ صغيراً. ونأمل ان يكون التقريب الجديد $س_{ن+1} = س_ن + ٢ - س_ن^٢$ تقريباً جيداً. ولكن اذا لم يكن $س_{ن+1}$ يختلف كثيراً عن س ن فبامكاننا ان نستعيض عن $س_ن^٢$ بـ $س_ن س_{ن+1}$. واذن يمكننا ان نأخذ $س_{ن+1} = س_ن + ٢ - س_ن س_{ن+1}$ ، وهذا يعطي (١٤).

سوف نبين الآن ان $س_ن^٢ \leftarrow ٢$ (ن ← ∞): لنفرض ان ج (ن) هي الجملة المفتوحة

$|س_{ن+1}^{2} - 2| \geqslant \frac{1}{4^{ن}}$. فمن (١٤) نحصل على $|س_{2}^{2} - 2| = |\frac{9}{4} - 2| = \frac{1}{4}$، ولهذا

فان ج (١) صحيحة. وواضح من (١٤) ان $س_{ن} \geqslant 1$ لكل $ن \in N$. وكذلك

$$|س_{ن+2}^{2} - 2| = \frac{|س_{ن+1}^{2} - 2|}{(1 + س_{ن+1})^{2}} \geqslant \frac{1}{4^{ن+1}}،$$

فاذن ج (ن + ١) صحيحة اذا كانت ج (ن) صحيحة. ومن الاستقراء نستنتج ان $|س_{ن+1}^{2} - 2|$

$\geqslant \frac{1}{4^{ن}}$ لكل $ن \in N$.

لتكن $\in > 0$ معطاة، وباستخدام مسلمة ارخميدس نختار $ن_{0} > \frac{1}{\in}$.

واذا اخذنا $ن > ن_{0}$ نحصل من المثال ١ على

$$|س_{ن}^{2} - 2| \geqslant \frac{1}{4^{ن-1}} < \frac{1}{2^{ن-1}} < \frac{1}{ن - 1} \geqslant \frac{1}{ن_{0}} < \in$$

وهذا يثبت ان $س_{ن}^{2} \leftarrow 2 (ن \leftarrow \infty)$. ومن النظرية ٩ نحصل على $(س_{ن}^{2}) \in ك$، اي ان $|س_{ن}^{2} - س_{م}^{2}| \leftarrow 0 \ (ن ، م \leftarrow \infty)$.

ولكن اذا كتبنا $(س_{ن}^{2} - س_{م}^{2}) = (س_{ن} - س_{م}) (س_{ن} + س_{م})$ فان

$$|س_{ن} - س_{م}| \geqslant \frac{|س_{ن}^{2} - س_{م}^{2}|}{2} \leftarrow 0 \ (م ، ن \leftarrow \infty).$$

لهذا فان $(س_{ن}) \in ك$،

بقي ان نثبت ان هذه المتتالية لا تتقارب من اي عدد نسبي.

لنفرض ان امكن ان (س ن) ∉ تو، اي س ن ← أ (ن ← ∞) حيث أ ∈ Q . من الواضح ان س ن ← أ تعطي $س_ن^٢$ ← أ². لاثبات ذلك نلاحظ ان (س ن) ∈ (تو) ⊂ ل∞ . لهذا فان | س ن | ⩽ م لكل ن ومنه

| $س_ن^٢$ - أ² | ⩽ | س ن - أ | (م + |أ|) = | س ن - أ | . و

لنأخذ ∈ > ٠ . اذن يوجد مـ بحيث ان | س ن - أ | < $\frac{∈}{و}$ لكل ن > مـ . ومنه

| $س_ن^٢$ - أ² | ⩽ | س ن - أ | . و < $\frac{∈}{و}$. و = ∈ ، لكل ن ⩾ مـ ،

لهذا فان $س_ن^٢$ ← أ² (ن ← ∞) . ولكننا كنا قد اثبتنا ان $س_ن^٢$ ← ٢ . فاذن ، ومن النظرية ٨، نحصل على أ² = ٢ ، وهذا تناقض لانه لا يوجد أ ∈ Q بحيث ان أ² = ٢ . اذن (س ن) ∉ تو مما يثبت النظرية .

ومن النظرية ٩ ، عرفنا ان مجموعة المتتاليات المحصورة ل∞ تحوي المجموعات تو ، تو، ك . سوف نبين بعد قليل انه يمكن تعريف عمليتي جمع وضرب على ل∞ مما يجعلها حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . وسنرى ان تو ، ك هما حلقتان جزئيتان من ل∞ وان تو هي مثالية في ك . اذن يمكننا ان نطبق النتائج العامة للحلقات التي حصلنا عليها (الفصل الاول ، البند ٢) ونكون الحلقة الخارجه ك/تو . وهذه الحلقة الخارجة هي حقل الاعداد الحقيقية R (انظر البند ٥) .

الطريقة الطبيعية لجمع وضرب اي متتاليتين من الاعداد النسبية (س ن) ، (ص ن) (سواء كانتا محصورتين ام لا) هي :

س + ص = (س ن + ص ن)، س ٠ ص = (س ن ص ن) . . . . (١٥)

ستكون (١٥) هي تعريفنا لعمليتي الجمع والضرب في ل∞ . فعلى سبيل المثال اذا كانت س = (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ . . .) وص = (٠ ، ١ ، ٠ ، ١ ، . . .) فان س + ص = (١ ، ١ ، ١ ، . . .) وس ٠ ص = (٠ ، ٠ ، ٠ ، . . .) . وفي المستقبل سنحذف النقطة في س ٠ ص .

النظرية ١١ .

متتاليات الاعداد النسبية (ل∞ ، + ، •) هي حلقة تبديلية صفرها صـ = (٠ ، ٠ ، ٠ ، . . .) وعنصرها المحايد و = (١ ، ١ ، ١ ، . . .). بهذه العمليات تصبح ك ، تو حلقات جزئية من ل∞ و تو. مثالية في ك .

البرهان.

لنفرض ان س ، ص ∈ ل∞ . اذن يوجد عددان موجبان م ١ ، م ٢ ∈ Q بحيث ان |س ن| ⩽ م ١ وَ |ص ن| ⩽ م ٢ لكل ن ∈ N . فمن المتباينة المثلثية نحصل على |س ن + ص ن| ⩽ |س ن| + |ص ن| ⩽ م ١ + م ٢ لكل ن ∈ N . اذن (س ن + ص ن) محصورة اي ان س + ص ∈ ل∞ ومنه + هي عملية ثنائية على ل∞ . كذلك |س ن ص ن| = |س ن| |ص ن| ⩽ م ١ م ٢ لكل ن . اذن س • ص ∈ ل∞ وَ • عملية ثنائية على ل∞ .

من الواضح من (١٥) ان س + ص = ص + س ، س ص = ص س لان Q حقل .
كذلك س + صـ = (س ن + ٠) = س وكذلك ‒س = (‒س ن) يحقق س + (‒س) = صـ. وبما ان ١ • س ن = س ن لكل ن فان وس = س لكل س ∈ ل∞ . ومن الواضح ان صـ ، و ∈ ل∞ وَ صـ ≠ و لان (س ن) = (ص ن) اذا وفقط اذا كان س ن = ص ن لكل ن ∈ N .

الخاصيتان (س ص) ع = س (ص ع) و س (ص + ع) = س ص + س ع تنتجان بسهولة من (١٥) ومن كون Q حقلاً . لهذا فان ل∞ هي حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

لاثبات ان ك هي حلقة جزئية يكفي ان نثبت ان س ‒ ص ∈ ك ، س ص ∈ ك عندما يكون س ، ص ∈ ك . لنفرض ان س ، ص في ك ولنطبق تعريف المتتالية الكوشية : اذا كان ∈ > ٠ فان ∈/٢ > ٠ ولهذا فانه يوجد ن. ، ن ١ ∈ N بحيث ان |س ن ‒ س ر| < ∈/٢ لكل ن ، ر ⩾ ن. وكذلك |ص ن ‒ ص ر| < ∈/٢ لكل ن ، ر ⩾ ن ١ . اذا اخذنا ن ، ر ⩾ ن. + ن ١ نحصل على :

|(س ر − ص ر) − (س ن − ص ن)| ≤ |س ر − س ن| + |ص ر − ص ن| < ∈ لهذا
فان (س ن − ص ن) = س − ص ∋ ك .

الآن س ، ص ∋ ك تعطي س ، ص ∋ ل∞ ولهذا فان |س ن| ≤ م١ ، |ص ن| ≤ م٢
لكل ن ∋ N . اذا كتبنا س ر ص ر − س ن ص ن = س ر (ص ر − ص ن) + ص ن (س ر − س ن)
نحصل على

|س ر ص ر − س ن ص ن| ≤ م١ |ص ر − ص ن| + م٢ |س ر − س ن| ← ٠ (ن ، ر ← ∞)

لهذا فان (س ن ص ن) = س ص ∋ ك وهذا يثبت ان ك حلقة جزئية من ل∞ .

ويمكن اثبات ان تو حلقة جزئية من ل∞ بطريقة مشابهة. فاذا كان س ن ← أ، ص ن ← ب

فان |(س ن − ص ن) − (أ − ب)| ≤ |س ن − أ| + |ص ن − ب| ← ٠ (ن ← ∞)،

ومنه س ن − ص ن ← أ − ب، اي ان (س ن − ص ن) = س − ص ∋ تو. كذلك بما أن تو
∋ ل∞ نحصل على |س ن| ≤ م، لكل ن ∋ N .
لهذا فان:

|س ن ص ن − أ ب| = |س ن (ص ن − ب) + ب(س ن − أ)| ≤
م |ص ن − ب| + |ب| |س ن − أ| ← ٠ (ن ← ∞). . . (١٦)

وهذا يثبت ان س ن ص ن ← أ ب اي ان س ص = (س ن ص ن) ∋ تو.
ويمكن بسهولة اعطاء برهان بطريقة « ∈ » للنتائج اعلاه: على سبيل المثال، لنفعل

ذلك لـ س ن ص ن ← أ ب ؛ لنفرض ان ∈ > ٠. اذن ∈ / ٢م > ٠ و ∈ / ٢(|ب| + ١) > ٠ لهذا فانه

يوجد ن٠ ، ر ∋ N بحيث ان |س ن − أ| < ∈ / ٢(|ب| + ١) لكل ن > ن٠ و |ص ن − ب|

$> \frac{\epsilon}{2م}$ لكل ن $>$ ر. لهذا اذا كانت ن $>$ ن. + ر. نحصل من (١٦) على

$|س_ن ص_ن - أ ب| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

واخيرا يجب ان نثبت ان توم مثالية في ك اي ان س - ص ∋ توم عندما يكون س ، ص∋ توم وحـ س ∋ توم عندما يكون حـ∋ توم وس ∋ ك. لنفرض ان س ، ص∋ توم . اذن $|س_ن - ص_ن| \leqslant |س_ن| + |ص_ن| \to ٠$ (ن $\to \infty$)، لهذا فان س - ص ∋ توم .

لنفرض ان حـ ∋ توم وس∋ ك. اذن س∋ ل∞ ومنه $|س_ن| \leqslant$ م لكل ن∋ N

كذلك اذا كان $\epsilon > ٠$ فانه يوجد ن. بحيث ان $|حـ_ن| < \frac{\epsilon}{م}$ لكل ن $>$ ن. ، ومنه $|حـ_ن$ س$_ن| \leqslant |حـ_ن|$. م $< \epsilon$ لكل ن $>$ ن. مما يثبت ان حـ س ∋ توم . وهذا ينهي برهان النظرية .

نحتاج في البند ٥ الى النظرية التالية. وهي تنص بشكل اساسي على ان بعض انواع المتتاليات الكوشية لها نظير هو نفسه متتالية كوشية .

النظرية ١٢ .

لنفرض ان س ∋ ك ولنفرض انه يوجد أ ∋ N وعدد نسبي د $>$ ٠ بحيث ان $|س_ن| \geqslant$ د لكل ن $>$ أ. عرف ش بـ ش$_ن$ = ١ اذا كان ١ $\leqslant$ ن $\leqslant$ أ وش$_ن = \frac{1}{س_ن}$ لكل ن $>$ أ. اذن ش∋ ك.

البرهان

لنأخذ اي $\epsilon > ٠$ بما ان ϵ د$^2 > ٠$، فانه يوجد ن. ∋ N بحيث ان $|س_ر - س_ن|$

د ومنه $|س_ن| \geqslant$ و $|س_ر| \geqslant$ أ ، اذن $ر > أ + ن_٠$ ، لنأخذ $ن ، ر \geqslant ن_٠$. لكل $ن ، ر$ ϵ د^٢ $>$

$|ش_ن - ش_ر| = \frac{|س_ن - س_ر|}{|س_ن| \cdot |س_ر|} \leqslant \frac{|س_ن - س_ر|}{د^٢} < \frac{\epsilon د^٢}{د^٢} = \epsilon$ لهذا فان ش $\in$ ك مما يثبت النظرية .

التمارين ٢ ـ ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ ولـد حيـوانـان ذكـر وانثى في ١ كانـون ثاني . وبعد شهرين اي في ١ آذار ولدت الانثى توأمين (ذكـراً وانثى) . واستمـرت الانثى الام في انجـاب توأمـين (ذكر وانثى) في الاول من كل شهر . والتوأمان اللذان ولدا في ١ آذار انجبا توأمين ذكراً وانثى في ١ أيار واستمر الامر على هذا المنوال وعاش الجميع . ما علاقة هذا بمتتالية فيبوناتشي في المثال ٧ ؟ كم يكون عدد الازواج في الاول من آب ؟

٢ ـ لنفرض ان ($س_ن$) متتالية اعداد نسبية . فاذا وجد أ $\in$ Q بحيث انه لكل عدد نسبي ϵ ، $٠ < \epsilon < ١$ يوجد $ن_٠ \in$ N بحيث ان $|س_ن - أ| < \epsilon$ لكل $ن \geqslant ن_٠$. اثبت ان $س_ن \leftarrow أ$.

٣ ـ اثبت ان $س_ن \longrightarrow أ$ اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon > ٠$ يوجد $ن_٠ \in$ N بحيث ان $أ - \epsilon < س_ن < أ + \epsilon$ لكل $ن \geqslant ن_٠$.

٤ ـ استخدم الجزء المناسب من النظرية ٧ لتثبت ان $س_ن \longrightarrow أ$ تعطي $|س_ن| \longrightarrow |أ|$. اثبت ان العكس غير صحيح باعطاء مثال في متتالية ص بحيث ان $|ص_ن| \longrightarrow ١$ ولكن ص تباعدية .

٥ ـ انقد العبارة $\frac{١}{ن} \longrightarrow \frac{١}{ن^٢}$ ($ن \longrightarrow \infty$)

٦ ـ اذا كانت ($س_ن$) متتـاليـة كوشيـة من الاعداد الصحيحة ، اثبت ان ($س_ن$) $\in$ تو$_م$. اعط مثالا لمتتالية ص من الاعداد الصحيحة بحيث ان $ص_ن \longrightarrow -\infty$ ولكن ص ليست وتيرية

متناقصة.

٧ ـ اثبت ان (١) $\frac{٣ن + ٢}{٢ن + ١} \leftarrow \frac{٣}{٢}$، (٢) $\frac{٢^{ن}}{ن!} \leftarrow \infty$ ، (٣) $\frac{٢^{ن}}{ن} \leftarrow \infty$.

٨ ـ بين هل المتتاليات المعطى حدها النوني، محصورة او تقاربية، الخ.

(١) $س_{ن} = أ^{ن}$، أ ثابتة ، $< أ \geqslant ١$ ، (٢) $س_{ن} = ب^{ن}$، ب ثابتة ب > ١ . (٣) $س_{ن}$ = ن (عندما تكون ن عدداً فردياً)، $س_{ن} = ٢^{ن}$ (عندما تكون ن عدداً زوجياً)، (٤) $س_{ن}$ = $(-١)^{ن}$ + ن، (٥) $س_{١} = ١$، $س_{ن+١} = \frac{٣ + س_{ن}}{١ + س_{ن}}$، (٦) $س_{١} = ١$، $س_{ن+١} = \frac{٤ + س_{ن}}{١ + س_{ن}}$.

٩ ـ اذا كان $س_{ن} \neq ٠$ لكل ن ، $س_{ن} \leftarrow \infty$ ، فاثبت ان $\frac{١}{س_{ن}} \leftarrow ٠$.

اعط مثالا يبين ان العكس غير صحيح.

١٠ ـ جد متتاليتين متباعدتين س ، ص بحيث ان س + ص ∋ تو .

١١ ـ اذا كان $س_{ن} \leftarrow \infty$ ، ص ∋ ل∞ ، فاثبت ان $س_{ن} + ص_{ن} \leftarrow \infty$.

١٢ ـ لنفرض ان $س_{ن} \leftarrow$ أ، أ $\neq ٠$. اثبت انه يوجد ن. ∋ N بحيث ان $|س_{ن}| > \frac{|أ|}{٢}$ لكل ن $\leqslant$ ن. . ومنه اثبت انه اذا كان $س_{ن} \neq ٠$ لكل ن $>$ ن. فان $\frac{١}{س_{ن}} \leftarrow \frac{١}{أ}$.

١٣ ـ (١) في النظرية ١١ أثبتنا ان $س_{ن} \leftarrow$ أ، $ص_{ن} \leftarrow$ ب تعطي $س_{ن} - ص_{ن} \leftarrow$ أ ـ ب. اثبت ان $س_{ن} + ص_{ن} \leftarrow$ أ + ب.

(٢) لنفرض ان ع ∋ تو وانه يوجد د ∋ Q ، ب ∋ N بحيث ان $ع_{ن} >$ د لكل د $>$ ب اثبت ان أ = نها $ع_{ن} \leqslant$ د. (ارشاد: افرض ان أ $<$ د وطبق تعريف $ع_{ن} \leftarrow$ أ لتصل الى

تناقض) .

(٣) جد ع $\in$ تو. بحيث ان $ع_ن > ٠$ لكل ن ونها $ع_ن = ٠$

(٤) في النظرية ١١ أثبتنا ان $س_ن \leftarrow أ$، $ص_ن \leftarrow ب$ تعطي $س_ن ص_ن \leftarrow أب$. اذن $س_ن^٢ \leftarrow أ^٢$، $س_ن^٣ \leftarrow أ^٣$ وبشكل عام $س_ن^ر \leftarrow أ^ر$، اذا كان ر عدداً طبيعياً ثابتاً. بأخذ $س_ن = ١ + \frac{١}{ن}$ (حيث $س_ن \leftarrow ١$) وباستخدام (٢) اعلاه لـ س بدلا من ع ، اثبت انه غير صحيح ان $س_ن^ن \leftarrow ١$.

٥ . بناء كانتور للاعداد الحقيقية

لقد تم وضع الاساس الآن واصبح من السهل اثبات ان الحلقة الكسرية ك/تو. هي حقل . سنسميه حقل الاعداد الحقيقية R . في النظرية ١٠ أثبتنا ان تق $\subset$ ك (المتتاليات الاعداد النسبية) هي مجموعة جزئية فعلا . وسنبين انه ، بعد تعريف الترتيب على R ، ستتمكن من تعريف التقارب ، والمتتاليات الكوشية ، الخ لـR ، وسنثبت ان تق = ك للمتتاليات الحقيقية . لهذا فانه للمتتاليات الحقيقية ، كل متتالية تقاربية هي كوشية ، وبالعكس كل متتالية كوشية هي تقاربية . وهذه الخاصية الهامة ـ خاصية التمام ـ اي ك = تق هي التي تعطي ميزة للاعداد الحقيقية على الاعداد النسبية . وهذا يعني عملياً انه بالامكان فحص المتتالية لمعرفة ما اذا كانت تقاربية ام لا ، بفحص الفرق بين حدود المتتالية دون الحاجة الى معرفة النهاية مقدماً . لهذا فانه من الممكن اعطاء متتالية تقريبات لنهاية متتالية تقاربية ، مع ان النهاية قد لا تكون عدداً نسبياً يمكن حسابه لأي درجة من الدقة نريدها (لكنها عدد حقيقي) .

النظرية ١٣ . [الاعداد الحقيقية R].

ان الحلقة الكسرية ك/تو. ، حيث ك حلقة المتتاليات الكوشية للاعداد النسبية وتو. هي المثالية المكونة من المتتاليات الصفرية ، هذه الحلقة هي حقل يرمز له بالرمز R . ويرمز

للصفر وللعنصر المحايد في هذا الحقل بالرمزين ٠ ، ١ على التوالي.

البرهان.

من النظرية ١١ فان ك هي حلقة تبديلية صفرها صـ = (٠ ، ٠ ، ٠ ، . . .) وعنصرها المحايد و = (١ ، ١ ، ١ ، . . .) ، وتق هي حلقة جزئية مثالية في ك. اذن وباستخدام نتيجة الفصل ١ ، البند ٣ نحصل على ان ك/تق هي حلقة. لنتذكر ان س ~ ص تعني −س + ص ∈ تق ، اي ان $ص_ن - س_ن \to ٠$ أو $س_ن - ص_ن \to ٠$ لكل س ، ص ∈ ك. بما ان ك تبديلية فانه واضح من تعريف $ك_س \cdot ك_ص = ك_{س ص}$ ان R تبديلية. كذلك $ك_س \cdot ك_و = ك_{س و} = ك_س$ لهذا فان $ك_و$ هو عنصر R المحايد. نكتب $١ = ك_و$. وبهذا نكون قد استخدمنا الرمز ١ كعدد طبيعي ، وكعدد صحيح ، وكعدد نسبي والآن كعدد حقيقي ولم ننته من استخدامه بعد لاننا سوف نستخدمه كعدد مركب ، في البند ٦.

بما ان $ك_س + ك_{صـ} = ك_{س+صـ} = ك_س$ فاننا نرى ان $ك_{صـ}$ هو صفر R ويرمز له بالرمز ٠ . لهذا فان R هو حلقة تبديلية صفرها ٠ ، وعنصرها المحايد ١ ومن الواضح ان ١ ≠ ٠ لانه اذا كان ١ = ٠ فان $ك_و = ك_{صـ}$ ومنه و ~ ٠ اي ان ١ − ٠ ← ٠ (ن ← ∞) وهذا خطأ. اخيراً يجب ان نثبت ان R حقل. لنأخذ $ك_س$ ∈ R حيث $ك_س \neq ٠$ اي ان $ك_س \neq ك_{صـ}$. اذن س ≁ صـ لهذا فان

س ∉ تق ، . . . . (١٧)

سوف نثبت ان (١٧) والحقيقة القائلة ان س ∈ ك تتضمنان انه يوجد ب ∈ N وعدد نسبي د > ٠ بحيث ان $|س_ن| \geqslant د$ لكل ب ∈ N ولكل د > ٠ يوجد ن > ب بحيث ان $|س_ن| < د$. الآن $|س_ن - س_ر| < د$ لكل ن ، ر ⩾ نِ .

لنأخذ ب = نِ ونختار ن > ب بحيث ان $|س_ن| < د$. الآن لكل ر ⩾ ب ،

$|س_ر| = |س_ر - س_ن + س_ن| \leqslant د + |س_ن| < ٢ د$

وهذا يثبت ان س ∈ تق مما يناقض (١٧). لقد اثبتنا ان فرضيات النظرية ١٢ قد تحققت.

اذن المتتالية ش $\in$ ك، وك$_{س}$ • ك$_{ش}$ = ك$_{س ش}$ حيث س ش = (س$_1$ ، س$_2$ ، . . . . ، س$_ب$ ، ١ ، ١ ، ١ ، . . .) ومنه س ش ~ و.

وينتج ان ك$_{س ش}$ = ك$_و$ = ١، لهذا فان لكل عنصر ك$_س$ $\in$ R (عدا الصفر) يوجد عنصر نظير ك$_ش$ في عملية الضرب مما يثبت ان R حقل.

الآن نلاحظ انه بالامكان ان نجعل Q تطابق مجموعة جزئية من R . لكل ب $\in$ Q ، لنرمز للمتتالية الثابتة (ب ، ب ، ب ، . . .) بالرمز ب و، حيث و = (١ ، ١ ، ١ ، . . .). لنفرض ان ج هي المجموعة الجزئية من R التي تتكون من كل صفوف التكافؤ ك$_{ب و}$، لكل ب $\in$ Q . اذن Q تشاكل ج بواسطة الاقتران ق : Q ⟵ ج المعرف بـ ق (ب) = ك$_{ب و}$. فعلى سبيل المثال، ق هو تقابل لان ق(ب) = ق (بَ) تعطي ك$_{ب و}$ = ك$_{بَ و}$. واذن ب و = بَ و، ومنه ب - بَ ⟵ . (ن ⟵ ∞). لهذا فيجب ان تكون ب = بَ. كذلك، على سبيل المثال ايضاً، ق (ب) • ق (بَ) = ك$_{ب و}$ • ك$_{بَ و}$ = ك$_{ب بَ و}$ = ق (ب بَ). اذن ق تشاكل و Q تشاكل حقلا جزئيا من R . لهذا سنعامل Q على انها حقل جزئي من R .

المثال ٨. [حل المعادلة ص^2 = ٢ في R]

لنفرض ان س هي المتتالية الكوشية المذكورة في النظرية ١٠ . حيث اثبتنا ان س$^2_ن$ ⟵ ٢ لهذا فان العدد الحقيقي ص = ك$_س$ يحقق ص^2 = ٢ . فاذا استخدمنا فكرة الترتيب في R فاننـــا نستنتــج ان ص موجبــة، سوف نكتب ص = $\sqrt{2}$ أو ص = $2^{\frac{1}{2}}$ ونسمي ص الجـــذر التربيعي الموجب الوحيد.

بشكل اعم، اذا كان ن $\in$ N ، ر $\in$ R^+ فانه يوجد عنصر وحيد ص $\in$ R^+ ، بحيث ان ص^ن = ر، نكتب ص = $\sqrt[ن]{ر}$ = ر$^{\frac{1}{ن}}$. لهذا فانه لكل عدد حقيقي موجب يوجد جذر نوني موجب وحيد. وسوف نثبت هذه النتيجة في الفصل ٣، النظرية ٢ . ولكن سيكون من المفيد لنا استخدام هذه النتيجة قبل اثباتها.

اثبتنا في المثال ٨ ان العدد الحقيقي ص = $\sqrt{٢}$ يحقق المعادلة ص^{٢} = ٢ . بما انه لا حل لهذه المعادلة ضمن الاعداد النسبية فانه ينتج ان هناك اعدادا حقيقية غير الاعداد النسبية . نسمي هذه الاعداد بالاعداد غير النسبية . اذن $\sqrt{٢}$ هو عدد غير نسبي ، ويمكن اثبات ان $\sqrt{ن}$ هو عدد غير نسبي لكل ن $\in$ N بحيث ان ن ليست مربعا كاملا ، اي ان ن $\neq$ ١ ، ٢^{٢} ، ٣^{٢} ، ٤^{٢} ، . . . لهذا فانه يوجد عدد لا نهائي من الاعداد غير النسبية .

وهناك اعداد هامة غير نسبية مثل π ، e التي سوف نناقشها فيما بعد مع ان البرهنة على انها اعداد غير نسبية ليست بالامر السهل .

وهناك اعداد لا يمر ذكرها في الرياضيات التي تدرس في المدارس ولكن تستخدم كثيرا في التحليل . ولا تعرف اذا كانت هذه الاعداد نسبية ام غير نسبية . مثال على ذلك ، ثابت اويلر γ ، الذي يعرف على انه نهاية متتالية الاعداد الحقيقية التقاربية (س $_{ن}$) حيث

$$س_{ن} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + . . . + \frac{١}{ن} - لو ن .$$

وما ذكرناه عن e ، π ، γ ، يحتاج الى افكار لم نناقشها بعد ، لهذا علينا ان نترك هذه الارقام المثيرة للاهتمام حاليا على الاقل .

يرمز لمجموعة الاعداد غير النسبية بالرمز غ ، ولمجموعة الاعداد النسبية بالرمز Q . اذن R = Q $\cup$ غ و Q $\cap$ غ = $\varnothing$. ومن المثير للاهتمام ان نسأل هل هناك عناصر في غ اكثر من Q . ستعرف (انظر النظرية ١٤ في الفصل ٣) ان الاعداد غير النسبية اكثر من الاعداد النسبية ، والمقصود بذلك ان Q لانهائية قابلة للعد ، اي ان Q باعتبارها مجموعة تكافيء N ، في حين ان غ (وكذلك R) لا نهائية غير قابلة للعد .

يجب ان نعرف ترتيبا على R فالمساواة على R تعني كما نعرف ك$_{س}$ = ك$_{ص}$ اذا وفقط اذا كان س $\sim$ ص اي ان س$_{ن}$ − ص$_{ن}$ $\to$ ٠ . لهذا وعلى سبيل المثال ، اذا كانت س = ($-\frac{١}{ن}$) فان ك$_{س}$ = ك$_{٠}$ مع ان س$_{ن}$ > ٠ لكل ن $\in$ N . لهذا لن نستفيد اذا قلنا ان ك$_{س}$ > ك$_{ص}$ تعني س$_{ن}$ > ص$_{ن}$ لكل ن $\in$ N .

سنعطي الآن تعريفا لـ $>$ في R بحيث نجعل R حقلا مرتبا ترتيبا كاملا.

الترتيب على R .

اذا كان $ك_س$ ، $ك_ص$ عنصرين في R فاننا نعرف $ك_س > ك_ص$ اذا وفقط اذا وجد ب $\in N$ ، و $\in Q$ ، و > 0 بحيث ان $س_ن - ص_ن \geqslant$ ولكل ن $>$ ب. والرمز $ك_ص < ك_س$ يعني $ك_س > ك_ص$ واذا كان $ك_س > 0$ فاننا نقول ان $ك_س$ عدد حقيقي موجب. واذا كان $ك_س \geqslant 0$ فاننا نقول ان $ك_س$ عدد حقيقي غير سالب.

المثال ٩.

اذا كان س = (٠ ، ٠ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، . . .) وص = (١ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، . . .) فان $ك_س > ك_ص$. ولا اهمية لكون $س_ن < ص_ن$ عند ن = ١ ، ٢ لان تعريف الترتيب يأخذ بعين الاعتبار $س_ن - ص_ن$ بوجه عام. وفي هذا المثال $س_ن - ص_ن \geqslant \frac{١}{٤}$ لكل ن $>$ ٢.

النظرية ١٤.

مجموعة الاعداد الحقيقية R هي حقل كامل الترتيب.

البرهان.

سنثبت $ت_١$ الى $ت_٤$ من النظرية ٥، مستبدلين عناصر Q بعناصر R مستخدمين تعريف الترتيب على R . لنأخذ $ت_١$ ولنفرض ان $ك_س \neq ك_ص$. اذن س $\not\sim$ ص ومنه س - ص $\in$ ك ولكن س - ص $\notin$ تق. ومن برهان النظرية ١٣ فانه يوجد ب $\in N$ وعدد نسبي

و > ٠ بحيث ان $|$ س ن − ص ن $| \leqslant$ و لكل ن > ب . . (١٨)

وبما ان س − ص ∋ ك فانه يوجد نٍ = نٍ $(\frac{و}{٢})$ بحيث ان

$|$ (س ن − ص ن) − (س ر − ص ر) $| < \frac{و}{٢}$ لكل ن ، ر $\leqslant$ نٍ . . . . (١٩)

لنأخذ ن = نٍ + ب، ان ن > نٍ و ن > ب. فمن (١٨) وقانون التثليث في Q فانه اما ان يكون س ن − ص ن > ٠ أو س ن − ص ن < ٠ اذا كان س ن − ص ن > ٠، فإن س ن − ص ن $\leqslant$ و ولهذا فإن (١٩) تعطي

$$س_ر - ص_ر > س_ن - ص_ن - \frac{و}{٢} \leqslant و - \frac{و}{٢} \text{ لكل } ر \leqslant نٍ.$$

ومنه ك س > ك ص من تعريف الترتيب على R (حيث استبدلت ب بـ نٍ و و بـ $\frac{و}{٢}$). فاذا تحققت الحالة الثانية س ن − ص ن < ٠، فان نفس المناقشة تبين ان ص ر − س ر > $\frac{و}{٢}$ لكل ر $\leqslant$ نٍ واذن ك س < ك ص. وهذا يثبت ت$_١$.

سنبرهن الآن ت$_٣$ ونترك ت$_٢$، ت$_٤$ كتمارين. لنفرض ان ك س < ك ص اذن ص ن − س ن $\leqslant$ و لكل ن > ب ومنه (ص ن + ع ن) − (س ن + ع ن) $\leqslant$ و لكل ن > ب. لهذا فان ك ص+ع > ك س+ع، اي ان ك ص + ك ع > ك س + ك ع، وهذا يثبت ت$_٣$.

لقد عرفنا في السابق اكبر حد واصغر حد للنوني المرتب من الاعداد النسبية. وبطريقة مشابهة، اذا كان (س$_١$، س$_٢$، . . .، س ن)، ن من الاعداد الحقيقية المرتبة س$_١$، س$_٢$، . . .، س ن فانه يوجد ب حيث ١ $\leqslant$ ب $\leqslant$ ن ويوجد حـ حيث ١ $\leqslant$ حـ $\leqslant$ ن تحققان س ر $\leqslant$ س ب، س ر $\leqslant$ س حـ لجميع ١ $\leqslant$ ر $\leqslant$ ن. اي انه

س ب = أك (س$_١$، س$_٢$، . . .، س ن) وس حـ = أص (س$_١$، س$_٢$، . . .، س ن).

ويمكن تعميم مسلمة ارخميدس من Q^+ الى R^+، حيث Q^+ (R^+) ترمزان للاعداد النسبية (الحقيقية) الموجبة.

النظرية ١٥ [مسلمة ارخميدس على R]

اذا كان س ∋ R^+ فانه يوجد ن ∋ N بحيث ان ن > س.

البرهان.

س = ك$_{ص}$ لمتتالية ما ص = (ص$_{ر}$) ∈ ك، فمن النظرية ٩ يوجد م ∈ Q^+ بحيث ان |ص$_{ر}$| ≥ م لكل ر ∈ N . اذن ص$_{ر}$ ≥ م لكل ر ∈ N . ومسلمة ارخميدس على Q^+، تعطي ن ∈ N بحيث ان ن > م + ١، ومنه ن > ص$_{ر}$ + ١ لكل ر ≥ ١ . وباستخدام ن = ك$_{ن و}$ نحصل على ن > ك$_{ص}$ = س.

النظرية ١٦ [كثافة Q في R]

اذا كان أ ، ب ∈ R ، أ < ب فانه يوجد حـ ∈ Q بحيث ان أ < حـ < ب.

البرهان.

لتكن أ = ك$_{س}$ ، ب = ك$_{ص}$ حيث س ، ص ∈ ك، ص$_{ن}$ − س$_{ن}$ ≥ و > ٠ لكل ن > د. يوجد ن. ∈ N بحيث ان |س$_{ر}$ − س$_{ن}$| < $\frac{و}{٤}$ وكذلك |ص$_{ر}$ − ص$_{ن}$| < $\frac{و}{٤}$ لكل ن ، ر ≥ ن. . لنعرّف ط = د + ن. ، ف = س$_{ط}$ + $\frac{و}{٢}$ ∈ Q الآن ن>ط تعطي س$_{ن}$ + $\frac{و}{٤}$ < ف < ص$_{ن}$ − $\frac{و}{٤}$. اذن باستخدام ف = ك$_{ف و}$ نحصل على ك$_{س}$ < ف < ك$_{ص}$ ، مما يثبت النظرية.

وبما ان R حقل كامل الترتيب، فان بامكاننا ان نعرف القيمة المطلقة |س| لأي عدد حقيقي س كما فعلنا في Q ، اي ان |س| = س اذا كان س ≥ ٠ و |س| = −س اذا كان س < ٠.

اذن جميع النتائج المتعلقة بالقيمة المطلقة في النظرية ٧ تبقى صحيحة عند استبدال الاعداد النسبية بالاعداد الحقيقية. وبشكل خاص فان المتباينة المثلثية تبقى صحيحة، أي ان:

|س + ص| ≥ |س| + |ص| لكل س ، ص ∈ R .

كذلك، التعاريف المتعلقة بالمتتاليات في البند الرابع يبقى لها نفس المعنى عند استبدال

الاعداد النسبية بالاعداد الحقيقية. مثلا، لنفرض ان س = (س $_ن$) هي متتالية حقيقية اي ان س : N ⟵ R . نقول ان المتتالية هي متتالية تقاربية (نهايتها أ ∈ R) : اذا وفقط اذا كان يوجد عدد أ ∈ R ، بحيث انه لكل عدد حقيقي ∈ > ٠ يوجد ن$_٠$ = ن$_٠$ (∈) بحيث ان | س $_ن$ - أ | > ∈ لكل ن ⩾ ن$_٠$. سوف نكتب كما في السابق نها س $_ن$ = أ، الخ.

لهذا فبامكاننا ان ندرس مجموعات المتتاليات التالية: تو$_٠$ ، تو، ك ، ل∞ ، حيث المتتاليات كلها حقيقية. وللتأكيد على ذلك سنكتب تو$_٠$ (R) ، تق(R) ، ك (R) ، ل∞ (R) للدلالة على المتتاليات الصفرية، والمتتاليات التقاربية الخ للاعداد الحقيقية.

وكما في النظرية ٩، بامكاننا اثبات ان

تق$_٠$ (R) ⊃ تق (R) ⊃ ك (R) ⊃ ل∞ (R) . . (٢٠)

المهم والجديد هنا ان الاحتواء تق (R) ⊃ ك (R) هو في الحقيقة مساواة. وهذه هي خاصية التمام لـ R التي سنثبتها الآن. وباقي الاحتواءات في (٢٠) هي احتواءات فعلية، ويتبين ذلك من امثلة النظرية ٩.

النظرية ١٧ [خاصية التمام في R]

تق (R) = ك (R) اي ان المتتالية الحقيقية تكون تقاربية اذا وفقط اذا كانت كوشية.

البرهان.

من (٢٠) نعرف ان تق (R) ⊃ ك (R). لهذا علينا ان نثبت ان ك (R) ⊃ تق (R). لنأخذ س ∈ ك(R). فمن تعريف المتتالية الكوشية، لكل ∈ > ٠ ، يوجد ن$_٠$ ∈ N بحيث ان | س $_ن$ - س $_ر$ | > $\frac{∈}{٣}$ لكل ن ، ر ⩾ ن$_٠$.

لنأخذ ن ∋ N . اذن $-\frac{1}{ن} < \frac{1}{ن}$، ومنه س ن $- \frac{1}{ن} <$ س ن $+ \frac{1}{ن}$، ومن النظرية ١٦ نستنتج انه يوجد ب ن ∋ Q بحيث ان

$$س_ن - \frac{1}{ن} < ب_ن < س_ن + \frac{1}{ن}،$$

$$|س_ن - ب_ن| < \frac{1}{ن}.$$

ومن المتباينة المثلثية للاعداد الحقيقية نحصل على

$$|ب_ر - ب_ن| \leqslant |ب_ر - س_ر| + |س_ر - س_ن| + |س_ن - ب_ن| < \frac{1}{ر} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{ن}، \text{ لكل } ن ، ر \geqslant ن_\circ .$$

ومن مسلمة ارخميدس لـ R نحصل على

$|ب_ر - ب_ن| < \epsilon$ ، لقيم كبيرة بما فيه الكفاية لِـ ن ، ر.

اذن المتتالية ب = (ب ن) هي كوشية نسبية. فلنأخذ ك ب ∋ R . سنثبت ان س ن ← ك ب (ن ← ∞)، وهذا يعني ان س = (س ن) ∋ تو($\bar{R}$). الآن

$$|س_ن - ك_ب| \leqslant |س_ن - ب_ن| + |ب_ن - ك_ب| < \frac{1}{ن} + |ب_ن - ك_ب| .$$

من مسلمة ارخميدس نحصل على $\frac{1}{ن} < \frac{\epsilon}{2}$ حيث قيم ن كبيرة بما فيه الكفاية، اذن يكفي ان تثبت ان

$$|ب_ن - ك_ب| < \frac{\epsilon}{2} \text{ لكل } ن \geqslant ن_1 \quad .. \qquad (21)$$

حيث ن١ عدد ما في N

ان $\in > 0$ ، لنفرض ان $ك_ع = \frac{\in}{٢}$، لهذا فانه يوجد $ر_٠ \in N$ ، و$\in Q^+$ بحيث ان

$ع_ر \leqslant و > 0$ لكل $ر > ر_٠$. وكذلك ب هي متتالية كوشية، فاذن $|ب_ن - ب_ر| < \frac{و}{٢}$ لكل

ن ، $ر \leqslant ن_١$ ، ومنه

$$- \frac{و}{٢} < ب_ن - ب_ر < \frac{و}{٢} \text{ لكل ر ، } ن \leqslant ن_١ \quad . \qquad (٢٢)$$

من (٢٢) $ب_ن - ب_ر + ع_ر > - \frac{و}{٢} + ع_ر \leqslant \frac{و}{٢}$ لكل $ن \leqslant ن_١$ و$ر > ر_٠ + ن_١$ لهذا

نحصل على

$$ك_{(ب_ن ، ب_ن ، ب_ن ، \ldots)} - ك_ب + ك_ع > 0 \text{ لكل } ن \leqslant ن_١$$

وهـذا يثبت جزءا من (٢١) . وبطريقة مشابهة وباستخدام $ب_ن - ب_م < \frac{و}{٢}$ في (٢٢)
نحصل على $ب_ن - ك_ن < \frac{\in}{٢}$ لكل $ن \leqslant ن_١$ ، وهذا هو الجزء الثاني من (٢١) .
وهذا ينهي برهان النظرية ١٧ .

تمارين ٢ ـ ٥

(في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اثبت ان التشاكل ق : $Q \longrightarrow$ ج المعرف في البند ٥ بـ $ق(ر) = ك_{رو}$ لكل $ر \in Q$ يحافظ

على الترتيب اي انه اذا كان $ر_١ < ر_٢$ في Q فان $ق(ر_١) < ق(ر_٢)$ في R .

٢ ـ اكمل برهان النظرية ١٤ باثبات ان $ك_س < ك_ص$ و$ك_ص < ك_ع$ تتضمن $ك_س < ك_ع$ ،
وكذلك $ك_س < ك_ص$ و $0 < ك_ع$ تتضمن $ك_س ك_ع < ك_ص ك_ع$.

٣ ـ لنفرض ان س ، ص $\in$ R . اثبت ان | س + ص | = | س | + | ص | اذا وفقط اذا كان س ص $\geqslant$ ٠ .

٤ ـ [نفرض هنا ان القارىء على معرفة بسيطة بالنظام العشري] .
اثبت ان $\sqrt{٢}$ > ٠ . ثم استنتج ان $\sqrt{٢}$ > ١,٤ باستخدام أ^٢ - ب^٢ = (أ - ب) (أ + ب)، اثبت ان $\sqrt{٢}$ > ١,٤١٤٢٨٦ . استخدم هذا التقريب العلوي لـ $\sqrt{٢}$ لايجاد تقريب سفلي افضل من ١,٤ .

٥ ـ اثبت ان $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٣}$ هو عدد غير نسبي .

٦ ـ لنفرض ان أ ، ب ، حـ $\in$ Q وحـ > ٠ . اثبت ان أ + $\sqrt{٢}$ = ب + $\sqrt{حـ}$ تعطي أ = ب وحـ = ٢ .

٧ ـ اذا كانت س $\in$ R فاثبت ان س^٢ $\geqslant$ ٠ . ومنه اثبت ان أ^٢ + ب^٢ $\geqslant$ ٢ أ ب ، ونحصل على المساواة اذا وفقط اذا كان أ = ب .

٨ ـ لنفرض ان (س$_ن$) هي متتالية حقيقية تحقق -١ $\leqslant$ س$_ن$ $\leqslant$ ٠ لكل ن $\in$ N . اثبت ان
(١ + س$_١$) (١ + س$_٢$) . . . (١ + س$_ن$) $\geqslant$ ١ + س$_١$ + س$_٢$ + . . . + س$_ن$.

٩ ـ لنفرض ان س $\in$ R ، س $\geqslant$ -١ . اثبت انه لكل ن $\in$ N، (١ + س)^ن $\geqslant$ ١ + ن س و (١ + س)^ن $\geqslant$ ١ + ن س + ن (ن - ١) $\frac{س^٢}{٢}$ + ن (ن - ١) (ن - ٢) $\frac{س^٣}{٦}$.

اذا كان ص $\in$ R و (١ + ص)^ن $\geqslant$ ١ + ن ص + ن (ن - ١) $\frac{ص^٢}{٢}$ لكل ن $\in$ N، ما هي المتباينة التي يجب ان تحققها ص؟

١٠ ـ لنفرض ان س $\geqslant$ -١ و ن $\geqslant$ ٢ . جد شرطا ضروريا وكافيا على س ، بحيث يكون (١ + س)^ن = ١ + ن س .

١١ ـ لنفرض ان س عدد حقيقي ثابت . فاذا كان س < ϵ لكل ϵ > ٠ فاثبت ان س $\leqslant$ ٠

لنفرض ان (أ$_ن$)، (ب$_ن$) هما متتاليتان حقيقيتان متقاربتان ، نهايتاهما أ ، ب على

التوالي. فاذا كان $أ_ن \geqslant ب_ن$ لكل $ن \in N$ فاثبت ان $أ \geqslant ب$. لاحظ ان هذه النتيجة تبين ان بامكاننا اخذ نهايتي طرفي المتباينة عندما تكون النهايتان موجودتين.

١٢ ـ لنفرض ان $س \in R$ جد $\delta > ٠$ بحيث ان $|س - ١| < \delta$ تتضمن $|س^٢ - ١| < ١$.

عمم هذه النتيجة وجد $\delta = \delta$ (أ ، $\in$) بحيث ان $|س - أ| < \delta$ تعطي $|س^٢ - أ^٢| < \in$ ، حيث $\in > ٠$.

١٣ ـ عرف س = (س $_ن$) بـ $س_ن = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \dots + \frac{١}{ن}$.

اثبت ان س $\notin$ ك وذلك بدراسة $|س_{٢ن} - س_ن|$. اثبت كذلك ان س $\notin$ ل∞ .

١٤ ـ عرف $س_١ = ١$ ، $س_{ن+١} = س_ن + ن$. ناقش سلوك (س $_ن$) عندما $ن \leftarrow \infty$.

٦. الاعـداد المـركبة

اذا كان $س \in R$ فانه، ومن قانون التثليث، إما أن تكون $س = ٠$ ، أوس > ٠ ، أوس < ٠ ، ففي الحالة الاولى $س^٢ = ٠$ وفي الحالة الثانية $س^٢ > ٠$ وفي الحالة الثالثة $-س > ٠$ ومنه $س^٢ = (-س)^٢ > ٠$ اذن $س^٢ \geqslant ٠$ لكل $س \in R$. لهذا فانه لا حل للمعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ في R . فاذا كنا نرغب في الحصول على حل فيجب ان نوسع الحقل R الى حقل يحتوي على حل.

الطريقة البدائية هي ان نفترض انه يوجد «عدد ما» ت هو حل، اي ان $ت^٢ + ١ = ٠$ ، أو $ت^٢ = -١$. هذه هي الطريقة التي عولج بها الامر في السابق. وبسبب الغموض الذي يحيط بالعدد ت سمي عددا «تخيليا». ولكننا ما زلنا نستعمل هذه التسمية مع ان الغموض قد ازاله استخدام الازواج المرتبة. ومع هذا فان الطريقة البدائية تعطي حافزا جيدا. لنأخذ س ، ص

$\in$ R . لنفـرض انـه بالامكـان تكـوين «اعـداد مركبة» على شكل س + ت ص تنطبق عليها شروط الحقل ما عدا اننا نستبدل ت^{٢} = ت ٠ ت بالعدد -١ . فبامكاننا ان نجمع وان نضرب على النحو التالي:

(س + ت ص) + (سَ + ت صَ) = (س + سَ) + ت (ص + صَ) (٢٣)

(س + ت ص) (سَ + ت صَ) = (س سَ - ص صَ) + ت (س صَ + ص سَ) (٢٤)

تمكننـا المعـادلتـان (٢٣) ، (٢٤) من وضـع الاشياء بدقة الشيءالاساسي في س + ت ص هو انه زوج مرتب«ع = (س ، ص)»من الاعداد الحقيقية س وص، اي ان ع $\in$ R X R . وهكذا بأخذ (س ، ص) لم نعد بحاجة الى استخدام ت، وهوغير معرف» وينتج أنه هو الزوج (٠ ، ١).

نعرف الجمع والضرب على R X R باستخدام (٢٣) ، (٢٤):

(س ، ص) + (سَ ، صَ) = (سُ + سَ ، ص + صَ) (٢٥)

(س ، ص) (سَ ، صَ) = (س سَ - ص صَ ، س صَ + ص سَ) (٢٦)

ونعرف $\mathbb{C}$ على انه R X R مع العمليتين المعرفتين في (٢٥) و(٢٦) ونسمي $\mathbb{C}$ حقل الاعداد المركبة ويحتوي هذا الحقل على حل للمعادلة س٢ + ١ = ٠. وهذا ما سوف نثبته.

النظرية ١٨:

ان $\mathbb{C}$ حقل صفره (٠ ، ٠) وعنصره المحايد (١ ، ٠) وحقل الاعداد الحقيقية R يشاكل حقـلا جزئيـا ج من $\mathbb{C}$. وبمطـابقة (١ ، ٠) $\in$ ج مع ١ $\in$ R و(٠ ، ٠) $\in$ ج مع ٠ $\in$ R ، نحصل على ان العنصر ت = (٠ ، ١) $\in$ $\mathbb{C}$ يحقق ت^{٢} + ١ = ٠.

البرهان.

من الـواضـح ان (٢٥) ، (٢٦) تعـرفان عمليتين ثنائيتين. فمن (٢٥) يتضح ان ($\mathbb{C}$ ، +) هي زمرة تبديلية صفرها (٠ ، ٠) ونظير (س ، ص) في ($\mathbb{C}$ ، +) هو(-س ، -ص).

ومن (٢٦) نحصل على (سَ ، صَ) (س ، ص) = (سَ س - صَ ص ، سَ ص + صَ س) = (س ، ص) (سَ ، صَ) لان R هو حقل. لهذا فان الضرب في $\mathbb{C}$ تبديلي. وبوضع سَ = ١ ، صَ = ٠ في (٢٦) فان الطرف الايسر يصبح (س ، ص) ومنه نستنتج ان (١ ، ٠) هو العنصر المحايد لعملية الضرب في $\mathbb{C}$. بقي ان نتحقق من خاصيتي التجميع والتوزيع، ومن وجود نظير في عملية الضرب لجميع عناصر $\mathbb{C}$ عدا الصفر. سنترك التحقق من خاصية التجميع كتمرين.

لاثبات خاصية التوزيع، لنأخذ $ع_ر = (س_ر ، ص_ر) \in \mathbb{C}$ ، ر = ١ ، ٢ ، ٣. من (٢٥) و(٢٦). نجد ان $ع_١ ع_٢ + ع_١ ع_٣ =$

$(س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢ ، س_١ ص_٢ + ص_١ س_٢)$

$+ (س_١ س_٣ - ص_١ ص_٣ ، س_١ ص_٣ + ص_١ س_٣)$

$= (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢ + س_١ س_٣ - ص_١ ص_٣ ، س_١ ص_٢ + ص_١ س_٢ + س_١ ص_٣ + ص_١ س_٣)$

$= (س_١ \{ س_٢ + س_٣ \} - ص_١ \{ ص_٢ + ص_٣ \} ، س_١ \{ ص_٢ + ص_٣ \} + ص_١ \{ س_٢ + س_٣ \})$

$= ع_١ (ع_٢ + ع_٣)$

لنأخذ الآن ع = (س ، ص) ≠ (٠ ، ٠). اذن أ = $س^٢ + ص^٢ > ٠$، لأن $س^٢ + ص^٢ = ٠$ تعطي س = ٠ = ص مما يناقض ع ≠ (٠ ، ٠). لنأخذ $\hat{ع} = (\frac{س}{أ} ، \frac{-ص}{أ})$. (٢٦)

تعطي $ع \hat{ع} = (\frac{س^٢ + ص^٢}{أ} ، ٠) = (١ ، ٠)$،

اي ان $\hat{ع}$ هو نظير ع ≠ (٠ ، ٠) في عملية الضرب. اذن $\mathbb{C}$ حقل.

وانه لامر في غاية البساطة اثبات ان الاقتران ق: R ← C المعرف بـ ق(س) = (س ،٠)
هو تشاكل، لهذا فان R تشاكل الحقل الجزئي ج = { (س ، ٠) | س∈ R } . لهذا فاننا
سنعامل العدد المركب (س ، ٠) على انه العدد الحقيقي س.

اخيرا بتعريف ت على انه (٠ ، ١) و(٢٥) و(٢٦) نحصل على $ت^٢ + ١ =$
(٠ ، ١) (٠ ، ١) + (١ ، ٠) = (-١ ، ٠) + (١ ، ٠) = (٠ ، ٠) = ٠ مما يثبت النظرية.

وقد جرت العادة على استعمال ع = (س ، ص) لترمز للعدد المركب، وسوف نسمي س جزء ع الحقيقي ونكتبه ح (ع)، ونسمي ص جزء ع التخيلي، ونكتبه تخ (ع). لاحظ ان س ، ص عددان حقيقيان.

واي عدد على صورة (٠ ، ص)، اي جزؤه الحقيقي صفر، يسمى عددا تخيليا صرفا. واي عدد على صورة (س ، ٠) يسمى حقيقيا. لهذا فان (٠ ، -١) هو تخيلي صرف والعدد (٠ ، ٠) هو حقيقي وتخيلي صرف.

باستخدام هذا، فانه يمكن كتابة اي ع ∈ C على الشكل التالي:

ع = س + ت ص

= ح (ع) + ت تخ (ع).

لان (س ، ص) = (س ، ٠) + (٠ ، ص) = س + (٠ ، ١) (ص ، ٠) = س + ت ص

نذكر هنا ان (س ، ص) = (سَ ، صَ) تكافيء س = سَ و ص = صَ لهذا فان

س + ت ص = سَ + ت صَ اذا وفقط اذا كان س = سَ و ص = صَ.

ومنه اذا تساوت اعداد مركبة تساوت اجزاؤ ها الحقيقية واجزاؤ ها التخيلية.

بعد ان تم بناء Q ، R كحقلين، استطعنا ان نعرف ترتيبا كاملا عليهما. ولسوء الحظ من المستحيل تعريف ترتيب كامل على C . فبالحصول على حل للمعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ خسرنا الترتيب الكامل.

النظرية ١٩.

لا يوجد ترتيب كامل على حقل الاعداد المركبة $\mathbb{C}$.

البرهان.

لنفرض، ان امكن، انه يوجد ترتيب كامل $\wedge$. ولانه قد لا تكون هناك علاقة بين هذا الترتيب والترتيب الكامل $\lesssim$ على R ، استخدمنا له رمزا جديدا. الآن : ت$_1$ الى ت$_4$، من النظرية ٥، تنطبق على$\wedge$، بدلا من $<$ ، وعلى $\mathbb{C}$ بدلا من Q . فعلى سبيل المثال فان ت$_1$ تنص على انه اذا كان ع$_1$ ، ع$_2$ في $\mathbb{C}$ فان واحدة فقط من الحالات التالية يتحقق: ع$_1$ = ع$_2$ ، ع$_1$$\wedge$ع$_2$ ، ع$_2$$\wedge$ع$_1$.

لنكتب صـ = (٠ ، ٠) ، و= (١ ، ٠) ، ت = (٠ ، ١). فبما ان ت ≠ صـ فانه اما ان صـ$\wedge$ت أوت$\wedge$صـ ، من ت$_1$. ففي الحالة الاولى فان ت$_4$ تعطي صـ$\wedge$ت^2. وفي الحالة الثانية فان ت$_3$ تعطي ت + (-ت)$\wedge$(-ت) اي ان صـ$\wedge$(-ت)، ومن هذا، ومن ت$_4$، نحصل على صـ$\wedge$ ت^2. ففي الحالتين حصلنا على صـ$\wedge$ت^2. اذن من ت$_3$ نحصل على

و $\wedge$ صـ (٢٧)

وباستخدام ت$_4$ على صـ$\wedge$ت^2 نحصل على

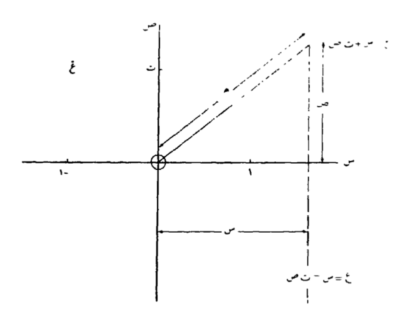
صـ$\wedge$و (٢٨)

لكن (٢٧) ، (٢٨) تعارضان ت$_1$. وهذا يثبت النظرية.

تدلنا النظرية ١٩ على انه يجب ان لا نكتب متباينات بين الاعداد المركبة ابدا. قد نكتب احيانا تخ (ع) $\leqslant$ ح (ع) لان طرفي المتباينة عددان حقيقيان. ولكن من الخطأ ان نكتب ح (ع) $<$ ع أوع $<$ ١، حيث ع عدد مركب.

المستوى المركب

يمكن ان نمثل الاعداد المركبة هندسيا كنقاط على المستوى (المستوى المركب):



فالمجموعة { (س ، ٠) | س ∈ R } هي المحور السيني، وتسمى المحور الحقيقي أو خط الاعداد الحقيقية. والمحور الصادي هو المجموعة { (٠ ، ص) | ص ∈ R } ، ويدعى المحور التخيلي. وفي الشكل السابق مثلنا عدة اعداد مركبة. فالعدد ل هو (-١ ، ١) أو -١ + ت. فلأي عدد ع = (س ، ص) = س + ت ص بينا ان عَ = (س ، -ص) = س − ت ص هو الانعكاس على المحور السيني للنقطة ع. نسمي عَ مرافق ع. وواضح من الشكل ان مرافق عَ هو ع، اي ان عَ̄ = ع.

هناك عدد آخر هام وهو م، المسافة بين ع ونقطة الاصل. نجد من نظرية فيثاغورس ان

س^{٢} + ص^{٢} = م^{٢}. وهكذا م = √(س^{٢} + ص^{٢})، الجذر التربيعي الموجب لـ س^{٢} + ص^{٢}. نسمي م مقياس ع ونكتب م = | ع | . وهذا يتفق مع تعريف القيمة المطلقة للاعداد الحقيقية.

لانه اذا كان ع = س + ت ص حقيقيا فان ص = ٠ ولهذا فان م = √(س^{٢}) = | س | :
اصبح الآن ضروريا ان نعرف المرافق والمقياس دون الرجوع الى التمثيل الهندسي.

المرافق والمقياس.

لنفرض ان ع = س + ت ص $\in \mathbb{C}$ ، نعرف مرافق ع على انه $\bar{ع}$ = س − ت ص، ومقياس ع على انه العدد الحقيقي غير السالب | م | = $\sqrt{س^{2} + ص^{2}}$.

النظرية ٢٠.

لنفرض ان $ع_{1}$ ، $ع_{2}$ عددان مركبان. اذن

(١) ح $(ع_{1}) = \frac{ع_{1} + \bar{ع}_{1}}{2}$ ، تخ $(ع_{1}) = \frac{ع_{1} - \bar{ع}_{1}}{2ت}$ ،

(٢) $\overline{ع_{1} + ع_{2}} = \bar{ع}_{1} + \bar{ع}_{2}$ ،

(٣) $\overline{ع_{1} ع_{2}} = \bar{ع}_{1} \bar{ع}_{2}$

(٤) $ع_{1} \bar{ع}_{1} = |ع_{1}|^{2}$

(٥) $|ع_{1}| \geqslant 0$ و $|ع_{1}| = 0$ اذا وفقط اذا كان $ع_{1} = 0$.

(٦) $|ع_{1}| = |-ع_{1}| = |\bar{ع}_{1}|$ ولكن $|ع_{1}|^{2} \neq ع_{1}^{2}$ بشكل عام.

(٧) $|ع_{1} ع_{2}| = |ع_{1}| |ع_{2}|$.

(٨) $|ح (ع_{1})| \leqslant |ع_{1}| \leqslant |ح (ع_{1})| + |تخ (ع_{1})|$ و $|تخ (ع_{1})| \leqslant |ع_{1}|$.

(٩) [المتباينة المثلثية] $|ع_{1} + ع_{2}| \leqslant |ع_{1}| + |ع_{2}|$.

(١٠) $|ع_{1} - ع_{2}| \geqslant ||ع_{1}| - |ع_{2}||$.

البرهان.

معظم البراهين مباشرة، لذلك سنعطي عينة من بعض البراهين. اذا كان $ع_{1} = س_{1} +$ ت $ص_{1}$ فان $\bar{ع}_{1} = س_{1} -$ ت $ص_{1}$، لهذا فان $ع_{1} - \bar{ع}_{1} = 2$ ت $ص_{1}$، وهو الجزء الثاني من

(١). كذلك $ع_{١}\bar{ع}_{١} = (س_{١} + ت ص_{١})(س_{١} - ت ص_{١}) = س_{١}^{٢} - ت^{٢} ص_{١}^{٢} = س_{١}^{٢} + ص_{١}^{٢} = |ع_{١}|^{٢}$، وهذا هو (٤).

الآن $-ع_{١} = -س_{١} - ت ص_{١}$ لهذا فان $(-س_{١})^{٢} = س_{١}^{٢}$ ، وكذلك $(-ص_{١})^{٢} = ص_{١}^{٢}$ وهذا يتضمن ان $|ع_{١}| = |-ع_{١}| = |\bar{ع}_{١}|$. ومن السهل رؤ ية هذه النتيجة في المستوى المركب. والجزء الثاني من (٦) يبين الفرق بين المقياس والقيمة المطلقة لأن $س \in R$ تعطي $س^{٢} = |س|^{٢}$. ومن الواضح ان $|ت|^{٢} = ١^{٢} = ١$، ولكن $ت^{٢} = -١$ وبشكل عام ان $|ع|^{٢} = ع^{٢}$ اذا وفقط اذا كان ع حقيقيا، الشرط المعروف لدينا. لنفرض ان $|ع|^{٢} = ع^{٢}$ فيكون $س^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} - ص^{٢} + ٢ ت س ص$ وبمساواة الاجزاء الحقيقية نحصل على $ص^{٢} = -ص^{٢}$ اي ان $٢ص^{٢} = ٠$، $ص = ٠$ اي ان ع عدد حقيقي.

لاثبات (٧) لنأخذ $|ع_{١}ع_{٢}|^{٢} = (ع_{١}ع_{٢})(\overline{ع_{١}ع_{٢}}) = ع_{١}\bar{ع}_{١}ع_{٢}\bar{ع}_{٢} = |ع_{١}|^{٢}|ع_{٢}|^{٢} = (|ع_{١}| \cdot |ع_{٢}|)^{٢}$. ومنه تتبع النتيجة.

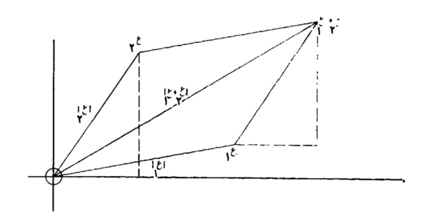
اذا كان $ع = س + ت ص$ فان $|س|^{٢} = س^{٢} \leqslant س^{٢} + ص^{٢} = |ع|^{٢}$ واذن $|ح(ع)| \leqslant |ع|$. وبطريقة مشابهة $|تخ(ع)| \leqslant |ع|$. كذلك، $|ع|^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} = |س|^{٢} + |ص|^{٢} \leqslant (|س| + |ص|)^{٢}$، ومنه $|ع| \leqslant |س| + |ص|$ ، وهذا يثبت (٨).

واهمية المتباينة المثلثية (٩) في الاعداد المركبة كاهميتها في الاعداد الحقيقية. ولاثباتها نأخذ $|ع_{١} + ع_{٢}|^{٢} = (ع_{١} + ع_{٢})(\overline{ع_{١} + ع_{٢}}) = (ع_{١} + ع_{٢})(\bar{ع}_{١} + \bar{ع}_{٢}) = |ع_{١}|^{٢} + |ع_{٢}|^{٢} + ٢ح(ع_{١}\bar{ع}_{٢})$.

ومن (٨) نحصل على $|ع_{١} + ع_{٢}|^{٢} \leqslant |ع_{١}|^{٢} + |ع_{٢}|^{٢} + ٢|ع_{٢}\bar{ع}_{١}| = (|ع_{١}| + |ع_{٢}|)^{٢}$ ، ومنه $|ع_{١} + ع_{٢}| \leqslant |ع_{١}| + |ع_{٢}|$.

ويمكن تمثيل المتباينة المثلثية في المستوى المركب كما في الشكل التالي

انها تنص هندسياً على ان مجموع طولي اي ضلعين في المثلث اكبر من اويساوي طول الضلع الثالث. وعلى القاريء ان يفحص هندسياً وتحليلياً متى تحدث المساواة، اي متى يكون



$|ع_1 + ع_2| = |ع_1| + |ع_2|$.

المثال ١٠

لنجد ع ∋ ℂ بحيث ان $ع^2 = ت$. من الواضح انه اذا كان ع حلا فان −ع هو الحل الـوحيد الآخر. واذا كان ع = س + ت ص حلا فان $س^2 - ص^2 + ٢ ت س ص = ت$ ومنه $س^2 =$ $ص^2$ و٢س ص = ١ اذن س = ± ص. اذا كان س = ص فان $٢س^2 = ١$ ومنه $س = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

. ليكن التأكد مباشرة من ان $ع = \frac{١ + ت}{\sqrt{٢}}$ هو حل للمعادلة $ع^2 = ت$.

لاحظ اننا لا نستطيع التحدث عن الجذر التربيعي الموجب لانه لا يمكن تعريف ترتيب على ℂ . لهذا فان الرمز $\sqrt{ت}$ غامض وكذلك $\sqrt{-١}$ ، لهذا لن نستخدمهما. ولكن لا ضرر من القول ان $\sqrt{ت}$ يمثل الحل ذا الجزء الحقيقي الموجب للمعادلة $ع^2 = ت$.

المثال ١١ .

لنجد شرطا ضروريا وكافيا على ع ∋ ℂ بحيث ان $|ع - ١| = |ع + ١|$. فاذا فكرنا

في $|ع_1 - ع_2|$ على انه البعد بين $ع_1$ و$ع_2$ في المستوى المركب، ونحن نبحث عن ع بحيث ان بعدها عن ١ يساوي بعدها عن -١ . فمن الواضح ان ع يجب ان يكون عددا تخيلياً صرفاً.

لاثبات ذلك، لنفرض ان ع = ت ص إذن ع - ١ = -١ + ت ص و ع + ١ = ١ + ت ص وإذن $|ع - ١| = |ع + ١| = \sqrt{١ + ص^٢}$. وبالعكس، اذا كان ع = س + ت ص و $|ع - ١| = |ع + ١|$ فان $(س - ١)^٢ + ص^٢ = (س + ١)^٢ + ص^٢$ ومنه ٤س = ٠ ، أي س = ٠ وإذن ع = ت ص.

المثال ١٢ .

اذا كان $|ع_1| \leqslant ١$ ، $|ع_2| \leqslant ١$ لنبرهن على ان $|ع_1 + ع_2| \leqslant |١ + \bar{ع}_1 ع_2|$.

من المفيد عادة تربيع المقاييس عند دراسة متباينات مقاييس الاعداد المركبة ومن ثم استخدام $|ع|^٢ = ع\bar{ع}$ من النظرية ٢٠ . الآن

$$|١ + \bar{ع}_1 ع_2|^٢ - |ع_1 + ع_2|^٢ = (١ + \bar{ع}_1 ع_2)(١ + ع_1 \bar{ع}_2) - (ع_1 + ع_2)(\bar{ع}_1 + \bar{ع}_2)$$

$$= ١ - |ع_1 ع_2|^٢ - |ع_1|^٢ - |ع_2|^٢ .$$

$$= (١ - |ع_1|^٢)(١ - |ع_2|^٢) \geqslant ٠$$

لان $|ع_1|^٢ \leqslant ١$ ، $|ع_2|^٢ \leqslant ١$. ومنه تتبع النتيجة. لاحظ اننا نحصل على مساواة، اذا وفقط اذا كان $|ع_1| = ١$ أو $|ع_2| = ١$.

تمارين ٢ ـ ٦

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اذا كان ع ≠ ٠ فاثبت ان $ع^{-١} = \frac{\bar{ع}}{|ع|^٢}$. اكتب $\frac{٣ - ٤ت}{٢ - ت}$ على صورة س + ت ص.

٢ ـ اذا كان ع $\neq$ ٠ فاثبت ان $\overline{\left(\frac{١}{ع}\right)} = \frac{١}{\bar{ع}}$ وكذلك $\left|\frac{١}{ع}\right| = \frac{١}{|ع|}$.

٣ ـ اثبت ان ع عدد حقيقي اذا وفقط اذا كان $\bar{ع} = ع$.

٤ ـ لنفرض ان أ. ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، . . . . ، $أ_ن \in R$ ولنفرض ان ع هو حل للمعادلة أ. + $أ_١ ع$ + $أ_٢ ع^٢$ + . . . + $أ_ن ع^ن$ = ٠ . اثبت ان $\bar{ع}$ هو أيضا حل.

٥ ـ حل $ع^٣ = ١$ باستخدام $ع^٣ - ١ = (ع - ١)(ع^٢ + ع + ١)$.

٦ ـ حل $ع\bar{ع} + ٢ع = ٤ + ٢ت$.

٧ ـ اثبت ان $|ع_١ + ع_٢|^٢ + |ع_١ - ع_٢|^٢ = ٢(|ع_١|^٢ + |ع_٢|^٢)$.

٨ ـ اذا كان $|ع| = ١$ وع $\neq$ ١، فجد قيمة ح $\left\{ \frac{(ع + ١)}{(ع - ١)} \right\}$.

٩ ـ اي من شروط الزمر تتحقق على $\{ع \in \mathbb{C} \mid |ع| = ١\}$ مع عملية (أ) الجمع، (ب) الضرب، (حـ) العملية * المعرفة بـ $ع_١ * ع_٢ = ع_٢ |ع_١|$.

١٠ ـ لنفرض ان $ع_١$ ، $ع_٢ \in \mathbb{C}$. عرف م $(ع_١ ، ع_٢) = |ع_١ - ع_٢|$ ، اي البعد بين $ع_١$ ، $ع_٢$. اثبت ان م $(ع_١ ، ع_٢) = ٠$ اذا وفقط اذا كان $ع_١ = ع_٢$ ، وَم $(ع_١ ، ع_٢)$ = م $(ع_٢ ، ع_١)$. اذا كان $ع_٣ \in \mathbb{C}$ فاثبت ان م $(ع_١ ، ع_٢) \leqslant$ م $(ع_١ ، ع_٣)$ + م $(ع_٢ ، ع_٣)$.

١١ ـ اذا كان س ، ص $\in R$ فاثبت ان $|س + ت ص| \leqslant |س| + |ص| \leqslant \sqrt{٢}\,|س + ت ص|$.

١٢ ـ لنفرض ان $ع_ر \in \mathbb{C}$ ، $أ_ر \in R$ وَ$|ع_ر| \leqslant ١$ ، $أ_ر \geqslant ٠$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} أ_ر \leqslant ١$. اثبت ان $\left|\sum_{ر=١}^{ن} أ_ر ع_ر\right| \leqslant ١$.

١٣ ـ لنفرض ان $|أ| < ١$. عرّف $ع_٢ = \frac{ع_١ - أ}{١ - \bar{أ}ع_١}$. اثبت ان $|ع_١| < ١$ تتضمن $|ع_٢| < ١$ ، وان $|ع_١| = ١$ تتضمن $|ع_٢| = ١$.

١٤ - لنفرض ان تخ (أ) $>$ ٠ ، تخ (ع$_١$) $>$ ٠ . فاذا كان ع$_٢$ = $\frac{ع_١ - أ}{ع_١ - \bar{أ}}$ اثبت ان | ع$_٢$ | $<$ ١ .

١٥ - لتكن س = { ع $\in$ $\mathbb{C}$ | ح (ع) $>$ ٠ } ، هندسيا فان س هي نصف المستوى الايمن ، ولتعرف عملية * بـ ع$_١$ * ع$_٢$ = $\frac{ع_١ + ع_٢}{١ + ع_١ ع_٢}$. اثبت ان ١ + ع$_١$ ع$_٢$ $\neq$ ٠ لكل ع$_١$ ، ع$_٢$ $\in$ س ، وان * هي عملية ثنائية على س . هل لهذه العملية خاصية التجميع؟ هل هناك عنصر محايد في س ؟

١٦ - لنفرض ان أ ، ب ، حـ ، د $\in$ R و أ د - ب حـ $>$ ٠ ، ليكن ق(ع) = $\frac{أ ع + ب}{حـ ع + د}$.

اثبت ان ق هو اقتران شامل من النصف العلوي للمستوى { ع $\in$ $\mathbb{C}$ | تخ (ع) $>$ ٠ } الى نفسه . ما هي صورة النصف العلوي من المستوى اذا كان أ د - ب حـ $<$ ٠ .

٧ . المتباينات

من خصائص التحليل الهامة احتواؤه على العدد الكبير من المتباينات المفيدة . وسنعرض في هذا البند بعض المتباينات البسيطة التي قد يحتاج اليها المبتدىء .

يجب ان نؤكد من الآن اننا نكتب متباينات بين الاعداد الحقيقية فقط ، ولا نكتبها ابدا بين الاعداد المركبة . ولكن قد تظهر الاعداد المركبة في المتباينات . فعلى سبيل المثال ، تنص المتباينة المثلثية على ان | ع$_١$ + ع$_٢$ | $\leqslant$ | ع$_١$ | + | ع$_٢$ | لأي عددين مركبين ع$_١$ ، ع$_٢$ لكن هذه المتباينة هي بين المقاييس ، وبالتعريف ان مقياس العدد المركب هو عدد حقيقي غير سالب .

النظرية ٢١ [المتباينة المثلثية].

$|ع_١ + ع_٢| \leqslant |ع_١| + |ع_٢|$ لأي $ع_١ ، ع_٢ \in \mathbb{C}$ وعلاوة على ذلك اذا كان $ع_٢ \neq ٠$
فان $|ع_١ + ع_٢| = |ع_١| + |ع_٢|$ اذا وفقط اذا كان $ع_١ = أع_٢$ حيث أ عدد حقيقي ، $أ \geqslant ٠$.

البرهان.

لقد اثبتنا في النظرية ٢٠ ان $|ع_١ + ع_٢| \leqslant |ع_١| + |ع_٢|$.
لنفرض الآن ان $ع_١ = أع_٢$ حيث $أ \geqslant ٠$. اذن
$|ع_١ + ع_٢| = |أع_٢ + ع_٢| = |ع_٢| (أ + ١) = |أع_٢| + |ع_٢| = |ع_١| + |ع_٢|$.
في هذا الجزء نرى اننا لا نحتاج لفرض ان $ع_٢ \neq ٠$
بالعكس، لنفرض ان $ع_٢ \neq ٠$ و $|ع_١ + ع_٢| = |ع_١| + |ع_٢|$. وبالتربيع واستخدام
$ع\bar{ع} = |ع|^٢$ نجد ان
$|ع_١|^٢ + |ع_٢|^٢ + ٢ح (ع_١\bar{ع}_٢) = |ع_١|^٢ + |ع_٢|^٢ + ٢ |ع_١ع_٢|$.
اذن $ح (ع_١\bar{ع}_٢) = |ع_١\bar{ع}_٢|$ ، وهذا على صورة $ح (ل) = |ل|$ ، حيث $ل = حـ + د ت$ ، حـ
، $د \in \mathbb{R}$. لهذا فان $حـ^٢ = |ل|^٢ = حـ^٢ + د^٢$ ومنه $د = ٠$ ، اي ان $ل = حـ = |ل|$. لهذا
فان $ع_١\bar{ع}_٢ = |ع_١\bar{ع}_٢|$ ومنه $ع_١\bar{ع}_٢ع_٢ = |ع_١\bar{ع}_٢| ع_٢$ ، وهذا يعطي $ع_٢ = أع_٢$ ، حيث أ =
$\frac{|ع_١\bar{ع}_٢|}{|ع_٢|^٢} \geqslant ٠$.

النظرية ٢٢ . [متباينة برنولي].

اذا كان $س \in \mathbb{R}$ ، $س \geqslant -١$ وَ $ن \in \mathbb{N}$ فان
$$(١ + س)^ن \geqslant ١ + ن س \qquad (٢٩)$$

البرهان :

لنستخدم الاستقراء : اذا كان ن = ١ فان (١ + س) ≥ ١ + س صحيحة. واذا كانت (٢٩) صحيحة نضرب الطرفين بالعدد غير السالب ١ + س فنحصل على

(١ + س)$^{ن+١}$ ≥ (١ + ن س) (١ + س) = ١ + (ن + ١) س + ن س^{٢} ≥ ١ + (ن + ١) س، لان ن س^{٢} ≥ ٠. فباستخدام الاستقراء اثبتنا النظرية.

النظرية ٢٣.

اذا كان أ > ١، فانه لكل ن ∈ N ، $\frac{أ^{ن} - ١}{ن} < \frac{أ^{ن+١} - ١}{ن + ١}$ . . . . (٣٠)

البرهان.

ان (٣٠) تكافيء المتباينات التالية :

(ن + ١) (أ^{ن} − ١) < ن (أ$^{ن+١}$ − ١)

(ن + ١) (أ − ١) (١ + أ + . . . + أ$^{ن-١}$) < ن (أ − ١) (١ + أ + . . . + أ^{ن})،

(ن + ١) (١ + أ + . . . + أ$^{ن-١}$) < ن (١ + أ + . . . + أ^{ن})،

١ + أ + . . . + أ$^{ن-١}$ < ن أ^{ن} . . (٣١)

لكن (٣١) صحيحة لان أ > ١ تتضمن ان أ^{ن} > أ$^{ن-ر}$ لكل ١ ≤ ر ≤ ن.

وهكذا اذا بدأنا بـ (٣١) نرى ان (٣٠) تتحقق.

نتيجة.

اذا كان أ > ١ وَ ٠ < ر < حـ حيث ر ، حـ ∈ Q فان $\frac{أ^{ر} - ١}{ر} < \frac{أ^{حـ} - ١}{حـ}$.

البرهان.

لنفرض ان $ر = \frac{ب}{د}$ ، $حـ = \frac{و}{م}$ حيث ب ، د ، و ، م $\in N$ ، اذن ر < حـ تتضمن

ب م < د و ومن (٣٠) ينتج انه اذا كان ص > ١ فان

$$\frac{ص^{بم} - ١}{ب م} < \frac{ص^{دو} - ١}{د و}$$

نحصل على النتيجة المطلوبة بأخذ $ص = أ^{\frac{١}{دم}}$.

النظرية ٢٤ . [متباينة كوشي وشوارتس] .

اذا كان $أ_١$ ، $أ_٢$ ، . . . ، $أ_ن$ و $ب_١$ ، $ب_٢$ ، . . . ، $ب_ن$ اعداداً حقيقية فان

$$\left(\sum_{ر=١}^{ن} أ_ر ب_ر\right)^٢ \leqslant \left(\sum_{ر=١}^{ن} أ_ر^٢\right)\left(\sum_{ر=١}^{ن} ب_ر^٢\right) \quad . . \qquad (٣٢)$$

البرهان.

للتبسيط سنستعمل $\sum$ ليرمز الى المجموع لـ $١ \leqslant ر \leqslant ن$. لأي حـ $\in R$ لاحظ ان

$\sum(أ_ر - حـ ب_ر)^٢ \geqslant ٠$ ومنه

$$أ - ٢ حـ د + حـ^٢ ب \geqslant ٠ ، \qquad (٣٣)$$

حيث $أ = \sum أ_ر^٢$ ، $د = \sum أ_ر ب_ر$ ، $ب = \sum ب_ر^٢$ ، لأن $ب \geqslant ٠$ ، فاذا كان ب = ٠ فان $ب_ر = ٠$ لكل $١ \leqslant ر \leqslant ن$. وتصبح (٣٢) $٠ \geqslant ٠$ وهي صحيحة.

اما اذا كان ب > ٠ فبامكاننا ان نأخذ $حـ = \frac{د}{ب}$ في (٣٣) لنحصل على

$$أ - \frac{٢د^٢}{ب} + \frac{د^٢}{ب} \geqslant ٠ ،$$

اي ان $أ - \frac{د^٢}{ب} \geqslant ٠$. واذن $د^٢ \geqslant أ ب$، وهي متباينة كوشي وشوارتس (٣٢).

المثال ١٣.

اذا كان $جـ_ر > ٠$ لكل $١ \geqslant ر \geqslant ن$، فان

$$(حـ_١ + حـ_٢ + \ldots + حـ_ن)\left(\frac{١}{حـ_١} + \frac{١}{حـ_٢} + \ldots + \frac{١}{حـ_ن}\right) \geqslant ن^٢.$$

لاثبات ذلك نأخذ $أ_ر = \sqrt{حـ_ر}$، $ب_ر = \frac{١}{أ_ر}$ في متباينة كوشي وشوارتس، لاحظ ان $\sum أ_ر ب_ر$ $= \sum ١ = ن$.

النظرية ٢٥.

لنفرض ان $س_ر > ٠$. اذن

$$س_١ س_٢ \ldots س_ن = ١ \text{ تعطي } س_١ + س_٢ + \ldots + س_ن \geqslant ن \qquad (٣٤)$$

البرهان.

لترمزج (ن) الى (٣٤). اذنج(١) صحيحة لان $س_١ = ١$ تعطي $س_١ \geqslant ١$. لنفرض الآن ان ج (ن) صحيحة. سوف نثبت ان ج (ن + ١) صحيحة. وبهذا يتم اثبات النظرية بالاستقراء.

لنفرض ان $أ = س_١ س_٢ \ldots س_{ن+١} = ١$. قد يكون $س_ر = ١$ لكل $١ \geqslant ر \geqslant ن + ١$. اذا حدث ذلك يكون $س_١ + س_٢ + \ldots + س_{ن+١} = ن + ١$، واذن تكون ج (ن + ١) صحيحة. وإلّا فانه يوجد ر بحيث ان $س_ر \neq ١$.

اذا كان $س_ر < ١$ فانه يوجد $س_و > ١$. لان أ = ١ . اذا كان $س_ر > ١$ فانه يوجد $س_و < ١$ ولهذا فانه يمكننا ان نفرض ان $س_١ < ١ < س_{ن+١}$.

بكتابة $ص_١ = س_١ س_{ن+١}$ نحصل على $ص_١ س_٢ س_٣ س_ن = ١$، وبما ان ج (ن) صحيحة ينتج ان

$$ص_١ + س_٢ + س_٣ + \ldots + س_ن \geqslant ن. \quad \quad (٣٥)$$

واذن

$$س_١ + س_٢ + \ldots + س_{ن+١} - (١ + ص_١ + س_٢ + \ldots + س_ن)$$

$$= س_١ + س_{ن+١} - ١ - س_١ س_{ن+١}$$

$$= (س_{ن+١} - ١)(١ - س_١) > ٠، \text{ لان } س_١ < ١ < س_{ن+١}.$$

ومن (٣٥) نحصل على $س_١ + س_٢ + \ldots + س_{ن+١} > ن + ١$، مما يثبت النظرية.

النظرية ٢٦ [متباينة الوسط الحسابي والوسط الهندسي].

اذا كانت $س_١$، $س_٢$، . . . ، $س_ن$ اعداداً حقيقية غير سالبة، فان الوسط الحسابي لهذه الارقام اكبر من او يساوي الوسط الهندسي اي ان

$$\frac{س_١ + س_٢ + \ldots + س_ن}{ن} \geqslant (س_١ س_٢ \ldots س_ن)^{\frac{١}{ن}}$$

البرهان.

اذا كان $س_ر = ٠$ لعدد ما ر فان (٣٦) تصبح واضحة لان الطرف الايسر يصبح صفراً، وطرفها الايمن غير سالب. والا فيكون $س_ر > ٠$ لكل $١ \leqslant ر \leqslant ن$، ولهذا فان

$$حـ = (س_١ س_٢ \ldots س_ن)^{\frac{١}{ن}} > ٠، \text{ ومنه}$$

$$\frac{س_١}{حـ} \cdot \frac{س_٢}{حـ} \ldots \frac{س_ن}{حـ} = ١$$

من النظرية ٢٥ ينتج ان

$$\frac{س_1}{حـ} + \frac{س_2}{حـ} + \ldots + \frac{س_ن}{حـ} \leqslant ن$$

وهذا يعطي (٣٦).

المثال ١٤.

باخذ $س_ر = ر$ في (٣٦) نحصل على $\frac{ن(ن+1)}{2ن} \leqslant (ن!)^{\frac{1}{ن}}$ ومنه

$$ن! \leqslant \left(\frac{ن+1}{2}\right)^ن \text{ لكل } ن \in N$$

النظريه التالية (النظرية ٢٧) تمهد لمتباينتين هامتين هما متباينتا هولدر ومنكوفسكي (النظرية ٢٨ والنظرية ٢٩). ويعتمد برهان نظرية ٢٧ على امور سنناقشها فيما بعد، وهي فكرة الاسس $س^أ$ وبعض النتائج من حساب التفاضل. ولكن من المفيد ان نعطي هذه المتباينات في هذا البند.

النظرية ٢٧.

لنفرض ان أ ، ب ، حـ ، د اعداد حقيقية بحيث ان $أ \leqslant 0$ ، $ب \leqslant 0$ ، $حـ > 1$ ،

$\frac{1}{حـ} + \frac{1}{د} = 1$. اذن

$$أب \leqslant \frac{أ^{حـ}}{حـ} + \frac{ب^{د}}{د} \quad \ldots (٣٧)$$

البرهان.

لاحظ ان $د = \frac{حـ}{حـ - 1} > 1$. اذا كان ب = ٠ فان $ب^2 = 0$ وتصبح (٣٧) $0 \geqslant \frac{أ^{حـ}}{حـ}$

وهذا صحيح لان $أ^{حـ} \geqslant ٠$.

لنأخذ الآن الاقتران ق (س) = ١ − ل + ل س − س ^{ل}. حيث ل = $\frac{١}{حـ}$ وس $\geqslant ٠$.

اذن ق (١) = ١ − ل + ل − ١ = ٠ ، ولكل س > ٠ تكون المشتقة قَ(س) = ل − ل س $^{ل-١}$.
واذا كان س > ١ فان س $^{ل-١}$ < ١ لان ل − ١ < ٠. اذن قَ(س) > ٠ اذا كان س > ١.
وعندما يكون ٠ < س < ١ نرى ان قَ(س) < ٠. وان ق(١) = ٠ ينتج ان ق(س) $\geqslant$ ٠
لكل س $\geqslant$ ٠ ومنه

$$س^{ل} \leqslant (١ - ل) + ل\ س \quad .. \qquad (٣٨)$$

لقد عالجنا الحالة ب = ٠ في (٣٧). لهذا افرض ان ب > ٠. اذا فرضنا ان

س = $أ^{حـ}$. $ب^{-د}$ في (٣٨) نحصل على

$$أ\ ب^{-\frac{د}{حـ}} \leqslant \frac{١}{د} + \frac{١}{حـ} أ^{حـ} ب^{-د}،$$

لهذا فان $أ\ ب^{د-\frac{د}{حـ}} \leqslant \frac{ب^{د}}{د} + \frac{أ^{حـ}}{حـ}$ ، وهي (٣٧)، لأن د − $\frac{د}{حـ}$ = ١.

النظرية ٢٨ [متباينة هولدر].

اذا كان حـ > ١ ، $\frac{١}{حـ} + \frac{١}{د}$ = ١ و$أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، . . . ، $أ_{ن} \geqslant ٠$، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ ،
. . . ، $ب_{ن} \geqslant ٠$، فان

$$\sum_{ر=١}^{ن} أ_{ر} ب_{ر} \leqslant (\sum_{ر=١}^{ن} أ_{ر}^{حـ})^{\frac{١}{حـ}} (\sum_{ر=١}^{ن} ب_{ر}^{د})^{\frac{١}{د}} \quad ... \qquad (٣٩)$$

البرهان.

لنرمز للطرف الايسر من (٣٩) بـ أ ب. فاذا كان أ ب = ٠ فان أ = ٠ أو ب = ٠. واذا

كان أ = ٠ فان $\sum أ_ر^{حـ} = ٠$ ومنه $أ_ر = ٠$ لكل ١ ⩽ ر ⩽ ن. واذا كان ب = ٠ نحصل ايضاً على (٣٩). اما اذا كان أ ب > ٠ فان (٣٧) تعطي

$$\frac{أ_ر}{أ} \cdot \frac{ب_ر}{ب} \leqslant \frac{أ_ر^{حـ}}{حـ أ^{حـ}} + \frac{ب_ر^{د}}{د ب^{د}} \quad \ldots \quad (٤٠)$$

لكل أ ⩽ ر ⩽ ن.وبأخذ المجموع ١ ⩽ ر ⩽ ن لطرفي (٤٠) نحصل على $\sum أ_ر ب_ر$

$\leqslant (\frac{١}{حـ} + \frac{١}{د})$ أ ب = أ ب ، مما يثبت (٣٩).

نتيجة.

اذا كان حـ = ٢ فان د = ٢ وَ(٣٩) تعطي

$$(\sum_{ر=١}^{ن} أ_ر ب_ر)^٢ \leqslant (\sum_{ر=١}^{ن} أ_ر^٢)(\sum_{ر=١}^{ن} ب_ر^٢)،$$

وهي متباينة كوشي وشوارتس (للاعداد غير السالبة $أ_ر$ ، $ب_ر$). لهذا فان متباينة هولدر للاعداد غير السالبة هي تعميم لمتباينة كوشي وشوارتس.

النظرية ٢٩ [متباينة منكوفسكي].

اذا كان حـ ⩾ ١، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، . . . ، $أ_ن$ ⩾ ٠ و$ب_١$ ، $ب_٢$ ، . . . ، $ب_ن$ ⩾ ٠، فان

$$[\sum_{ر=١} (أ_ر + ب_ر)^{حـ}]^{\frac{١}{حـ}} \leqslant (\sum_{ر=١} أ_ر^{حـ})^{\frac{١}{حـ}} + (\sum ب_ر^{حـ})^{\frac{١}{حـ}}،$$

حيث يؤخذ المجموع لقيم ر في الفترة ١ ⩽ ر ⩽ ن.

البرهان.

اذا كان حـ = ١ فان متباينة منكوفسكي تصبح $\sum_{ر} (أ_ر + ب_ر) \leqslant \sum أ_ر + \sum ب_ر$ وهي صحيحة (مساواة). لنفرض الآن ان حـ > ١. للتبسيط لن نكتب ر.

$$\sum (أ + ب)^{حـ} = \sum_{١} (أ + ب) (أ + ب)^{حـ-١}$$

$$= \sum أ(أ + ب)^{حـ-١} + \sum ب(أ + ب)^{حـ-١}$$

$$\leqslant (\sum أ^{حـ})^{\frac{١}{حـ}} (\sum (أ + ب)^{حـ})^{\frac{١}{د}}$$

$$+ (\sum ب^{حـ})^{\frac{١}{حـ}} (\sum (أ + ب)^{حـ})^{\frac{١}{د}} ، \quad \ldots \qquad (٤١)$$

من متباينة هولدر حيث استخدمنا (حـ − ١) د = حـ.

اذا كان $\sum (أ + ب)^{حـ} = ٠$ فان متباينة منكوفسكي تصبح واضحة، واذا كان $\sum (أ + ب)^{حـ} > ٠$ نقسم طرفي (٤١) على $(\sum (أ + ب)^{حـ})^{\frac{١}{د}}$ ونحصل على النتيجة المطلوبة.

تمارين ٢ ـ ٧

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اذا كان $ع_١ ، ع_٢ \in \mathbb{C}$ و أ > ٠ ، فاثبت ان

$$|ع_١ + ع_٢|^٢ \leqslant (١ + أ) |ع_١|^٢ + (١ + أ^{-١}) |ع_٢|^٢ .$$

٢ ـ اثبت ان $(٢ن + ١)^{ن} \leqslant (١ + ن + ن^٢) (ن + ١)^{ن-١}$ لكل $ن \in \mathbb{N}$.

٣ ـ باختيار س مناسب في متباينة برنولي اثبت ان

$$(١ + \frac{١}{ن - ١})^{ن} > (١ + \frac{١}{ن})^{ن+١} \text{ لِـ } ن = ٢ ، ٣ ، \ldots$$

٤ ـ اذا كان س ، ص $\geqslant$ ٠ ، أ ، ب $\in$ N ، فاثبت ان

$$\frac{س^{أ}\, ص^{ب}}{أ^{أ}\, ب^{ب}} \leqslant \left(\frac{س + ص}{أ + ب}\right)^{أ+ب} .$$

٥ ـ لنفرض ان حـ > ١ ، $\frac{١}{حـ} + \frac{١}{د} = ١$ و أ$_{ر}$ ، ب$_{ر}$ $\in$ C لـ ١ $\leqslant$ ر $\leqslant$ ن . اثبت ان

$$\left| \sum_{ر=١}^{ن} أ_{ر}\, ب_{ر} \right| \leqslant \left(\sum_{ر=١}^{ن} |أ_{ر}|^{حـ} \right)^{\frac{١}{حـ}} \left(\sum_{ر=١}^{ن} |ب_{ر}|^{د} \right)^{\frac{١}{د}} .$$

٦ ـ (١) لنفرض أن أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، . . . ، أ$_{ن}$ $\geqslant$ ٠ ، ٠ < و < م . استخدم متباينة هولدر لاثبات ان

$$\left(\frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} أ_{ر}^{و} \right)^{\frac{١}{و}} \leqslant \left(\frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} أ_{ر}^{م} \right)^{\frac{١}{م}} .$$

(٢) استخدم (١) لاثبات انه اذا كان أ ، ب ، حـ $\geqslant$ ٠ ، أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢} = ٨ فان أ^{٣} +

ب^{٣} + حـ^{٣} $\geqslant$ ١٦ $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$. وكذلك جد قيماً لـ أ ، ب ، حـ بحيث ان أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢} = ٨

و أ^{٣} + ب^{٣} + حـ^{٣} = ١٦ $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$.

٧ ـ اذا كان حـ $\geqslant$ ١ ، أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، . . . ، أ$_{ن}$ $\in$ C ، فاثبت ان

$$\left(\sum_{ر=١}^{ن} |أ_{ر}| \right)^{حـ} \leqslant ن^{حـ-١} \sum_{ر=١}^{ن} |أ_{ر}|^{حـ} .$$

٨ ـ تذكر ان R^{ن} هي مجموعة ن من الاعداد الحقيقية المرتبة س = (س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، . . . ، س$_{ن}$)
ليكن حـ $\geqslant$ ١ ، ولنكتب

$$||س|| = (\sum_{ر=1}^{ن} |س_ر|^{حـ})^{\frac{1}{حـ}}$$ ، لكل س ∈ $R^{ن}$.

لنعرف س + ص = (س$_1$ + ص$_1$ ، س$_2$ + ص$_2$ ، . . . ، س$_ن$ + ص$_ن$) ، أس = (أس$_1$ ، أس$_2$ ، . . . ، أس$_ن$) لكل س ، ص ∈ $R^{ن}$ وأ ∈ $\bar{R}$. مع هذه التعاريف تصبح $R^{ن}$ فضاءا خطياً حقيقياً. اي انه فضاء خطي على الحقل R .

اثبت ان :

(١) $||س|| = ٠$ اذا وفقط اذا كان س = (٠ ، ٠ ، . . . ، ٠)،

(٢) $||أس|| = |أ| \cdot ||س||$ ، لكل أ ∈ R ، س ∈ $R^{ن}$،

(٣) $||س + ص|| \leqslant ||س|| + ||ص||$ ، لكل س ، ص ∈ $R^{ن}$.

يدعى العدد الحقيقي غير السالب $||س||$: معيار س، وعندما حـ = ٢ نحصل على ما يسمى بمعيار اقليدس. لاحظ ان لمعيار س ∈ $\bar{R}^{ن}$ خواص مشابهة لخواص القيم المطلقة للاعداد الحقيقية ومقياس الاعداد المركبة.

ولأن $R^{ن}$ هو فضاء خطي ولأن $||س||$ تحقق (١) ، (٢) ، (٣) فان ($R^{ن}$ ، $||\cdot||$) هو مثال لفضاء خطي معياري.

ونظرية الفضاءات الخطية المعيارية لها اهميتها في موضوع التحليل الدالي. وتجد معلومات اولية عن هذه الفضاءات في كتاب للمؤلف عنوانه

«Elements of Functional Analysis»

٩ . [متباينة جنسن].

اذا كان ٠ < حـ < د ، أ$_1$ ، أ$_2$ ، . . . ، أ$_ن$ ⩾ ٠ ، اثبت ان

$$(\sum_{ر=1}^{ن} أ_ر^{د})^{\frac{1}{د}} \leqslant (\sum_{ر=1}^{ن} أ_ر^{حـ})^{\frac{1}{حـ}} .$$

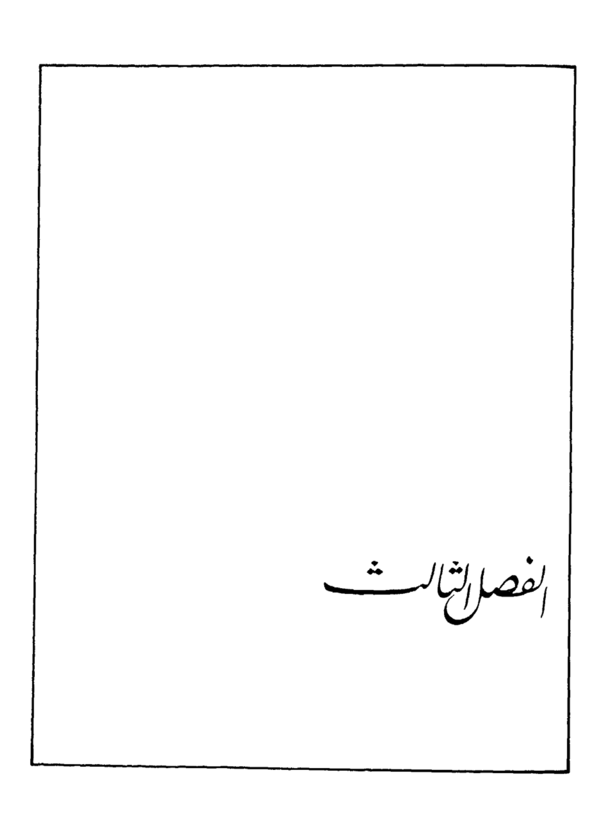
(ارشاد: عالج اولا الحالة أ = $\sum$ $أ_ر^{ح}$ = ٠، ثم في حالة أ > ٠، استخدم الحقيقة $\frac{أ_ر^{ح}}{أ}$

$\leqslant$ ١ لكل ١ $\leqslant$ ر $\leqslant$ ن).

١٠ ـ ثبِّت ن $\in$ N ، ولنفرض ان ٠ $\leqslant$ $أ_١$ $\leqslant$ $أ_٢$ $\leqslant$ ... $\leqslant$ $أ_ن$.

ولنفرض اننا على معرفة بالحقيقة $ن^{\frac{١}{ح}}$ ← ١ (ح ← ∞)، اثبت ان

$$\lim_{ح \to \infty} \left(\sum_{ر=١}^{ن} أ_ر^{ح} \right)^{\frac{١}{ح}} = أ_ن .$$



الفصل الثالث

مجموعات الأعداد

١ . مجموعات محصورة من الاعداد الحقيقية

نستخدم في هذا البند خاصية التمام في R (النظرية ١٧) لاثبات نظرية هامة تسمى «مسلمة الحد الاعلى». تنص هذه النظرية على أنه يوجد أصغر حاصر أعلى لكل مجموعة محصورة من أعلى وغير خالية من الاعداد الحقيقية. وسنعطي عدة تطبيقات لهذه النتيجة من ضمنها اثبات وجود جذر نوني موجب وحيد لكل عدد حقيقي موجب.

وسنعرف أولا فكرة المجموعة المحصورة من الاعلى، والمجموعة المحصورة من الاسفل، والمجموعة المحصورة. لاحظ التشابه مع المتتاليات المحصورة.

(أ) نقول ان المجموعة غير الخالية سہ $\subset$ R محصورة من الاعلى ، اذا وفقط اذا وجد عدد م $\in$ R بحيث ان س $\leqslant$ م لكل س $\in$ سہ . ونقول ان م هو حاصر اعلى لِـ سہ .

(ب) نقـول ان المجمـوعـة غير الخـاليـة سہ $\subset$ R محصـورة من أسفـل ، اذا وفقط اذا وجد ل $\in$ R بحيث ان س $\geqslant$ ل لكل س $\in$ سہ . ونقول ان ل هو حاصر اسفل لِـ سہ .

(حـ) نقول ان سہ $\subset$ R محصورة ، اذا وفقط اذا كانت محصورة من اعلى ومن اسفل .

المثال ١ .

(أ) لتكن سہ = { ٠ ، −١ ، −٢ ، −٣ ، . . . } . ان سہ محصورة من اعلى بالصفر ، اي ان س $\leqslant$ ٠ لكل س $\in$ سہ . لهذا فان الصفر هو حاصر اعلى لِـ سہ . لكن سہ غير محصورة من الاسفل لانه لكل ل $\in$ R ، وحسب مسلمة أرخميدس ، يوجد ن $\in$ N بحيث ان ن $>$ ل اي انه يوجد س $\in$ سہ بحيث ان س $<$ ل .

(ب) سہ = N محصورة من اسفل بـ ١ لكنها غير محصورة من اعلى .

(حـ) سہ = { $\frac{١}{ن}$ | ن $\in$ N } محصورة من أسفل بالصفر ومن اعلى بـ١ .

(د) س = { $\frac{١}{س}$ | ٠ $<$ س $<$ ١ } محصورة من اسفل بـ١ لكنها غير محصورة من اعلى .

لانه اذا كان ٠ $<$ س $<$ ١ فان ١ $<$ $\frac{١}{س}$ ، لهذا فان سہ محصورة من اسفل بـ١ . الآن لاي م $\in$ R خذ س = $\frac{١}{٢ + |م|}$. فتـكـون ٠ $<$ س $<$ ١ وَ $\frac{١}{س}$ = ٢+|م| $>$ م . واذن سہ غير محصورة من اعلى .

واذا كانت المجموعة محصورة من اعلى فانه يوجد حاصر أعلى ، لنقُل م . ومنه ينتج انه اذا كانت مَ > م ، فان مَ حاصر اعلى ايضا للمجموعة . ولكن اذا كان مَ < م فقد يكون مَ حاصرا اعلى وقد لا يكون . واذا كان مَ < م حاصرا اعلى فانه يكون افضل من م ، لانه اصغر . ومن المفيد ان نعرف فيما إذا كان يوجد أصغر حاصر أعلى ، أي : حاصر اعلى أصغر من او يساوي كل حاصر أعلى آخر .

لهذا يكون العدد الحقيقي م هو اصغر حاصر أعلى للمجموعة غير الخالية سه ، اذا وفقط اذا كان

س ≥ م لكل س ∈ سه . . . . (١)

ولكل و > ٠ يوجد س ∈ سه بحيث ان س > م - و . . . . (٢)

فنكتب م = ص.ح.ع (سه) . وتنص المتباينة (١) على ان م هو حاصر أعلى لِ سه وتنص (٢) على ان أي عدد اقل من م ، أي م - و لا يمكن ان يكون حاصرا أعلى لِـ سه . وهذا يعني ان م هو أصغر حاصر أعلى .

لاحظ اننا نتحدث عن اصغر حاصر أعلى كعنصر وحيد ، لانه اذا كان مَ هو اصغر حاصر أعلى آخر فان م ≥ مَ وكذلك مَ ≥ م ومنه م = مَ . اي انه اذا وجد لمجموعة ما اصغر حاصر أعلى فانه يكون وحيدا .

وبالمثل اذا كانت المجموعة محصورة من اسفل فإننا نتكلم عن اكبر حاصر أدنى ونعرفه كما يلي:

يكون العدد ل أكبر حاصر ادنى للمجموعة غير الخالية س ، اذا وفقط اذا كان

س ≤ ل لكل س ∈ سه . . (٣)

لكل و > ٠ يوجد س ∈ سه بحيث ان س < ل + و . . (٤)

ونكتب ل = ك.ح . د (سه) .

تنص المتباينة (٣) على ان ل هو حاصر ادنى لِـ سه وتنص (٤) على ان اي عدد اكبر من ل ، أي ل + و ، لا يمكن ان يكون حاصرا ادنى . فاذا وجد لمجموعة ما اكبر حاصر ادنى ، فانه يكون وحيدا .

سوف نثبت في النظرية ١ أن لكل مجموعة محصورة يوجد أصغر حاصر أعلى ، واكبر حاصر أدنى . ولكن قبل اعطاء البرهان لنناقش المثال ١ . في (أ) ان ص.ح.ع (سٍ) = ٠ ، لان س ⩾ ٠ لكل س ∈ سٍ ، وهكذا تتحقق (١) . لاحظ انه اذا كان و > ٠ فان ٠ تحقق، > ٠ - و ومنه تتحقق (٢) . وبالمثل في (ب) نرى ان ك.ح د (سٍ) = ١ . لاحظ ان ص.ح.ع (سٍ) ∈ سٍ في (أ) وك.ح.د (سٍ) ∈ سٍ في (ب) . لكن بشكل عام قد يكون اصغر حاصر اعلى وأكبر حاصر أدنى موجودين لمجموعة ما ولا ينتميان للمجموعة ؛ نرى ذلك في (حـ) ، حيث ك.ح.د (سٍ) = ٠ ∉ سٍ . في حين ان ص.ح.ع (سٍ) = ١ ∈ سٍ . لاثبات ان ك.ح.د (سٍ)

= ٠ لاحظ ان $\frac{١}{ن}$ > ٠ لكل ن ∈ N . لهذا فان (٣) تتحقق . والآن من مسلمة ارخميدس

نحصل على انه يوجد ن ∈ N بحيث ان ن > $\frac{١}{و}$ ومنه $\frac{١}{ن}$ < و وهكذا تتحقق (٤) ، واذن

ك.ح.د (سٍ) = ٠. وأخيراً في (د) من المثال (١) نحصل على $\frac{١}{س}$ > ١ لكل ٠ < س < ١ ،

لهذا فان (٣) تتحقق . واذا كان و > ٠ فاننا نختار س بحيث ان $\frac{١}{١ + و}$ < س < ١ . لهذا

فان ٠ < س < ١ وَ $\frac{١}{س}$ < ١ + و ، وتتحقق (٤) . اذن ك.ح.د (سٍ) = ١ ، وفي الحقيقة ١ ∉ سٍ .

النظرية ١ . [مسلمة الحاصر الاعلى في R] .

اذا كانت سٍ مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية وكانت محصورة من اعلى ، فانه يوجد اصغر حاصر اعلى لِـ سٍ . وقد يكون هذا العدد عنصرا في سٍ وقد لا يكون .

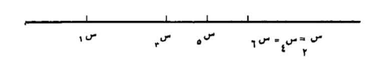
البرهان .

لتكن ى هي مجموعة جميع الحواصر العليا لِـ سٍ . وبما ان سٍ محصورة من اعلى فانه

يوجد حاصر اعلى $س_٢$ لـ سن، وبما ان سن غير خالية فانه يوجد أ ∋ سن . لنكتب $س_١$ = أ − ١ ، لهذا فان $س_١$ < أ ≥ $س_٢$. لنفرض ان ص = ($س_١$ + $س_٢$)/٢ . اما ان يكون ص ∋ ى أو يكـون ص ∋ ىَ، متممـة ى. ففي الحـالـة الثانية افرض ان $س_٣$ = ص، $س_٤$ = $س_٢$. وفي الحالة الاولى افرض ان $س_٣$ = $س_١$ وَ$س_٤$ = ص . ففي الحالتين نحصل على $س_١$ ≥ $س_٣$ < $س_٤$ ≥ $س_٢$، وكذلك $س_٢$ ، $س_٤$∋ ى ، $س_١$ ، $س_٣$ ∋ ىَ.

الآن لنأخذ ع = ($س_٣$ + $س_٤$)/٢ . فاذا كان ع ∋ ىَ افرض $س_٥$ = ع ، $س_٦$ = $س_٤$ ،واذا كان ع ∋ ى افـرض $س_٥$ = $س_٣$ ، $س_٦$ = ع . اذن $س_٣$ ≥ $س_٥$ < $س_٦$ ≥ $س_٤$ ، $س_٦$ ∋ى وكـذلـك $س_٥$∋ ىَ. اذن نحصـل على $س_١$ ≥ $س_٣$ ≥ $س_٥$ < $س_٦$ ≥ $س_٤$ ≥ $س_٢$ بحيث ان $س_٢$ ، $س_٤$ ، $س_٦$∋ ى ، $س_١$ ، $س_٣$ ، $س_٥$ ، ∋ ىَ.

نستمر بالاستقراء ونحصل على $س_١$ ≥ $س_٣$ ≥ $س_٥$ ≥ $س_٧$ ≥ . . . ، $س_٢$ ≤ $س_٤$ ≤ $س_٦$ ≤ $س_٨$ ≤ . . . حيث ان $س_{٢ن-١}$ < $س_{٢ن}$، $س_{٢ن}$ ∋ ى، $س_{٢ن-١}$ ∋ ىَ. ننصح القـاريء بتـوضيـح بناء المتتالية ($س_ن$) على خط الاعداد الحقيقية . وعلى سبيل المثال نوضح ادناه الحالة عندما يكون ص ، ع ∋ ىَ.



فمن الواضح ان | $س_م$ − $س_ن$ | ≥ ($س_٢$ − $س_١$)/٢ُ لكل م ، ن ≤ ٢ر + ١ ومنه ينتج ان ($س_ن$) هي متتـاليـة كوشيـة من الاعـداد الحقيقيـة . ومن النظرية ١٧ ، في الفصل الثاني، نحصل على ان ($س_ن$) هي تقاربية . لهذا فان $س_ن$ ⟵ حـ . اذن $س_{٢ن}$ ⟵ حـ .

لنأخذ س ∋ سن، ن ∋ N . اذن $س_{٢ن}$ ∋ تق تتضمن س ≥ $س_{٢ن}$ ، فباستخدام نتيجة

السؤال ١١، من التمارين ٢ ـ ٥، نحصل على س ⩾ نهـا س$_{٢ن}$ = حـ. اذن حـ هو حاصر أعلى لِـ سٍ .

لنفرض الآن، اذا امكن، انه يوجد حاصر أعلى حـ* لِـ سٍ بحيث ان حـ* < حـ. اذن حـ - حـ* > ٠، وبما ان س$_{ن}$ ← حـ نحصل على | س$_{ن}$ - حـ | < حـ - حـ*، لكل ن حيث ن عدد كبير بما فيه الكفاية. اذن حـ* < س$_{ن}$ لكل عدد كهذا. لهذا فان حـ* < س$_{٢م+١}$ لعدد ما م ∈ N. وبما ان حـ* هو حاصر أعلى لِـ سٍ فان س$_{٢م+١}$ هو حاصر اعلى لِـ سٍ ايضا، مما يناقض س$_{٢م+١}$ ∈ ى^{م}. اذن كل حـ* ∈ ى يجب ان يحقق حـ* ⩽ حـ، لهذا فان حـ = ص.ح.ع (سٍ). وهذا يثبت النظرية.

وباستخدام صٍ = { -س | س ∈ سٍ } والنظرية ١، نرى انه اذا كانت سٍ مجموعة غير خالية ومحصورة من اسفل فانه يوجد لها أكبر حاصر أدنى. وفي الحقيقة ان كـ.ح.د (سٍ) = -ص.ح.ع (صٍ).

المثال ٢.

لنفرض ان سٍ ، صٍ مجموعتان غير خاليتين وجزئيتان من R ، وكلاهما محصورة من أعلى. ولنعرف ى = { س + ص | س ∈ سٍ ، ص ∈ صٍ } . لنثبت ان ى محصورة من اعلى وان ص.ح.ع (ى) = ص ح ع (سٍ) + ص.ح.ع (صٍ).

فاذا كان أ ∈ ى فان أ = س + ص حيث س ، ص عنصران في سٍ ، صٍ على التوالي. اذن س ⩽ ص.ح.ع (سٍ) و ص ⩽ ص.ح.ع (صٍ). لهذا فان أ ⩽ ص.ح.ع (سٍ) + ص.ح.ع (صٍ). اذن ى محصورة من اعلى بـ ص.ح.ع (سٍ) + ص.ح.ع (صٍ). كذلك لكل و > ٠، يوجد س ∈ سٍ ، ص ∈ صٍ بحيث ان س > ص.ح.ع (سٍ) - $\frac{و}{٢}$، وكذلك ص > ص.ح.ع (صٍ) - $\frac{و}{٢}$. اذن س + ص > ص.ح.ع (سٍ) + ص.ح.ع (صٍ) - و، اي انه يوجد أ ∈ ى بحيث ان أ > ص ح ع (سٍ) + ص.ح.ع (صٍ) - و. ومنه ينتج ان ص.ح.ع (ى) = ص.ح.ع (سٍ) + ص.ح.ع (صٍ).

من المفيد هنا ان نلخص خواص R التي توصلنا اليها: نذكر هنا انه في بعض مساقات التحليل تؤخذ هذه الخواص كمسلمات، ويمكن عندها البدء بسرعة. ويمكن تطبيق هذا في المساق الحالي، ولكني اعتقد ان بناء R ، مع انه كان شاقا، الا انه يستحق العناء، وان على كل طالب يدرس الرياضيات ان يكون ملما بالافكار الاساسية له مع ان التفاصيل قد تنسى.

خواص R .

مجموعة الاعداد الحقيقية R هي حقل. يجب ان نتذكر ان لكل عدد س ∋ R ، س ≠ ٠ يوجد نظير $س^{-١}$ بحيث ان $س^{-١}$ س = س $س^{-١}$ = ١ . ولكن لا يوجد للصفر نظير. لهذا لا نستطيع ان نقسم على الصفر. الحقل R كامل الترتيب من حيث العلاقة < التي تحقق ما يلي:

($ت_١$) لكل س ، ص ∋ R تتحقق واحدة فقط من التالية: اما س = ص أو س < ص أو ص < س.

($ت_٢$) س < ص و ص < ع تتضمن س < ع .

($ت_٣$) س < ص تتضمن س + ع < ص + ع .

($ت_٤$) س < ص وَ ٠<ع تتضمن س ع < ص ع . وأخيرا R تام اي ان المتتالية الحقيقية تكون تقاربية اذا وفقط اذا كانت كوشية. لقد عرفنا ان هذه الخواص تتضمن «مسلمة الحاصر الاعلى» اي انه لكل مجموعة جزئية غير خالية من R ومحصورة من اعلى يوجد اصغر حاصر اعلى وهذا قد يكون وقد لا يكون عنصراً في تلك المجموعة الجزئية. وهناك خاصيتان اخريان هامتان لِـ R وهما «مسلمة ارخميدس» والحقيقة القائلة ان حقل الاعداد النسبية كثيف في R .

نطبق الآن النظرية ١ لنثبت انه لكل عدد حقيقي موجب يوجد جذر نوني.

النظرية ٢ .

لنفرض ان ن ∋ N ، ر ∋ R^+ . اذن يوجد عدد وحيد ص ∋ R^+ بحيث ان $ص^ن$ = ر .

سنكتب ص = $\sqrt[ن]{ر}$ = $ر^{\frac{1}{ن}}$.

البرهان.

لنفرض ان سہ = { س ∋ R^+ | س ^{ن} < ر } . ولنفرض ان أ = $\frac{ر}{ر+1}$. اذن ٠ < أ < ١ . لهذا فان أ ^{ن} < أ < ر، ومنه أ ∋ سہ . لهذا فان سہ ≠ Ø .

الآن س ∋ سہ تتضمن س < ر + ١ . وبعكس ذلك يكون س ≥ ر + ١ وهذا يتضمن س ^{ن} ≥ س > ر، مما ينـاقض س ∋ سہ . اذن سہ غير خاليـة ومحصـورة من اعلى بـِ ر + ١ . ومن مسلمة الحاصر الاعلى نحصل على انه يوجد أصغر حاصر اعلى ص ∋ R لِـ سہ . وبما ان أ ∋ سہ فان ص ≥ أ > ٠، واذن ص ∋ R^+ وعلينا الآن اثبات ان ص ^{ن} = ر.

لنفرض ان امكن ان ص ^{ن} ≠ ر. فمن خاصية التثليث، اما ان يكون ص ^{ن} < ر أو ص ^{ن} > ر.

اذا كان ص ^{ن} < ر فان ر − ص ^{ن} > ٠ واذن

$$ل = \frac{ر - ص^{ن}}{(1 + ص)^{ن} - ص^{ن}} > 0$$

نختار الآن ع ∋ R بحيث ان ٠ < ع < ١ وَ ٠ < ع < ل. ولنضع س = ص + ع. سوف نثبت ان س ∋ سہ . الآن س > ٠ ومن نظرية ذات الحدين،

$$س^{ن} = (ص + ع)^{ن} = ص^{ن} + \binom{ن}{1} ص^{ن-1} ع + \binom{ن}{2} ص^{ن-2} ع^{2} + \ldots + ع^{ن} \leq$$

$$ص^{ن} + \binom{ن}{1} ص^{ن-1} ع + \binom{ن}{2} ص^{ن-2} ع + \ldots + ع$$

$$= ص^{ن} + ع \{ (1 + ص)^{ن} - ص^{ن} \}$$

$$< ص^{ن} + ل \{ (1 + ص)^{ن} - ص^{ن} \} .$$

= ص ن + ر − ص ن = ر

واذن س ن < ر ولهذا س ∈ سه . ومنه س ⩽ ص = ص.ح.ع (سه)، اي ان س + ع ⩽ ص واذن ع ⩽ ٠، مما يناقض ع > ٠ لهذا لا يمكن ان تكون ص ن < ر صحيحة.

واذا كان ص ن > ر خذ ع ∈ R بحيث ان ٠ < ع < ١، ع < ص، وَ

$$ع < \frac{ص^ن - ر}{(١ + ص)^ن - ص^ن}$$

بما ان ص = ص.ح.ع (سه) فانه يوجد س ∈ سه بحيث ان س > ص − ع. لهذا فان س ن > (ص − ع)ن. ومن نظرية ذات الحدين نحصل على

$$(ص - ع)^ن = ص^ن - \binom{ن}{١} ص^{ن-١} ع + \binom{ن}{٢} ص^{ن-٢} ع^٢ - \ldots + (-١)^ن ع^ن.$$

$$> ص^ن - \binom{ن}{١} ص^{ن-١} ع - \binom{ن}{٢} ص^{ن-٢} ع - \ldots - ع$$

$$= ص^ن - ع \{ (١ + ص)^ن - ص^ن \}$$

$$> ص^ن + ر - ص^ن = ر.$$

اذن س ن > (ص − ع)ن > ر، مما يناقض س ∈ سه .

وهكذا فان الفرض ص ن ≠ ر مستحيل التحقيق، لهذا فان ص ن = ر. ولاثبات ان ص وحيد، لنفرض انه يوجد ل ⊂ R^+ بحيث ان ل ن = ر. اذن ل ن = ص ن. فاذا كان ل > ص فان ل ن > ص ن، واذا كان ل < ص فان ل ن < ص ن، مما يناقض ل ن = ص ن. اذن ل = ص. مما ينهي البرهان.

ويمكن استخدام النظرية ٢ لتعريف س م حيث س ∈ R^+ وم = $\frac{أ}{ب}$ هو عدد نسبي و ب ∈ N . نعرف

$$س^م = س^{\frac{أ}{ب}} = (س^أ)^{\frac{١}{ب}} = \sqrt[ب]{س^أ}.$$

فاذا كان م $\in Q^+$، فاننا نعرف صفر^م = صفراً. ونقول عادة س^م هي س مرفوعة للقوة م ونسمي م الأس.

وتتحقق قوانين الاسس التالية لـ س ، ص $\in R^+$ وم ، ن $\in Q$:

(أ) س^م . س^ن = س$^{م+ن}$

(ب) (س^م)^ن = س$^{م ن}$

(حـ) (س ص)^م = س^م ص^م

كمثال سوف نثبت (حـ). لنفرض ان م = $\frac{ل}{ن}$ حيث ن $\in N$. سنثبت اولا انه لكل أ ، ب $\in R^+$ فان

(د) $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ}\ \sqrt[ن]{ب}$

لنفرض ان ط$_1$ = $\sqrt[ن]{أ}$ ، ط$_2$ = $\sqrt[ن]{ب}$.

اذن ط$_1^ن$ = أ ، ط$_2^ن$ = ب ومنه أ ب = ط$_1^ن$ ط$_2^ن$ = (ط$_1$ ط$_2$)^ن واذن ط$_1$ ط$_2$ = $\sqrt[ن]{أب}$ مما يثبت (د).

الآن (س ص)^م = $\sqrt[ن]{(س ص)^ل}$ = $\sqrt[ن]{س^ل ص^ل}$ = $\sqrt[ن]{س^ل}\ \sqrt[ن]{ص^ل}$، من (د) بأخذ أ= س^ل، ب = ص^ل. لكن $\sqrt[ن]{س^ل}$ = س^م و $\sqrt[ن]{ص^ل}$ = ص^م. ومنه تنتج (حـ).

وهناك ايضا بعض المتباينات البسيطة بين الاسس:

(هـ) اذا كان س ، ص $\in R^+$ ، $0 <$ س $<$ ص فان س^م $<$ ص^م لكل م $\in Q^+$.

لبرهان ذلك افرض ان م = $\frac{ل}{ن}$. اذن س^ل $<$ ص^ل ومنه (س^ل)$^{\frac{1}{ن}}$ $<$ (ص^ل)$^{\frac{1}{ن}}$ مما يثبت (هـ).

سنركز اهتمامنا الآن على المتتاليات؛ اذا كان لدينا متتالية س = (س$_ن$) من الاعداد الحقيقية وكانت محصورة من اعلى، اي انه يوجد م $\in R^+$ بحيث ان س$_ن$ $\leqslant$ م لكل ن $\in N$

فان المجموعة س (N) = { س $_{ن}$ | ن ∋ N } تكون محصورة من أعلى بـم . ومن مسلمة الحد الاعلى ينتج انه يوجد اصغر حاصر اعلى لـِس (N) . سنكتب عادة ص.ح.ع (س $_{ن}$) بدلا من ص.ح.ع (س (N)) . وسندعو ص.ح.ع (س $_{ن}$) اصغر حاصر اعلى للمتتالية (س $_{ن}$) مع انه في الحقيقة اصغر حاصر اعلى للمجموعة س (N) .

كذلك اذا كانت (س $_{ن}$) محصورة من اسفل فاننا سنكتب ك.ح.د (س $_{ن}$) بدلا من ك.ح.د (س (N)) .

واذا كانت (س $_{ن}$) متتالية محصورة اي انه يوجد م ∋ R بحيث ان | س $_{ن}$ | ≽ م لكل ن ∋ N فانه يوجد ص.ح.ع | س $_{ن}$ | .

المثال ٣ .

لنفرض ان س ، ص متتاليتان من الاعداد الحقيقية محصورتان من أعلى . نريد ان نثبت ان

ص.ح.ع (س $_{ن}$ + ص $_{ن}$) ≽ ص.ح.غ (س $_{ن}$) + ص.ح.ع (ص $_{ن}$) . . . . (٥)

وانه يوجد متتاليات حيث تتحقق = في (٥)، ومتتاليات اخرى حيث تتحقق > .

فمن تعريف اصغر حاصر اعلى نحصل على س $_{ن}$ ≽ ص.ح.ع (س $_{ن}$)، ص $_{ن}$ ≽ ص.ح.ع (ص $_{ن}$) لكل ن ∋ N . اذن س $_{ن}$ + ص $_{ن}$ ≽ ص.ح.ع (س $_{ن}$) + ص.ح.ع (ص $_{ن}$)، لكل ن ∋ N . اذن ص.ح.ع (س $_{ن}$) + ص.ح.ع (ص $_{ن}$) هو حاصر اعلى للمجموعة سه = {س $_{ن}$ + ص $_{ن}$ | ن ∋ N } واذن ص.ح.ع (سه) ≽ ص.ح.ع (س $_{ن}$) + ص.ح.ع (ص $_{ن}$)، مما يثبت (٥) .

لنفرض ان س = ص = (٠ ، ٠ ، ٠ ، . . .) اذن ص.ح.ع (س $_{ن}$ + ص $_{ن}$) = ص.ح.ع (س $_{ن}$) + ص.ح.ع (ص $_{ن}$) = ٠ اذن تتحقق المساواة في (٥) . واذا أخذنا س = (١ ، ٠ ، ٠ ، . . .)، ص = (٠ ، ١ ، ٠ ، . . .) فان ص.ح.ع (س $_{ن}$ + ص $_{ن}$) = ١ > ٢ = ص.ح.ع (س $_{ن}$) + ص.ح.ع (ص $_{ن}$) . اذن > تتحقق في (٥) .

ومن التطبيقات الهامة للنظرية ١، تطبيقها على المتتاليات الوتيرية.

النظرية ٣.

(أ) اذا كانت ($س_{ن}$) متتالية حقيقية وتيرية متزايدة ومحصورة من اعلى، فان ($س_{ن}$) تكون تقاربية، ويكون نها $س_{ن}$ = ص.ح.ع ($س_{ن}$).

(ب) اذا كانت ($س_{ن}$) وتيرية متزايدة وغير محصورة فان $س_{ن}$ ← ∞ .

(حـ) اذا كانت ($س_{ن}$) وتيرية متناقصة ومحصورة من اسفل، فانها تكون تقاربية ويكون نها $س_{ن}$ = ك.ح.د ($س_{ن}$).

(د) اذا كانت ($س_{ن}$) وتيرية متناقصة وغير محصورة من اسفل فان $س_{ن}$ ← −∞ .

البرهان.

(أ) $س_{ن}$ ⩾ $س_{ن+١}$ لكل ن ∋ N . ومن النظرية ١ يوجد م = ص.ح.ع ($س_{ن}$)، لهذا فان $س_{ن}$ ⪋ م لكل ن∋ N ، لكل و > ٠ يوجد $س_{ر}$ ∋ س (N) بحيث ان $س_{ر}$ > م − و. لنفرض الآن ان ن ⩽ ر. اذن م − و < $س_{ر}$ ⩽ $س_{ن}$ ⩽ م < م + و اي ان | $س_{ن}$ − م | < و لكل ن ⩽ ر. لكن هذا يعطي $س_{ن}$ ← م، أي ان نها $س_{ن}$ = م = ص.ح.ع ($س_{ن}$)

(ب) لنأخذ اي عدد حقيقي ك > ٠. اذن يوجد ر ∋ N بحيث ان $س_{ر}$ > ك لان ($س_{ن}$) غير محصورة من اعلى. اذن ن ⩽ ر تتضمن $س_{ن}$ ⩽ $س_{ر}$ > ك. لهذا ومن التعريف ينتج ان $س_{ن}$ ← ∞

ونبرهن (حـ) ، (د) بطريقة مشابهة تماما.

المثال ٤.

عرف ($س_{ن}$) بـ $س_{١}$ = ٤ ، $س_{ن+١}$ = ٣ − $\frac{٢}{س_{ن}}$ لكل ن ⩾ ١. سنثبت ان ($س_{ن}$) ∋ تو، وسنجد نها $س_{ن}$.

يشير فحص الحدود الاولى الى ان $س_ن > ٢$. فلأثبات ذلك، لنفرض ان ج (ن) ترمز للجملة المفتوحة $س_ن > ٢$. ج (١) صحيحة فاذا كانت ج (ن) صحيحة فان $س_{ن+١} - ٢ =$

$\frac{س_ن - ٢}{س_ن} > ٠$، ومنه ج (ن + ١) صحيحة. فمن الاستقراء ينتج ان $س_ن > ٢$ لكل ن $\in N$.

لهذا فان ($س_ن$) محصورة من اسفل بـ٢ ويكون ك.ح د ($س_ن$) = ل $\geqslant ٢$.

الآن $س_ن - س_{ن+١} = (س_ن^٢ - ٣ س_ن + ٢)/س_ن = (س_ن - ٢)(س_ن - ١)/س_ن > ٠$

لهذا فان ($س_ن$) وتيرية متناقصة. ومن نظرية ٣ (حـ) نحصل على $س_ن \leftarrow ل \geqslant ٢$ ،

أي ان ($س_ن$) $\in$ نوم

وبما ان $\left| \frac{١}{س_ن} - \frac{١}{ل} \right| \leqslant \frac{|س_ن - ل|}{٤} \leqslant |س_ن - ل|$ فانه ينتج ان $\frac{١}{س_ن} \leftarrow \frac{١}{ل}$.

كذلك $س_{ن+١} \leftarrow ل$، وبأخذ النهايات في $س_{ن+١} = ٣ - \frac{٢}{س_ن}$ نحصل على $ل = ٣ - \frac{٢}{ل}$

. واذن $ل^٢ - ٣ل + ٢ = ٠$. وهذا يثبت ان ل = ٢ أو ل = ١ . لكننا نعرف ان ل $\geqslant ٢$، اذن يجب ان تكون ل = ٢ . اذن نها $س_ن = ٢$.

تمارين ٣ ـ ١

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ جد اكبر حاصر أدنى واصغر حاصر أعلى، ان وجد، لمجموعات R الجزئية التالية:

(أ) $\{س \mid س^٢ + س - ٢ = ٠\}$ ، (ب) $\{س \in Q^+ \mid س^٢ < ٢\}$ ،

(حـ) $\{س \in Q \mid ٠ < س < ١\}$ ، (د) $\{(أ+ب+حـ)(أ^{-١} + ب^{-١} + حـ^{-١}) \mid أ، ب، حـ \in R^+\}$.

٢ ـ اذا كانت سٍ ، صٍ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من R ، ومحصورتين من اعلى ، فاثبت ان ص.ح.ع (سٍ U صٍ) = ص.ح.ع { ص.ح.ع سٍ ، ص.ح.ع صٍ } . اعط مثالاً حيث تتحقق > .

٣ ـ [أكبر عدد صحيح]. اثبت انه كان س ∋ R فانه يوجد عدد صحيح وحيد م بحيث ان س - ١ > م ⩽ س. نكتب م = [س] ونسمي [س] أكبر عدد صحيح في س. لهذا فان س - ١ > [س] ⩽ س . ولاثبات ذلك، افرض انه لا يوجد م كهذه . اختر ل ∋ Z بحيث ان ل > س - ١ وافرض ان سٍ = { ن ∋ N | ن ⩽ س - ل } . استخدم الاستقراء لاثبات سٍ = N مما يناقض كون سٍ محصورة من اعلى .

اثبات ان م وحيدة ينتج من انه اذا كان $م_١$ ، م ∋ Z ، س - ١ > م ⩽ س، س - ١ > $م_١$ ⩽ س فان | م - $م_١$ | > ١ .

٤ ـ اذا كان س ، ص∋ ل∞ فاثبت ان ص.ح.ع ($س_ن$ + $ص_ن$) ⩽ ص.ح.ع ($س_ن$) + ص ح.ع ($ص_ن$) وك.ح د ($س_ن$ + $ص_ن$) ⩽ ك.ح.د ($س_ن$) + ك.ح.د ($ص_ن$).

٥ ـ عرف $س_ن$ = $\sum_{ر=١}^{٢ن-١} \frac{١}{\sqrt{ر(ر+١)}}$ لكل ن ∋ N . اثبت ان ($س_ن$) ∋ تو.

٦ ـ ليكن أ > ٠ و$س_١$ = ١. عرف $س_{ن+١}$ = $\sqrt{(أ + س_ن)}$ لكل ن ∋ N . اثبت ان ($س_ن$) ∋ تو وجد نها $س_ن$.

٧ ـ اذا كان ($س_ن$) ∋ تو. فاثبت ان ($س_ن$) ∋ ل∞ وان ك.ح.د ($س_ن$) ⩽ نها $س_ن$ ⩽ ص. ح.ع ($س_ن$).

٨ ـ عرف $س_ن$ = $\frac{ن^٢}{٢ن + ١}$ - [$\frac{ن}{٢}$] حيث [$\frac{ن}{٢}$] هو اكبر عدد صحيح في $\frac{ن}{٢}$ (راجع التمرين ٣). جد ك.ح.د ($س_ن$) ، ص.ح.ع ($س_ن$). هل ($س_ن$) ∋ تو؟

٩ ـ اذا كانت (س $_{ن}$) محصورة من اعلى وكان س $_{ن+ر}$ = س $_{ن}$ · س $_{ر}$ لكل ن ، ر ∈ N ، فاثبت ان س $_{ن}$ = أ ^{ن} حيث أ يحقق | أ | ⩽ ١ .

٢ . تبولوجية الاعداد الحقيقية

كلمة التبـولـوجيـا مشتقة من كلمة اغريقية تعني مكان . وموضوع التبـولـوجيـا يدرس عادة في السنة الثانية او الثالثة الجامعية لتخصص الرياضيات ، بعد ان يكون الطالب قد درس اسس التحليل كالتي نقدمها في هذا الكتاب .

وتعنى التبـولـوجيـا المجردة بافكار مثل المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلَقة ، والمغلِقة ، ونقطـة الـتراكم ، والمتتاليات التقاربية ، والاتصال ، . . . الخ . وجميع هذه الافكار تبحث على صعيد أعم من R . وفي الحقيقة ان R هي حالة خاصة ، وان كانت هامة جدا ، من الفضاءات التبـولـوجيـة . ان R هامـة لان لها خاصيـة الترتيب الكامل ، وخاصية التمام . ولا توجد هاتان الخاصيتان في الفضاء التبولوجي المجرد . لاحظ اننا استخدمنا كلمة فضاء لتعني R وفي السابق كنا نشير الى R بكلة خط (مستقيم) . وتذكرنا كلمات كهذه بالاصل الهندسي لافكار عديدة في التحليل . وكثيرا ما نستخدم لغة هندسية في التحليل والتبولوجيا .

وتساعدنا الهندسة على فهم افكار تكون معقدة عند استخدام اللغة التحليلية المجردة . وننصح الطالب ان يوضح هندسيا ، ان امكن ، اشياء مثل الكرة المفتوحة ، المجموعة المفتوحة ، نقطة التراكم ، الخ . ولكن نشدد هنا ان الرسوم والاشكال لا يمكن ان تكون بديلا عن التعاريف .

ومن ناحية تاريخية فان الكثير من افكار التبولوجيا المجردة برزت من الهندسة ومن دراسة R . وفي هذا البنـد ندرس بعض الافكـار التبـولـوجيـة في R ، التي هي هامـة في التحليـل . والتعـاريف التي سنقـدمهـا تم اختيارها بحيث انه يمكن تعميم معظمها لأي فضاء تبولوجي مجرد . وهذا يعني انه يمكن للطالب دراسة مساقات متقدمة دون زعزعة ما سبق ان تعلمه .

اولا سنعرض فكرة الفترة. هذه الفكرة خاصة بـ R ولا يمكن تعميمها على الفضاءات التبولوجيا المجردة، لانها تعتمد على فكرة الترتيب الكامل في R .

سوف نقول ان ع ∈ R تقع بين س ، ص اذا وفقط اذا كان س ≠ ص وكان س < ع < ص في حال س < ص، وص < ع < س في حالة ص < س. الآن سنعرف الفترة:

لتكن ف مجموعة جزئية من R وغير خالية. تسمى ف فترة اذا وفقط اذا كان لكل س ، ص ∈ ف ولكل ع بين س ، ص تكون ع ∈ ف.

المثال ٥.

(أ) لتكن سٍ = { ٠ ، ٢ } . سٍ ليست فترة لأن ٠ < ١ < ٢ ولكن ١ ∉ سٍ.

(ب) عرف ف = { س ∈ R | ٠ < س < ١ } . افرض ان س ، ص ∈ ف و س < ع < ص. س ∈ ف تتضمن ٠ < س ، ص ∈ ف تتضمن ص < ١. اذن ٠ < س < ع < ص < ١ ومنه ٠ < ع < ١، اذن ع ∈ ف. لهذا فان ف هي فترة.

(حـ) ليكن أ ∈ R.عرف ف = { س ∈ R | س ≤ أ } . افرض ان س ، ص ∈ ف ، س < ع < ص. اذن أ ≥ س < ع وع < أ ومنه ع ∈ ف. لهذا فان ف هي فترة.

(د) من الوضح ان R فترة.

الآن سنحدد جميع الفترات في R :

النظرية ٤.

لتكن ف فترة في R . اذن يجب ان تكون ف واحدة من الانواع التسعة التالية:

(-∞ ، ∞) = R

(أ ، ∞) = { س ∈ R | س > أ }

[أ ، ∞) = { س ∈ R | س ≥ أ }

(-∞ ، أ) = { س ∈ R | س < أ }

(-∞ ، أ] = { س ∈ R | س ≤ أ }

(أ ، ب) = { س ∈ R | أ < س < ب }

[أ ، ب] = { ∈ R | أ ≤ س ≤ ب }

(أ ، ب] = { س ∈ R | أ < س ≤ ب }

[أ ،ب) = { س ∈ R | أ ≤ س < ب }

البرهان.

نذكر هنا ان الاطراف اليمنى من المتساويات هي مجرد رموز للمجموعات التي في الاطراف اليسرى.

نفترض ان أ ، ب اعداد حقيقية بحيث ان أ < ب.

الآن اذا كانت ف فترة فقد تكون غير محصورة من اعلى وغير محصورة من اسفل. في هذه الحالة تكون ف = R . لا ثبات ذلك لنأخذ ع ∈ R . بما ان ف غير محصورة من اعلى أو من اسفل فانه يوجد س ، ص ∈ ف بحيث ان س < ع < ص. وبما ان ف فترة نحصل على ع ∈ ف. اذن ع ∈ R تتضمن ع ∈ ف، لهذا فان R ⊂ ف. لكن لأي فترة ف، ف⊂ R ، اذن ف = R .

وقد يحصل ان تكون ف غير محصورة من اعلى ولكن محصورة من اسفل. اذن يوجد أ = ك.ح.د (ف) هناك احتمالان: أ ∉ ف أو أ ∈ ف. لنأخذ الحالة الاولى. اذا كان س ∈ ف فان س > أ لهذا فان س ∈ (أ ، ∞) ومنه ف ⊂ (أ ، ∞). وبالعكس لنفرض ان ع ∈ (أ ، ∞) بما ان ف غير محصورة من اعلى فانه يوجد ص ∈ ف بحيث ان ع < ص. بما ان ع ∈ (أ ،∞) فان أ < ع وبما ان أ = ك ح د(ف) فانه يوجد س ∈ ف بحيث س < ع. لهذا فان س < ع < ص. ومنه ع ∈ ف، واذن (أ ، ∞) ⊂ ف. اذن ف = (أ ، ∞)، وهي المجموعة الثانية في النظرية. وباسلوب مشابه نعالج أ ∈ ف التي تعطي المجموعة الثالثة في النظرية.

ونحصل على المجموعات الباقية بنفس الاسلوب. فعلى سبيل المثال: المجموعة السادسة (أ ، ب) نحصل عليها عندما تكون ف محصورة من اعلى ومن اسفل وعندما يكون أ = ك.ح.د (ف) ، ب = ص.ح.ع (ف)

لاحظ ان القوس المربع على يمين أ يعني ان أ تنتمي الى الفترة، والقوس الدائري على يمين أ يعني ان أ لا تنتمي الى الفترة.

اصطلاحات تتعلق بالفترات

(أ ، ب) = { س ∈ R | أ < س < ب} تدعى فترة مفتوحة طرفها الأيمن أ وطرفها الايسر ب.

[أ ، ب] = { س ∈ R | أ ⩽ س ⩽ ب } تدعى فترة مغلقة طرفها الايمن أ وطرفها الايسر ب.

كل من الفترتين (أ ، ب] و[أ ، ب) تدعى فترة نصف مفتوحة. الفترات التي نستخدم فيها الرمز ∞ أو -∞ تدعى فترات غير منتهية.

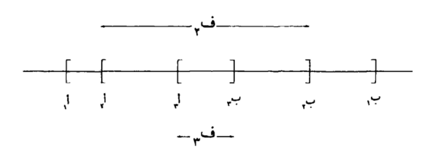
وتستخدم النظرية التالية كثيرا في التحليل وهي نتيجة للنظرية ٣.

النظرية ٥ [خاصية التشابك في الفترات المغلقة].

لنفرض ان (ف $_{ن}$) هي متتالية من فترات مغلقة ف $_{ن}$ = [أ $_{ن}$ ، ب $_{ن}$] بحيث ان ف $_{ن}$ ⊂ ف $_{ن+١}$ لكل ن ∈ N وبحيث ان (ب $_{ن}$ - أ $_{ن}$) ← صفر (ن ← ∞). (ان متتالية كهذه تدعى شبكة فترات مغلقة). اذن $\bigcap_{ن=١}^{\infty}$ ف $_{ن}$ تتكون من عنصر واحد فقط.

البرهان.

الوضع موضح ادناه:



بما ان $ف_{ن} \supset ف_{ن+١}$ فاننا نحصل على $أ_{ن} \leqslant أ_{ن+١} < ب_{ن+١} \leqslant ب_{ن}$ لكل $ن \in N$.
اذن $أ_{ن} < ب_{١}$ لكل $ن \in N$. اذن $(أ_{ن})$ متتالية متزايدة ومحصورة من اعلى بـ$ب_{١}$. ومن النظرية ٣، نحصل على $أ_{ن} \to أ$ و $أ_{ن} \leqslant أ$ لكل $ن \in N$. كذلك $(ب_{ن})$ متتالية متناقصة ومحصورة من اسفل بـ $أ_{١}$. اذن $ب_{ن} \to ب$ و $ب_{ن} \geqslant ب$ لكل $ن \in N$.

ولكن $ب_{ن} - أ_{ن} \to$ صفر. اذن $ب_{ن} = ب_{ن} - أ_{ن} + أ_{ن}$ تعطي ان $ب = أ$. الآن لكل $ن \in N$. $أ_{ن} \leqslant أ = ب \leqslant ب_{ن}$، اذن $أ \in ف_{ن}$ لكل $ن \in N$ ، أي ان $أ \in \bigcap_{ن=١}^{\infty} ف_{ن}$. اذن أ نقطة في تقاطع جميع $ف_{ن}$. لنفرض انه يوجد نقطة أخرى $د \in \bigcap ف_{ن}$. اذن $أ_{ن} \leqslant د \leqslant ب_{ن}$ لكل $ن \in N$. بأخذ النهايات لهذه المتباينة (انظر السؤال ١١، التمارين ٢ ـ ٥) نحصل على $أ \leqslant د \leqslant ب$، ولكن $أ = ب$ اذن $أ = د$. اي ان أ هي النقطة الوحيدة في $\bigcap ف_{ن}$. وهذا يثبت النظرية.

سنقدم الآن بعض التعاريف الاساسية، وبعض الشروح الموضحة ثم نتبع ذلك بامثلة.

الكرة المفتوحة :

ليكن أ ∈ R^n، نق > ٠. تسمى المجموعة :

ك (أ ، نق) = { س ∈ R^n | || س - أ || < نق }

بالكرة المفتوحة ، أو الكرة ، التي مركزها أ ونصف قطرها نق .

الكرة المغلقة :

ليكن أ ∈ R^n ، نق > ٠. تسمى المجموعة :

ك [أ ، نق] = { س ∈ R^n | || س - أ || ≤ نق }

بالكرة المغلقة التي مركزها أ ونصف قطرها نق .

المجموعة المفتوحة :

المجموعة الجزئية ج من R^n تسمى مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا كان لكل س ∈ ج يوجد نق > ٠ بحيث ان ك (أ ، نق) ⊂ ج .

المجموعة المغلقة :

تسمى المجموعة الجزئية ل من R^n مجموعة مغلقة اذا كانت متممتها مفتوحة ، اي ان ل مغلقة اذا وفقط اذا كانت ل ٢ مفتوحة .

داخل المجموعة :

لتكن سہ مجموعة جزئية من R^n . يكون سْہ ، داخل المجموعة وهو اتحاد جميع المجموعات المفتوحة المحتواة في سہ ، اي ان سْہ = $\bigcup$ { ج | ج مفتوحة ، ج ⊂ سہ } .

مغلِقة المجموعة:

لتكن سں مجموعة جزئية من R . مغلِقة المجموعة $\overline{سں}$ هي عبارة عن تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحتوي سں ، اي ان $\overline{سں} = \bigcap \{ ل \mid ل \text{ مغلقة، } ل \supset سں \}$.

المجموعة الكثيفة:

تسمى المجموعة سں $\subset$ R مجموعة كثيفة في R اذا وفقط اذا كانت $\overline{سں} = R$.

نقطة التراكم:

لتكن سں مجموعة جزئية في R . ليكن س $\in$ R وليس بالضرورة في سں . تسمى س نقطة تراكم للمجموعة سں اذا وفقط اذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحوي س تحوي ايضا نقاطا من سں غير س.

يرمز لمجموعة جميع نقاط التراكم للمجموعة سں بالرمز سں ^{ت} .

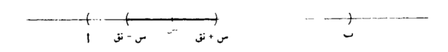
نستخدم كلمة «كرة» بمعنى جديد لفائدتها في تعميات قادمة. ففي R الكرة المفتوحة ك (أ ، نق) هي الفترة المفتوحة (أ - نق ، أ + نق) , والكرة المغلقة ك [أ ، نق] هي الفترة المغلقة [أ - نق ، أ + نق]. لاحظ ان أ $\in$ (أ - نق ، أ + نق) $\subset$ [أ - نق ، أ + نق].

وسوف نرمز للمجموعات المفتوحة بالرمز ح والمغلقة بالرمز ل.

فاذا كانت مجموعة ما غير مفتوحة فلا يمكن القول انها مغلقة. فهناك مجموعات غير مغلقة وغير مفتوحة. (المثال ٧، ادناه)

المثال ٦.

كل فترة مفتوحة (أ ، ب) هي مجموعة مفتوحة. وهذا واضح هندسيا



لاثبات ذلك تحليليا يجب ان نطبق تعريف المجموعة المفتوحة: لنأخذ اي س ∈ (أ ، ب). اذن س - أ > ٠ وب - س > ٠. لتكن نق = أص {س - أ ، ب - س} اي ان نق هي اصغر العددين س - أ ، ب - س. سوف نثبت ان ك (س ، نق) ⊆ (أ ، ب). لتكن ص ∈ ك (س ، نق). اذن | ص - س | > نق ، ومنه -نق > ص - س > نق. اي ان أ - س > ص - س > ب - س من تعريف نق. لهذا فان أ > ص > ب اي ان ص ∈ (أ ، ب). اذن لكل س ∈ (أ ، ب)، يوجد ك (س ، نق) ⊆ (أ ، ب)، ومنه ينتج ان (أ ، ب) هي مجموعة مفتوحة.

والفترة المغلقة [أ ، ب] هي مجموعة مغلقة. لتوضيح ذلك خذ [أ ، ب]َ = (-∞ ، أ) ∪ (ب ، ∞) وهي مجموعة مفتوحة (البرهان يشابه برهان المثال ٦).

هندسيا نحصل على



المثال ٧.

الفترة (٠ ، ١] ليست مجموعة مفتوحة ولا مغلقة. لا ثبات انها غير مفتوحة لاحظ ان ١ ∈ (٠ ، ١]. خذ اي نق > ٠. اذن ك (١ ، نق) غير محتواة في (٠ ، ١]، على سبيل المثال

$1 + \frac{نق}{2}$ موجود في ك (١ ، نق) وغير موجود في (٠ ، ١]. لاثبات ان (٠ ، ١] غير مغلقة، خذ (٠ ، ١]^{م} = (−∞،٠] ∪ (١ ، ∞). فكل كرة مركزها صفر غير محتواة في (٠ ، ١]^{م} ، اذن (٠ ، ١]^{م} غير مفتوحة.

المثال ٨.

اذا كانت سی = (٠ ، ١) فان سی^{ت} = [٠ ، ١]. وبشكل خاص ٠ ، ١ هما نقطتا تراكم لـ سی وغير موجودتين في سی .

لاثبات ذلك سوف نثبت اولا ان [٠ ، ١] ⊂ سی^{ت}. ليكن ٠ ⩽ س ⩽ ١ ولنأخذ اي مجموعة مفتوحة ح تحتوي س . اذن يوجد كرة ك (س ، نق) ⊂ ح. اذا كان س = ٠ ، عرف ص = أص { $\frac{نق}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ } . اذن ٠ < ص < ١ ومنه ص ∈ سی ، ص ≠ س وص ∈ ك

(س ، نق) ⊂ ح. اذا كان ٠ < س ⩽ ١ عرف ص = أك { $\frac{س}{2}$ ، س − $\frac{نق}{2}$ } اي اكبر

العددين $\frac{س}{2}$، س − $\frac{نق}{2}$، اذن ص ∈ سی ، ص ≠ س وص ∈ ك (س ، نق) ⊂ ح . اذن

س ∈ سی^{ت} ومنه [٠ ، ١] ⊂ سی^{ت}. وبالعكس اذا كان س ∈ [٠ ، ١]^{م} = (−∞ ، ٠) ∪ (١ ، ∞) فانه يوجد كرة مفتوحة مركزها س ولا تحوي نقطا من سی. اذن س ∈ (سی^{ت})^{م}.
لهذا فان سی^{ت} ⊂ [٠ ، ١]. فهذا مع [٠ ، ١] ⊂ سی^{ت} يثبت النتيجة

ان جزءا من النظرية التالية يوضح لنا كيفية تكوين مجموعات مفتوحة جديدة بأخذ تقاطع واتحاد مجموعات مفتوحة معروفة وكذلك بالنسبة للمجموعات المغلقة.

النظرية ٦.

(١) $\emptyset$ ، R مجموعتان مفتوحتان.

(٢) اتحاد اي عائلة من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

(٣) تقاطع أي عدد منته من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

(٤) $\emptyset$ ، R مجموعتان مغلقتان.

(٥) تقاطع اي عائلة من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

(٦) اتحاد اي عدد منته من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

البرهان.

اذا فرضنا ان $\emptyset$ غير مفتوحة فانه يوجد س $\in \emptyset$ بحيث انه لكل نق > ٠ تكون ك (س ، نق) غير محتواة في $\emptyset$. لكن س $\in \emptyset$ يناقض ان $\emptyset$ لا تحتوي على أي عنصر. اذن $\emptyset$ مجموعة مفتوحة. وكذلك R مفتوحة لانه لكل س $\in$ R تكون ك (س ، ١) $\subset$ R . وهذا يثبت (١).

لنأخذ الآن اي عائلة $\{ح_\alpha\}$ من مجموعات مفتوحة $ح_\alpha$. ونعتبر قيم الدليل α مجموعة وهي ليست بالضرورة المجموعة N = $\{١ ، ٢ ، ٣ . . .\}$.

ولنفرض ان س $\in \cup ح_\alpha$، وهو اتحاد جميع المجموعات $ح_\alpha$. فمن تعريف الاتحاد ينتج ان س $\in ح_\alpha$ لعنصر ما α . وبما ان $ح_\alpha$ مفتوحة فانه يوجد ك (س ، نق) $\subset ح_\alpha$. لكن $ح_\alpha \subset \cup ح_\alpha$ ومنه ينتج ان ك (س ، نق) $\subset \cup ح_\alpha$. لهذا فانه لكل س في الاتحاد يوجد كرة ك (س ، نق) موجودة في الاتحاد ومنه ينتج ان الاتحاد مجموعة مفتوحة وهذا يثبت (٢).

اذا اثبتنا (٣) لمجموعتين $ح_١$ ، $ح_٢$ فيمكن الحصول على النتيجة باستخدام الاستقراء. اذا كان م = $ح_١ \cap ح_٢ = \emptyset$ فان م مفتوحة من (١). واذا كانت م $\neq \emptyset$ خذ س $\in$ م. اذن س $\in ح_١$ وس $\in ح_٢$، اذن يوجد $نق_١$ ، $نق_٢$ بحيث ان ك (س ، $نق_ر$) $\subset ح_ر$ حيث ر = ١ ،

٢ . عرف نق = أ ص { نق $_1$ ، نق $_2$ } . اذن | ص - س | < نق تتضمن | ص - س | < نق $_ر$
ومنه ص ∋ ك (س ، نق $_ر$) حيث ر = ١ ، ٢ . اذن ك (س ، نق) ⊂ م .
بما ان $\varnothing^م$ = R و $R^م = \varnothing$، نحصل على (٤) من (١).
اذاكانت{ ل$_a$} عائلة مجموعات مغلقة ل$_a$ ، فان ل$_a^م$ مفتوحة . الآن ∪ ل$_a^م$ مجموعة مفتوحة ، (من ٢)، ولكن ∪ ل$_a^م$ = (∩ ل$_a$)^م من قوانين ديمورغان . اذن من تعريف المجموعة المغلقة ينتج ان ∩ ل$_a$ مغلقة ، مما يثبت (٥) . ونثبت (٦) بطريقة مشابهة .

النظرية ٧ .

لتكن (س $_ن$) متتالية من الاعداد الحقيقية . اذن س $_ن$ ← س اذا وفقط اذا كانت لكل مجموعة مفتوحة ح تحوي س يوجد ن. ∋ N بحيث ان س $_ن$ ∋ ح لكل ن ≥ ن. .

البرهان .

افرض ان س $_ن$ ← س . خذ أي مجموعة مفتوحة ح تحوي س . اذن يوجد نق > ٠ بحيث ان ك (س ، نق) ⊂ ح . وبما ان س $_ن$ ← س فانه يوجد ن. = ن. (نق) بحيث ان | س $_ن$ - س | < نق لكل ن ≥ ن. أي ان س $_ن$ ∋ ك (س ، نق) ⊂ ح لكل ن ≥ ن. .
وبالعكس، اذا كان ∈ > ٠ فان ك (س ، ∈) هي مجموعة مفتوحة تحوي س . اذن يوجد ن. بحيث ان س $_ن$ ∋ ك (س ، ∈) لكل ن ≥ ن. . اي ان | س $_ن$ - س | < ∈ لكل ن ≥ ن. وهذا يعني ان س $_ن$ ← س . وهذا ينهي برهان النظرية .
وللنظرية التالية اهميتها عند معالجة المجموعات المغلقة .

النظرية ٨ .

لتكن س مجموعة جزئية من R . اذن

(١) سِ مجموعة مغلقة اذا وفقط اذا كانت سِ̄ = سِ .

(٢) س ∈ سِ̄ اذا وفقط اذا كان لكل و > ٠ يوجد ص ∈ سِ بحيث ان
|ص - س| < و.

البرهان.

من التعريف، سِ̄ هي عبارة عن تقاطع مجموعات مغلقة، اذن هي مجموعة مغلقة، باستخدام الجزء (٥) من النظرية ٦ . اذن سِ = سِ̄ تتضمن ان سِ مجموعة مغلقة . وبالعكس، افرض ان سِ مجموعة مغلقة . فاذا كان س ∈ سِ ، فان س ∈ ل لجميع المجموعات المغلقة ل ⊃ سِ . ومنه سِ ⊂ سِ̄ . اذا كان س ∈ سِ̄ فان س ∈ ل لجميع المجموعات المغلقة ل ⊃ سِ . وبشكل خاص سِ هي احدى هذه المجموعات ومنه س ∈ سِ وسِ̄ ⊂ سِ . وهذا يثبت ان سِ = سِ̄ عندما تكون سِ مغلقة .

(٢) لنفرض ان س ∈ سِ̄ ولنفرض، ان امكن، انه يوجد و > ٠ بحيث ان |ص - س| ≥ و لكل ص ∈ سِ̄ . اذن سِ ⊂ (ك (س ، و))^{م} ، حيث (ك (س ، و))^{م} مجموعة مغلقة لأن ك (س ، و) مفتوحة. اذن س ∈ سِ̄ تعطي س ∈ (ك (س ، و))^{م}. وهذا تناقض.

وبالعكس لكل و > ٠ افرض ان |ص - س| < و لعنصر ما ص ∈ سِ . خذ اي مجموعة مغلقة ل ⊃ سِ . اذن ل^{م} ⊂ سِ^{م}. فاذا كان س ∈ ل^{م} وبما ان ل^{م} مفتوحة فانه يوجد و > ٠ بحيث ان ك (س ، و) ⊂ ل^{م} ⊂ سِ^{م}، من الفرض ص ∈ ك (س ، و)، لعنصر ما ص ∈ سِ.ولكن ك (س ، و) ⊂ سِ^{م} اذن ص ∈ سِ^{م} مما يناقض ص ∈ سِ. اذن يجب ان يكون س ∈ ل لاي مجموعة مغلقة ل ⊃ سِ . اذن س ∈ سِ̄. وهذا يثبت النظرية.

النظرية ٩.

لتكن سِ ⊂ R ، ولتكن (س$_{ن}$) متتالية تقاربية من عناصر سِ ، اي ان س$_{ن}$ ∈ سِ

لكل ن $\in$ N وس$_{ن}$ ← س حيث س $\in$ R . اذن س $\in$ $\overline{س}$ اي ان نهاية متتالية في سه تنتمي الى مغلقة سه

البرهان

افرض ان امكن ان س $\notin$ $\overline{سه}$. بما ان $\overline{سه}$ مغلقة اذن $(\overline{سه})^م$ مفتوحة وس $\in$ $(\overline{سه})^م$. ومن النظرية ٧ يوجد ن$_{\circ}$ بحيث ان س$_{ن}$ $\in$ $(\overline{سه})^م$ لكل ن $\geqslant$ ن$_{\circ}$. اذن س$_{ن}$ $\in$ سه^م لكل ن $\geqslant$ ن$_{\circ}$ مما يعارض س$_{ن}$ $\in$ سه لكل ن $\in$ N .

ويمكن اثبات النظرية ايضا باستخدام الجزء (٢) من النظرية ٨. لانه اذا كان و > ٠، فان س$_{ن}$ ← س تعطي | س$_{ن}$ − س | < و، لكل ن $\geqslant$ ن$_{\circ}$. اذن يوجد س$_{ن_{\circ}}$ $\in$ سه بحيث ان | س$_{ن_{\circ}}$ − س | < و، لهذا فان س $\in$ $\overline{سه}$.

تمارين ٣ ـ ٢

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اعط مثالا لفترتين مفتوحتين بحيث لا يكون اتحادهما فترة مفتوحة.

هل يعارض هذا الجزء (٢) من النظرية ٦؟

٢ ـ لتكن ف$_{١}$ ، ف$_{٢}$ فترتين في R . اثبت ان ف$_{١}$ $\cap$ ف$_{٢}$ اما ان يكون $\varnothing$ أومجموعة من نقطة واحدة أو فترة.

٣ ـ بأخذ المتتالية (ف$_{ن}$) حيث ف$_{ن}$ = (٠ ، $\frac{١}{ن}$) اثبت انه لا يمكن استبدال الفترات المغلقة بفترات مفتوحة في النظرية ٥.

٤ ـ لتكن (ف$_{ن}$) متتالية من الفترات المغلقة. اثبت ان $\bigcap_{ن=١}^{\infty}$ ف$_{ن}$ اما ان يكون $\varnothing$ ، أومجموعة من نقطة واحدة، أوفترة مغلقة.

٥ ـ عرف $ع_ن = [٠ ، ١ + \frac{١}{ن}]$. اثبت ان $\bigcap_{ن=١}^{\infty} ع_ن$ هو فترة مغلقة.

٦ ـ ما هو $\bigcap_{ن=١}^{\infty} (ن ، ن + ٢)$ ؟

٧ ـ ما هي $س^ت$، حيث $س = [٠ ، ١] \cup \{ ٢ \}$ ؟

٨ ـ لتكن Q مجموعة الاعداد النسبية، $غ = Q^م$ اي ان غ مجموعة الاعداد غير النسبية. اثبت ان Q وغ كثيفتان في R ، اي ان $\overline{Q} = \overline{غ} = R$.

٩ ـ اثبت ان Q غير مفتوحة وغير مغلقة في R .

١٠ ـ لتكن Z مجموعة الاعداد الصحيحة. اثبت ان Z لا تحتوي على كرات مفتوحة وان $Z^م$ كثيفة في R .

١١ ـ لتكن سه ، صه مجموعتين جزئيتين من R ، اثبت ان

(١) $\mathring{سه} \subset سه \subset \overline{سه}$ ،

(٢) تكون سه مفتوحة اذا وفقط اذا كانت $سه = \mathring{سه}$ ،

(٣) $\overline{سه} = سه^ت \cup سه$ ،

(٤) $سه \subset صه$ تعطي $\mathring{سه} \subset \mathring{صه}$ و $\overline{سه} \subset \overline{صه}$.

١٢ ـ لتكن سه مجموعة جزئية من R ولتكن ح مجموعة مفتوحة. اثبت ان $سه \cap ح = \emptyset$ تعطي $\overline{سه} \cap ح = \emptyset$.

١٣ ـ لتكن $\{ سه_a \}$ عائلة مجموعات. اثبت ان $\bigcup \overline{سه_a} \subset \overline{\bigcup سه_a}$ ، اعط مثالا حيث يكون الاحتواء فعليا.

ولأي مجموعتين سه و صه اثبت ان $\overline{سه \cup صه} = \overline{سه} \cup \overline{صه}$.

١٤ ـ لتكن ل مجموعة مغلقة محصورة من اعلى. اثبت ان ص.ح.ع $ل \in ل$.

١٥ ـ [تركيب المجموعات المفتوحة في R]. لتكن ح مجموعة غير خالية مفتوحة في R . اثبت ان ح هي اتحاد فترات مفتوحة منفصلة (ارشاد: خذ $س \in ح$ وافرض ان $سه_س = \{ ص \mid (س ، ص) \subset ح \}$)، $صه_س = \{ ع \mid (ع ، س) \subset ح \}$. افرض انه يوجد $أ_س =$ ك.ح.د $صه_س$ ، $ب_س =$ ص.ح.ع $سه_س$ ، اكتب $ف_س = (أ_س ، ب_س)$. ثم اثبت ان $ف_س \subset ح$ ، $أ_س$

، $ب_{س} \in ح'$ ، $ح = \bigcup \{ف_{س} \mid س \in ح\}$ ، و$\{ف_{س}\}$ منفصلة.

١٦ ـ اذا كانت ل مغلقة، $س_{ن} \to س$ حيث $س_{ن} \in ل$، اثبت ان $س \in ل$.

٣. المجموعات المتراصة

قد تكون اهمية فكرة التراص التي سنعرفها بعد قليل اعظم في التبولوجيا المجردة والتحليل المتقدم منها في التحليل المبدئي لِـ R . لهذا فالعرض في هذا البند سيكون موجزا. وسيكون هدفنا هو اثبات نظرية تسمى نظرية هاين وبورل (نسبة الى الرياضيين هاين وبورل) تنص هذه النظرية على ان كل مجموعة محصورة ومغلقة في R تكون متراصة. وصحيح ايضا أنه في أي فضاء قياس (متري) (كذلك في R) تكون كل مجموعة متراصة أيضا مغلقة ومحصورة، وتجد برهان هذه النتيجة في كتب متقدمة في التحليل. وعلى ضوء نظرية هاين وبورل، وعكسها، فإن المجموعة المتراصة في R هي المجموعة المحصورة المغلقة. ولكن في فضاءات القياس عامة يمكن ان نجد مجموعة محصورة ومغلقة ولكن غير متراصة. لنعرف الآن الاصطلاح التالي:

المجموعة المتراصة.

تدعى المجموعة الجزئية م من $\overline{R}$ مجموعة متراصة اذا وفقط اذا كان لكل غطاء مفتوح لـ م غطاء جزئي منتهٍ. وهذا يعني انه اذا كانت $\{ح_{\alpha}\}$ عائلة لمجموعات مفتوحة تغطي م، اي ان $م \subset \bigcup ح_{\alpha}$ ، فانه يوجد عائلة جزئية منتهية من المجموعات $ح_{\alpha_1}$ ، $ح_{\alpha_2}$ ، . . . ، $ح_{\alpha_ن}$ بحيث ان

$$م \subset \bigcup_{ر=1}^{ن} ح_{\alpha_ر}$$

المثال ٩.

المجموعة المنتهية (اي التي تحوي على عدد منته من العناصر) هي متراصة. افرض ان م

= { س، ، س٢ ، . . . ، س ن } . وافرض ان { حα } اي غطاء مفتوح لـ م أي ان م ⊃ ∪ حα.
اذن س ∈ م تعني ان س = س ر حيث ١ ≤ ر ≤ ن . اذن س ر ∈ ∪ حα و س ر ∈ حαر
لعنصر ما αر. اذن س ر ∈ ∪ (ر=١) حαر . ومنه م متراصة.

المثال ١٠ .

لنفرض ان (س ن) متتالية حقيقية تقاربية و س ن ← س. اذن تكون المجموعة م = {س ، س، ، . . . } . متراصة . لاثبات ذلك لنفرض ان م ⊂ ∪ حα . الآن س ∈ م تتضمن س ∈ ∪ حα ومنه س ∈ حα لعنصر ما α. فمن النظرية ٧ فانه يوجد نَ. بحيث ان س ن ∈ حα لكل ن ≥ نَ . فاذا كان ١ ≤ ن < نَ . فان س ن ∈ م تتضمن س ن ∈ ∪ حα ومنه س ن ∈ حαن . لهذا فان م ⊂ ∪ {حαر | ٠ ≤ ر < نَ . } وبذا تكون م متراصة.

النظرية ١٠ .

كل فترة مغلقة [أ ، ب] في R تكون مجموعة متراصة.

البرهان.

لنكتب ف١ = [أ ، ب] ولنفرض ان امكن. ان ف١ غير متراصة . اذن يوجد غطاء مفتوح { حα } لـ ف١ بحيث انه لا يوجد لها غطاء جزئي منته . نصّف ف١ لتحصل على فترتين مغلقتين ف٢ ، ف٣ . ان واحدة على الاقل من هاتين الفترتين ليس له غطاء جزئي منته ، لانه ان وجد لكل من ف٢ و ف٣ غطاء جزئي منته فان كل المجموعات في الغطائين الجزئيين المنتهيين تكون غطاء جزئيا منتهيا لـ ف١ .

فلنفرض ان ف٢ هي الفترة التي ليس لها غطاء جزئي منته . نصّف ف٢ لتحصل على

ف$_3$ بدون غطاء جزئي منته. فاطوال ف$_2$ ، ف$_3$ هي $\frac{ب - أ}{2}$ ، $\frac{ب - أ}{2^2}$ ، وف$_1$ ⊃ ف$_2$ ⊃ ف$_3$. نستمر بالاستقراء ونحصل على متتالية (ف$_ن$) من الفترات المغلقة بحيث انه لا يوجد لـ ف$_ن$ غطاء جزئي منته لجميع قيم ن.

وتخبرنا النظرية ٥ انه يوجد س ∈ ∩ ف$_ن$. بما ان {ح$_\alpha$} تغطي ف$_1$ فان س ∈ ف$_ن$ ⊂ ف$_1$ ⊂ ∪ ح$_\alpha$ وهذا يتضمن س ∈ ح$_\alpha$ لعنصر ما α. وبما ان ح$_\alpha$ مفتوحة فانه يوجد كرة مفتوحة ك (س ، نق) ⊂ ح$_\alpha$.

لنكتب ف$_ن$ = [أ$_ن$ ، ب$_ن$] لـ ن ⩾ ٢ . بما ان ب$_ن$ - أ$_ن$ ← ٠ فانه يوجد ر ∈ N بحيث ان ب$_ر$ - أ$_ر$ < نق . الآن ص ∈ ف$_ر$ تتضمن أ$_ر$ ⩽ ص ⩽ ب$_ر$ وبما ان أ$_ر$ ⩽ س ⩽ ب$_ر$ ينتج ان |ص - س| ⩽ ب$_ر$ - أ$_ر$ < نق . اذن ف$_ر$ ⊂ ك (س ، نق) ⊂ ح$_\alpha$ ، اي ان ف$_ر$ محتواة في مجموعة واحدة ح$_\alpha$ مما يناقض ان ف$_ر$ ليس لها غطاء جزئي منته .

النظرية ١١ [هاين وبورل].

كل مجموعة م محصورة ومغلقة في R تكون متراصة .

البرهان.

بما ان م محصورة اذن م ⊂ [أ ، ب] لفترة مغلقة ما : [أ ، ب] وهذه تكون متراصة حسب النظرية ١٠ .

فبما ان م مغلقة فان م^c تكون مفتوحة . فلنفرض ان م ⊂ ∪ ح$_\alpha$ اذن [أ ، ب] ⊂ (∪ ح$_\alpha$) ∪ م^c وبما ان [أ ، ب] متراصة فان [أ ، ب] ⊂ م^c ∪ ح$_{\alpha_1}$ ∪ ح$_{\alpha_2}$ ∪ . . . ∪ ح$_{\alpha_ن}$ ، اذن م ⊂ ح$_{\alpha_1}$ ∪ ح$_{\alpha_2}$ ∪ . . . ∪ ح$_{\alpha_ن}$ ومنه م متراصة . وهذا يثبت نظرية هاين وبورل .

تمارين ٣ - ٣

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

١ - اثبت ان اتحاد عدد منته من المجموعات المتراصة يكون مجموعة متراصة.

٢ - اثبت ان المجموعة الجزئية المغلقة في مجموعة متراصة تكون مجموعة متراصة.

٣ - لنفرض ان م متراصة و س $\in$ م. اثبت ان م $\subset \bigcup_{ن=1}^{\infty}$ ك (س ، ن) ومنه اثبت ان م محصورة.

٤ - افرض ان م متراصة، ل مغلقة. اثبت ان م $\cap$ ل متراصة.

٥ - اثبت ان R غير متراصة.

٦ - اثبت ان الفترة المفتوحة (٠ ، ١) غير متراصة.

٧ - [فضاءات القياس]. بالتعريف، فضاء القياس هو زوج يتكون من مجموعة غير خالية سِ واقتران قياس (او مسافة) مـ: سِ × سِ $\leftarrow R$ بحيث ان:

(مـ$_1$) : مـ (س ، ص) = ٠ اذا وفقط اذا كان س = ص.

(مـ$_2$) : مـ (س ، ص) = مـ (ص ، س) لكل س ، ص $\in$ سِ.

(مـ$_3$) : مـ (س ، ص) $\leqslant$ مـ (س ، ع) + مـ (ص ، ع) لكل س ، ص ، ع $\in$ سِ.

نقول ان مـ قياس على سِ لهذا فان اقتران القياس هو اقتران ذو قيم حقيقية معرف على زوج من عناصر سِ. من (مـ$_1$) نرى ان مـ (س ، س) = ٠. نسمي (مـ$_3$) المتباينة المثلثية.

اثبت صحة ما يلي في اي فضاء قياس (سِ ، مـ):

(١) مـ (س ، ص) $\geqslant$ لكل س ، ص $\in$ سِ ،

(٢) | مـ (س ، ص) − مـ (ع ، حـ) | $\leqslant$ مـ (س ، ع) + مـ (ص ، حـ)،

(٣) اذا كان ق (س ، ص) = $\frac{\text{مـ (س ، ص)}}{\text{١ + مـ(س ، ص)}}$ ،

هـ (س ، ص) = ك ح د { ١ ، مـ (س ، ص) } .

فان (سِ ، ق) و (سِ ، هـ) هما فضاءا قياس.

٨ ـ اثبت ان التالية هي فضاءات قياس

(١) $\mathbb{R}$. مع مـ (س ، ص) = | س − ص |

(٢) $\mathbb{R}$ مع مـ (س ، ص) = | $س^{٣}$ − $ص^{٣}$ |

(٣) $\mathbb{C}$ مع مـ ($ع_{١}$ ، $ع_{٢}$) = | $ع_{١}$ − $ع_{٢}$ |

(٤) اي مجموعة غير خالية س مع مـ (س ، س) = ٠ ومـ (س ، ص) = ١ اذا كان س ≠ ص . نسمي هذا القياس قياسا بديهيا .

(٥) $\mathbb{R}^{ن}$ مع مـ(س ، ص) = | $س_{١}$ − $ص_{١}$ | + . . . + | $س_{ن}$ − $ص_{ن}$ | .

(٦) ل∞ المتتاليات الحقيقية المحصورة س = ($س_{ن}$) مع

مـ (س ، ص) = ص.ح.ع | $س_{ن}$ − $ص_{ن}$ | .

(٧) تق ، المتتاليات التقريبية مع مـ (س ، ص) = ص.ح.ع | $س_{ن}$ − $ص_{ن}$ | . اثبت ان ق (س ، ص) = نهاية | $س_{ن}$ − $ص_{ن}$ | ليست قياسا على تق .

منـــاقشـــة يجد القـــاريء في كتـــاب المؤلف «Elements of Functional Analysis» موضوع فضاءات القياس بشكل عام واستخدامها في التحليل الدالي .

٤ ـ المجموعات القابلة للعد

اذا كانت س منتهية فانه بالامكان ايجاد عدد عناصرها بالعد . (سوف نسمي هذا العدد بالعدد الاصلي لـ س) . وهذا يعني رياضيا اننا وجدنا ارتباط واحد ـ لواحد بين س والمجموعة { ١ ، ٢ ، . . . ، ن } لعدد ما ن ∈ N . لهذا فان س ~ { ١ ، ٢ ، . . . ، ن } لعنصر ما ن ∈ N ، بمعنى تكافؤ المجموعات . ثم نقول ان س لها ن من العناصر أو ان عد (س) = ن ، حيث عد (س) ترمز الى العدد الاصلي لِـ س .

واذا كانت ص مجموعة جزئية فعلية من س فانه من الواضح ان س لا يمكن ان تكافيء ص ، لهذا فان عد (ص) < عد (س) . واذا كانت ص = ∅ فاننا نقول عد (∅) = ٠ .

وكل ما ورد ينطبق على المجموعات المنتهية . ويختلف الوضع تماماً في حالة مجموعات مثل N = { ١ ، ٢ ، . . . } ، التي هي غير منتهية . فعلى سبيل المثال ماذا نعني بـ عد (N) أو عد (R)؟ بما ان N تحوي عددا لانهائيا من العناصر يمكن ان نكتب عد (N) = ∞ . ولكن R أيضـا تحوي عددا لا نهائيـا من العنـاصـر، فمن الطبيعي اذن ان نكتب عد (R) = ∞ . وطبيعي ايضا ان نكتب عد (N) = عد (R) = ∞ . الآن N مجموعة جزئية وفعلية من R . لهذا، وبالمقارنة مع حالة المجموعات النهائية، نتوقع ان نحصل على عد (N) $<$ عد (R) . وهـذا محيّر ، وقـد نتـج عن التسـاهل في تعريف عد (N) وعد (R) . ولكن ليس من السهل تعريف العدد الاصلي للمجموعات غير المنتهية ولن نحاول ان نفعل ذلك . كل ما سنفعله هو ان نقول ان المجموعتين س ، ص لهما نفس العدد الاصلي ونكتب عد (س) = عد (ص) اذا وفقط اذا كانت س $\sim$ ص بمعنى تكافؤ المجموعات . كذلك سنعرف عد (س) $<$ عد (ص) اذا وفقط اذا كانت س تكافيء مجموعة جزئية من ص ولا تكافيء ص . وبامكاننا الآن ان نسأل عن العلاقات بين عد (N) ، وعد (Z) ، وعد (Q) وعد (R) . وسيتبين لنا ان عد (N) = عد (Z) = عد (Q) $<$ عد (R) . . . . . (٦)

وقـد تكـون العـلاقـات في (٦) مدعاة للدهشة لان الاحتواءات $N \subset Z \subset Q \subset R$ جميعهـا فعليـة . ان ما تقـوله (٦) على وجه التقريب ان N ، Z ، Q تحوي «نفس العدد» من العنـاصـر في حين تحوي R عنـاصـر أكثر من اي منها . وقبل ان نبرهن (٦) سنعطي مثالا كان جاليليـو أول من اشـار اليـه، وذلـك عام ١٦٣٨ ، اذ قال : انه يمكن ان يكون لمجموعة جزئية فعليـة من مجمـوعـة ما نفس العدد الاصلي الذي للمجموعة الكلية* ولكن بقي الامر عند ذلك الحـد الى ان جاء كانتـور في أواخـر القـرن التاسع عشر وبدأ عمله الرائع في نظرية المجموعات والاعداد الاصلية .

---

* كانت هذه الفكـرة معـروفـة لدى فلاسفـة الاسـلام، ولكنهـا بقيت في اطـار فلسفي لا تمس الـرياضيات الا عند ايضاحها عن طريق خطين مختلفين في الطول، كل نقطة في اكبرهما تناظرها نقطة في الاصغر . المدقق

المثال ١١ .

لتكن س = { ١^{٢} ، ٢^{٢} ، ٣^{٢} ، . . . } مجموعة مربعات الاعداد. ان عد (س) = عد (N) مع ان س مجموعة جزئية «صغيرة» في N . كل ما نحتاجه لاثبات ذلك هو ملاحظة ان الاقتران ق : N ⟵ س المعرف بـ ق (ن) = ن^{٢} هو اقتران تقابل.

نقدم الآن تعريفين:

المجموعة المنتهية: تسمى س مجموعة منتهية اذا وفقط اذا كانت س = ∅ أو س ~ { ١ ، ٢ ، . . . ، ن } لعدد ما ن ∈ N . والا فتسمى المجموعة لا نهائية (غير منتهية).

المجموعة القابلة للعد: تكون المجموعة س قابلة للعد اذا وفقط اذا كانت س = ∅ ، أو وجد اقتران شامل ق : N ⟵ س . وفي حالة وجود اقتران تقابل ق : N ⟵ س اي ان N ~ س سنقول ان س لا نهائية (غير منتهية) قابلة للعد.

فيتضح ان كل مجموعة منتهية قابلة للعد، ولكن هناك مجموعات قابلة للعد وغير منتهية (لا نهائية) مثل N .

المثال ١٢ .

مجموعة الاعداد الصحيحة Z لا نهائية قابلة للعد، اي ان عد (Z) = عد (N).
الطريقة الطبيعية لعد Z هي كتابة Z = { ٠ ، ١ ، -١ ، ٢ ، -٢ ، ٣ ، -٣ ، . . . } .

وبعبارة ادق، من السهل التأكد من ان ق : N ⟵ Z المعرف بـ ق (ن) = $\frac{ن}{٢}$ لكل ن زوجي و ق (ن) = $\frac{١ - ن}{٢}$ لكل ن فردي هو اقتران تقابل.

ويكون احيانا من الأسهل اثبات ان س قابلة للعد بأن نجد اقترانا من : س ⟵ N ، دون القيام بالعد الفعلي واليك التفاصيل التالية:

النظرية ١٢ .

لنفرض ان سه≠ ∅ فاذا وجد اقتران تبايني (واحد لواحد) ق : سه ⟵ N فان سه تكون قابلة للعد .

البرهان .

نعـــرف ان ق (سه) ⊆ N ؛ فاذا كان ن ∈ ق (سه)، نعـــرف هـ(ن) = $ق^{-1}$ (ن) . نثّبت س ∈ سه . واذا كان ن ∉ ق (سه) تعرف هـ (ن) = س . فيكون هـ : N ⟵ سه . واذا كان أ ∈ سه نأخذ ن = ق (أ). فيكون هـ (ن) = $ق^{-1}$ ق (أ) = أ ، واذن هـ اقتران شامل ومنه سه قابلة للعد .

المثال ١٣ .

الضرب الديكارتي N × N = { (ن ، ر) : ن ، ر ∈ N } قابلة للعد. وبعبارة تقريبية نعده على الرسم باستخدام طريقة القطر

١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ . . .
٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ . . .
٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ . . .
٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ . . .

لهذا فان N × N = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (١ ، ٤) ، . . . } . ويمكن برهنة ذلك رياضيا من النظرية ١٢ ، بأخذ سه = N × N وبتعريف ق (ن ، ر) = $٢^{ن} × ٣^{ر}$. فيكون $٢^{ن} × ٣^{ر} = ٢^{أ} × ٣^{ب}$؛ ون > أ يتضمن $٢^{ن-أ} × ٣^{ر} = ٣^{ب}$، وهذا

تناقض. وكذلك اذا كان ن $<$ أ يعطي تناقضا. لهذا فان $٢^{ن}٣^{ر} = ٢^{أ}٣^{ب}$ يعطي ن = أ ومنه ر = ب وهذا يعني ان ق هو تباين.

النظرية ١٣.

افرض ان $س_ن$ هي مجموعة غير منتهية قابلة للعد، لكل ن $\in N$. اذن $\bigcup \{ س_ن \mid ن \in N \}$ غير منتهية قابلة للعد.

البرهان.

بما ان $N \sim س_ن$ فانه بالامكان كتابة $س_ن = \{ أ_{ن١}، أ_{ن٢}، أ_{ن٣}، \ldots \}$، حيث العناصر مختلفة. ويمكننا عد $\bigcup س_ن$ بطريقة القطر كما في المثال ١٣. لهذا فان

$$\bigcup س_ن = \{ أ_{١١}، أ_{٢١}، أ_{١٢}، أ_{٣١}، أ_{٢٢}، أ_{١٣}، \ldots \}$$

على شرط ان لا تتكرر العناصر. وليس من الصعب كتابة برهان رياضي لذلك.

المثال ١٤.

مجموعة الاعداد النسبية Q غير منتهية قابلة للعد. اي ان عد (Q) = عد (N).

ولاثبات ذلك افرض ان $س_ن = \{ \frac{ر}{ن} \mid ر \in Z \}$ لكل ن $\in N$. كل $س_ن \sim Z$ ومن المثال ١٢ نحصل على $س_ن$ غير منتهية قابلة للعد ولكن $Q = \bigcup \{ س_ن \mid ن \in N \}$، اذن من النظرية ١٣ نحصل على ان Q غير منتهية قابلة للعد.

النتيجة القادمة أكثر عمقا من سابقاتها.

النظرية ١٤.

مجموعة الاعداد الحقيقية R غير قابلة للعد، وبما ان $N \subset R$ فان عد (N) $<$ عد (R).

البرهان.

هناك طرق عديدة للبرهان، بعضها يعتمد على تمثيل الاعداد الحقيقية بالنظام العشري. ولكننا سنستخدم ما اثبتناه ونعطي إثباتاً يعتمد على خاصية التشابك للفترات المغلقة.

لنفرض ان امكن ان R غير منتهية قابلة للعد. اذن يوجد اقتران ق : N ⟵ R بحيث ان ق (N) = { ق (١)، ق (٢)، . . . ، ق (ن)، . . . } = R . لأي فترة مغلقة ف = [أ ، ب] ، سوف نكتب ط (ف) = ب - أ دلالة على طول الفترة

لنأخذ $ف_{١}$ = [١ + ق (١) ، ٢ + ق (١)]. اذن ق (١) ∈ $ف_{١}^{م}$ وَط ($ف_{١}$) = ١ . فاذا كانت ق (٢) ∈ $ف_{١}^{م}$ تعرف $ف_{٢}$ ⊂ $ف_{١}$ حيث ان ط ($ف_{٢}$) < ١/٢ واذا كان ق (٢) ∈ $ف_{١}$

فانه بالامكان ايضا تعريف $ف_{٢}$ حيث ان ق (٢) ∈ $ف_{٢}^{م}$ وكذلك ، ط ($ف_{٢}$) < ١/٢ اذن

يوجد $ف_{٢}$ ⊂ $ف_{١}$ بحيث ان ق (٢) ⊂ $ف_{٢}^{م}$ وَط ($ف_{٢}$) < $\frac{١}{٢}$. نستمر بالاستقراء لنحصل

على فترات مغلقة $ف_{ن+١}$ ⊂ $ف_{ن}$ بحيث ان ط ($ف_{ن}$) < $\frac{١}{٢^{ن-١}}$ وَ

ق (ن) ∈ $ف_{ن}^{م}$ لكل ن ∈ N . . . . (٧)

ومن النظرية ٥ ، يوجد عنصر وحيد س ∈ R بحيث ان س ∈ $ف_{ن}$ لكل ن ∈ N . وبما ان س ∈ R = ق (N) اذن يوجد أ ∈ N بحيث ان س = ق (أ)، وبما ان س ∈ $ف_{أ}$ فان ق (أ) ∈ $ف_{أ}$ مما يناقض (٧).

وهذا يثبت النظرية.

تمارين ٣ ـ ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اثبت ان اي مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي ايضا قابلة للعد.

٢ ـ اثبت ان اي مجموعة تكون قابلة للعد إذا وفقط اذا كانت منتهية أو غير منتهية قابلة للعد.

٣ ـ بأخذ ق (س) = $\frac{٢س - ١}{س (س - ١)}$ ، اثبت ان الفترة المفتوحة (٠ ، ١) ليست غير منتهية قابلة للعد.

٤ ـ اثبت ان (٠ ، ١) ~ (أ ، ب) و(٠ ، ١) ~ (٠ ، ١].

٥ ـ لتكن سٍ مجموعة المتتاليات التي تتكون حدودها من عناصر في { ٠ ، ١ } . اي س ∈ سٍ تعني ان س = (س$_١$ ، س$_٢$ ، . . .) حيث س$_ن$ = ٠ أو س$_ن$ = ١ . اثبت ان س غير قابلة للعد.

٦ ـ اثبت ان مجموعة الاعداد غير النسبية ليست غير منتهية قابلة للعد.

٧ ـ لتكن سٍ ≠ ∅ ولتكن قو(سٍ) عائلة مجموعات سٍ الجزئية. اثبت انه لا يوجد اقتران شامل ق : س ← قو(س). استنتج ان قو(N) غير قابلة للعد.

٥ . مجموعات الأعداد المركبة

يمكن تعميم التعريف الاساسي لِـلتبـولـوجيـا على الاعداد الحقيقية الى الاعداد المركبة بتغييرات بسيطة فقط.

فمن الطبيعي ان نستبدل فكرة الكرة المفتوحة في R بفكرة القرص المفتوح في $\mathbb{C}$ ، اي نستبـدل أ ، س في R بـ أ، ع في $\mathbb{C}$ ونستبـدل القيم المطلقـة للعـدد الحقيقي س - أ بمقيـاس العدد المركب ع - أ. لهذا فاننا نعرف في $\mathbb{C}$:

القرص المفتوح.

ليكن أ ∈ $\mathbb{C}$ ، نق > ٠. فان

قر(أ ، نق) = {ع ∈ $\mathbb{C}$ | |ع - أ| < نق }

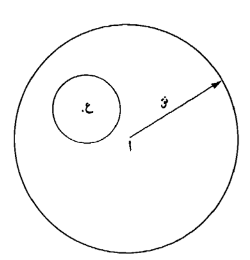
ويسمى القرص المفتوح الذي مركزه أ ونصف قطره نق .

هندسيا قر(أ ، نق) هو عبارة عن النقط التي داخل الدائرة في المستوى المركب التي مركزها أ ونصف قطرها نق . ونرمز لهذه الدائرة بـ

د(أ ، ر) = { ع ∈ $\mathbb{C}$ | | ع − أ | = نق } .

والقرص قر(٠ ، ١) يدعى قرص الوحدة المفتوح . والقرص المغلق الذي مركزه أ ونصف قطره نق هو قر[أ ، نق] = { ع ∈ $\mathbb{C}$ | | ع − أ | ⩽ نق } .

ونقول ان المجموعة الجزئية ح ⊂ $\mathbb{C}$ هي مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا كان لكل ع ∈ ح يوجد نق > ٠ بحيث ان قر(ع ، نق) ⊂ح . وكما في المثال ٦ ، يتبين ان كل قرص مفتوح هو مجموعة مفتوحة . وهذا موضح ادناه في القرص قر(أ ، نق) .



فاذا كانت ل ⊆ $\mathbb{C}$ فان ل تسمى مجموعة مغلقة اذا وفقط اذا كانت متممتها ل^م = { ع ∈ $\mathbb{C}$ ع ∉ ل } مفتوحة .

وتعمم تعريفات الداخل والانغلاق والمجموعة الكثيفة ونقط التراكم الى $\mathbb{C}$ باستبدال R بـ $\mathbb{C}$.

وبما انه يمكن اعتبار R مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ فانه من الضروري ان نؤكد انه عند دراسة

مجموعة جزئية من R قد يكون لها خواص تبولوجية عند النظر اليها كمجموعة جزئية من R ولا يكون لها نفس الخواص عند النظر اليها كمجموعة جزئية من ℂ . وهذا موضح بالمثال التالي:

المثال ١٥ .

من المثـال ٦ ، كل فترة مفتـوحـة (أ ، ب) هي مجمـوعة مفتوحة . ولكن (أ ، ب) ليست مجموعة مفتوحة في ℂ . لانه اذا كان ع ∈ (أ ، ب) وهذا يعني ان ع ∈ R وأ < ع < ب فان كل قرص قر(ع ، نق) يحوي نقطا ليست في (أ ، ب) .

المثال ١٦

من الواضح هندسيا ان المجموعة المعرفة بـ

(أ ، ب : حـ ، د) = { ع = س + ت ص | أ < س < ب ، حـ < ص < د }

حيث أ ، ب ، حـ ، د اعداد حقيقية هي مجموعة مفتوحة في ℂ . وتسمى مستطيلا مفتوحا. ولاثبات ان هذه المجموعة مفتوحة لنأخذ ع ∈ (أ ، ب : حـ ، د). اذن س ∈ (أ ، ب) ، ص ∈ (حـ ، د) وهاتان الفترتان مفتوحتان في R . اذن يوجد ك (س ، نق$_{١}$) ⊂ (أ ، ب) ، ك (ص ، نق$_{٢}$) ⊂ (حـ ، د). فلتكن نق = أص { نق$_{١}$ ، نق$_{٢}$ } . اذن قر(ع ، نق) ⊂ (أ ، ب : حـ ، د)، لان ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ت ص$_{١}$ ∈ قر(ع ، نق) تتضمن | س − س$_{١}$ | ≤ | ع$_{١}$ − ع | < نق ≤ نق$_{١}$ ومنه س$_{١}$ ∈ ك (س ، نق$_{١}$) ⊂ (أ ، ب). وبالمثل ص$_{١}$ ∈ (حـ ، د) ولهذا فان ع$_{١}$ ∈ (أ ، ب : حـ ، د).

كذلك فإن أي مجموعة على شكل

[أ ، ب : حـ ، د] = { ع ∈ ℂ | أ ≤ س ≤ ب ، حـ ≤ ص ≤ د }

هي مجموعة مغلقة في ℂ ، وتسمى مستطيلا مغلقا.

ولا معنى للقـول عن مجمـوعـة اعـداد مركبة بانها محصورة من اعلى اومن اسفل . فهذه الاصطـلاحـات تستخدم لمجموعات الاعداد الحقيقية فقط . ولكن يمكن تعريف الحصر على

$\mathbb{C}$ وذلك باستخدام مقياس الاعداد المركبة فقط:

المجموعة المحصورة:

نقول ان المجموعة الجزئية سـ $\neq \emptyset$ من $\mathbb{C}$ محصورة اذا وفقط اذا وجد عدد ما م $\in$ R بحيث ان $|$ع$|$ $\leqslant$ م لكل ع $\in$ سـ. هندسيا تكون المجموعة محصورة اذا كانت محتواة في قرص مركزه نقطة الاصل.

المثال ١٧.

(١) كل قرص محصور وذلك لان قر(أ ، نق) $\in$ قر[أ ، نق]، واذا كان $|$ع − أ$|$ $\leqslant$ نق فان $|$ع$|$ = $|$ع − أ + أ$|$ $\leqslant$ نق + $|$أ$|$ = م. (٢) كل مستطيل محصور، لانه اذا كان ع $\in$ [أ ، ب ؛ حـ ، د] فإن أ $\leqslant$ س $\leqslant$ ب ، حـ $\leqslant$ ص $\leqslant$ د ومنه:

$|$ع$|$ $\leqslant$ $|$س$|$ + $|$ص$|$ $\leqslant$ أك ($|$أ$|$ ، $|$ب$|$) + أك ($|$حـ$|$ ، $|$د$|$) = م.

ويمكن تعميم فكرة الفترة المغلقة في R الى $\mathbb{C}$ بتعريف القطعة المستقيمة:

اذا كان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ $\in$ $\mathbb{C}$. فان خـ[$ع_{١}$ ، $ع_{٢}$] = { ن$ع_{١}$ + (١ − ن)$ع_{٢}$ $|$ ٠ $\leqslant$ ن $\leqslant$ ١ }

تسمى القطعة المستقيمة بين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$. فاذا كان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ $\in$ R بحيث ان $ع_{١}$ $<$ $ع_{٢}$ فمن السهل أن نرى ان خـ[$ع_{١}$ ، $ع_{٢}$] = [$ع_{١}$ ، $ع_{٢}$] وهي الفترة المغلقة في R .

ان هناك شبيها للنظرية ٥ في المستطيلات المغلقة في $\mathbb{C}$.

النظرية ١٥.

لتكن (سـ$_{ن}$) متتالية من المستطيلات المغلقة المتشابكة سـ$_{ن}$ = [أ$_{ن}$ ، ب$_{ن}$ ؛ حـ$_{ن}$ ، د$_{ن}$] في $\mathbb{C}$ اي ان سـ$_{ن}$ $\supset$ سـ$_{ن+١}$ حيث ب$_{ن}$ − أ$_{ن}$ $\leftarrow$ ٠ ود$_{ن}$ − حـ$_{ن}$ $\leftarrow$ ٠. اذن $\bigcap_{ن=١}^{\infty}$ سـ$_{ن}$ تتكون من عدد مركب وحيد.

البرهان.

لتكن $ف_ن = [أ_ن ، ب_ن]$ ، $ق_ن = [حـ_ن ، د_ن]$، لهذا فان $(ف_ن)$ و$(ق_ن)$ هما متتاليتان من الفترات المغلقة المتشابكة في $\mathbb{R}$. ومن خاصية التشابك فانه يوجد س ، ص $\in \mathbb{R}$ بحيث ان س $\in$ $ف_ن$، ص $\in$ $د_ن$ لكل ن $\in \mathbb{N}$. اذن س + ت ص $\in$ $سہ_ن$ لكل ن $\in \mathbb{N}$ ، اي ان س + ت ص $\in \cap$ $سہ_ن$. ومن السهل اثبات ان س + ت ص وحيد. وهذا يثبت النظرية.

وباستبدال $\mathbb{R}$ بـ $\mathbb{C}$ في النظرية ٦ تبقى جميع النتائج صحيحة. وللبرهان نستبدل كما سبق الكرات المفتوحة بالاقراص المفتوحة عند الحاجة.

وفي الفصل القادم نعرف التقارب في متتاليات الاعداد المركبة وكل ما نفعله هو استبدال الاعداد الحقيقية باعداد مركبة، والقيم المطلقة بمقياس الاعداد المركبة. والنظرية ٧ تبقى صحيحة في حالة الاعداد المركبة. وكذلك النظرية ٨ والنظرية ٩ تبقيان صحيحتين لمجموعات جزئية من $\mathbb{C}$.

وتعريف التراص له ايضا معنى في $\mathbb{C}$ باعتبار التعريف الجديد للمجموعات المفتوحة في $\mathbb{C}$ ونتائج المثالين ٩ ، ١٠ صحيحة ايضا في $\mathbb{C}$. واذا اعتبرنا [أ ، ب] مجموعة جزئية من $\bar{\mathbb{C}}$ فانها تكون متراصة. وبشكل أعم فالنظرية التالية تناظر النظرية ١٠ للمستطيلات المغلقة.

النظرية ١٦.

المستطيل المغلق في $\mathbb{C}$ هو مجموعة متراصة.

البرهان.

نتبع الخطوط الرئيسية في النظرية ١٠. نفرض ان سہ = [أ ، ب ؛ حـ ، د] غير متراصة ونقسم سہ الى اربعة مستطيلات مغلقة بتصنيف الجوانب. ثم نستمر لنعين متتالية

مستطيلات مغلقة متشابكة تقاطعها نقطة واحدة (باستخدام النظرية ١٥). فنصل الى تناقض، كما في السابق، مما يثبت النظرية.

ونظرية هاين وبورل صحيحة ايضا في $\mathbb{C}$ والبرهان كما في $\mathbb{R}$. وفي الحقيقة اذا كانت ل محصورة ومغلقة في $\mathbb{C}$ فان ل محصورة تتضمن ل $\subseteq$ قر (٠ ، م) لعدد حقيقي م $>$ ٠ فاذن ل محتواة في المستطيل [−م ، م : −م ، م] الذي هو مجموعة متراصة حسب النظرية ١٦. كما في السابق.

التمارين ٣ ـ ٥

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اثبت ان نصف المستوى الايمن {ع = س + ت ص | س $>$ ٠} هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$. وضح بالرسم.

٢ ـ افرض ان ح مفتوحة في $\mathbb{C}$. اثبت ان ح $\cap$ $\mathbb{R}$ مفتوحة في $\mathbb{R}$.

٣ ـ لتكن م مجموعة متراصة في $\mathbb{R}$. اثبت ان م مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$.

٤ ـ لتكن س مجموعة جزئية ومحصورة في $\bar{\mathbb{C}}$. اثبت ان

$$أ = \{\ |ع_1 - ع_2|\ |\ ع_1 ، ع_2 \in س\}$$

محصورة من اعلى في $\mathbb{R}$. والعدد قطر (س) = ص.ح.ع(أ) يسمى قطر المجموعة س .
اثبت ان قطر (قر[أ ، نق]) = ٢ نق وقطر ((٠ ، ١ ؛ ٠ ، ١)) = $\sqrt{2}$.

٥ ـ تسمى المجموعة الجزئية س في $\mathbb{C}$ محدبة اذا وفقط اذا كانت القطعة المستقيمة خـ[ع$_1$ ، ع$_2$] $\subseteq$ س لكل ع$_1$ ، ع$_2$ $\in$ س . اثبت ان:

(١) الاقراص المفتوحة محدبة.

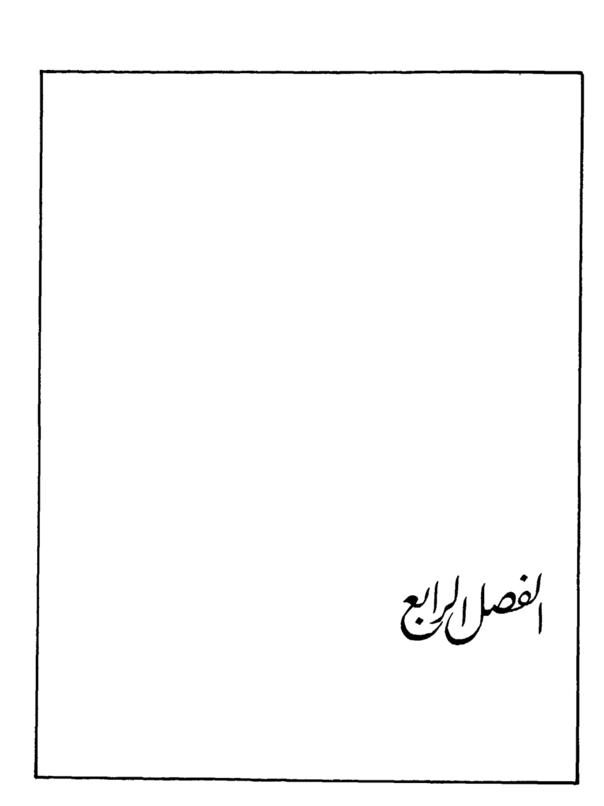
(٢) {ع = س + ت ص | ص $>$ س^2} مجموعة محدبة، وضح بالرسم.

(٣) اذا كانت س محدبة فان $\overline{س}$ أي مُغلقة س تكون محدبة ايضا (استخدم الحقيقة القائلة

ان ع ∋ $\overline{س}$ تتضمن أنه لاي و > ٠ يوجد ع* ∋ س بحيث ان | ع − ع* | < و.

٦ ـ اذا كان ع يقع على الدائرة د (١ ، $\frac{١}{٢}$) فاثبت ان ع* = ع$^{-١}$ تقع على الدائرة د (أ ، نق) ، أوجد أ ، نق .

٧ ـ اثبت ان $\mathbb{C}$ وقرص الوحدة المفتوح لهما نفس العدد الاصلي (جد اقتران تقابل ق : $\mathbb{C}$ ← قر (٠ ، ١)).



الفصل الرابع

المتتاليـات

١ . خاصية التمام في $\mathbb{C}$ وجبر التقارب

لقـد تـم استخـدام متتـاليـات الاعـداد النسبيـة والحقيقيـة على شكل واسع . وفي هذا الفصل ، يتركز جل اهتمامنا ، وليس كله ، على متتاليات الاعداد المركبة ، اي اقترانات ع : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ ، التي سوف نكتبها على الصورة ع = (ع$_{ن}$) = (ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، . . .).

ولمعظم التعـريفـات التي وردت ، في الفصـل الثـاني،البنـد ٤ ، خاصة متتاليات الاعداد النسبية ، معنى في متتاليات الاعداد المركبة . الا انه لا يمكن تطبيق مفاهيم المحصور من اعلى والمحصـور من اسفـل ، والـوتـيريـة والتبـاعـد الى ∞ و $-\infty$ على متتـاليات الاعداد المركبة ، لعلاقتها بالترتيب .

لهذا فاننا نقول ان ع = (ع$_{ن}$) محصورة اذا وفقط اذا وجد م $\in \mathbb{R}$ بحيث ان $|$ع$_{ن}| \leqslant$ م

لكل ن $\in$ N . والرمز $ل_\infty$ أو $ل^\infty$ ($\mathbb{C}$) يعني مجموعة جميع متتاليات الاعداد المركبة المحصورة.

ونقول ان ع تقاربية، ونهايتها أ، اذا وفقط اذا وجد أ $\in$ $\mathbb{C}$ بحيث انه لكل $\epsilon > ٠$ يوجد $ن_٠ = ن_٠ (\epsilon) \in$ N بحيث ان $|ع_ن - أ| < \epsilon$ لكل ن $\geqslant ن_٠$. وسوف نكتب $نها ع_ن$ = أ، $ع_ن \leftarrow$ أ اوع $_ن \leftarrow$ أ(ن $\leftarrow \infty$). وسوف نستخدم الرمز $تو_م$ أوتو$_م$($\mathbb{C}$) لتعني مجموعة جميع متتاليات الاعداد المركبة التقاربية. والمتتالية غير التقاربية تسمى تباعدية.

وتسمى ع متتالية صفرية، اذا وفقط اذا كان $نها ع_ن = ٠$. وتستخدم الرمز $تو_٠$ أو $تو_٠$ ($\mathbb{C}$) ليعني مجموعة جميع المتتاليات الصفرية.

ونقول ان ع هي متتالية كوشية، اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon > ٠$، يوجد $ن_٠ = ن_٠ (\epsilon)$ ، بحيث ان $|ع_ن - ع_ر| < \epsilon$ لكل ن ، ر $> ن_٠$. وسنرمز لمجموعة جميع المتتاليات الكوشية بالرمز ك أوك ($\mathbb{C}$).

والنظرية الاساسية الاولى التي نناقشها تتعلق بالتمام:

النظرية ١ [تمام $\mathbb{C}$].

تق ($\mathbb{C}$) = ك ($\hat{\mathbb{C}}$)، أي انه: تكون متتالية الاعداد المركبة تقاربية، اذا وفقط اذا كانت كوشية.

البرهان:

لتكن ع $\in$ تق ($\mathbb{C}$). اذن $|ع_ن - أ| < \frac{\epsilon}{٢}$ لكل ن $\geqslant$ ن. . لهذا فانه اذا كانت ر $\geqslant$ ن، ون $\geqslant ن_٠$ ، فان المتباينة المثلثية (النظرية ٢٠ ، الفصل الثاني) تتضمن $|ع_ن - ع_ر| = |ع_ن - أ + أ - ع_ر| \leqslant |ع_ن - أ| + |ع_ر - أ| < \epsilon$. ومنه ع $\in$ ك ($\mathbb{C}$). وبالعكس، لنفرض ان ع $\in$ ك ($\hat{\mathbb{C}}$). اذن $|ع_ن - ع_ر| < \epsilon$ لكل ن ، ر $\geqslant ن_٠$. ولكن اذا كانت $ع_ن$

= س $_{ن}$ + ت ص $_{ن}$ ، س $_{ن}$ ، ص $_{ن}$ ∋ R فان

ع $_{ن}$ − ع $_{ر}$ = س $_{ن}$ − س $_{ر}$ + ت (ص $_{ن}$ − ص $_{ر}$)،

من النظرية ٢٠، الفصل الثاني، نحصل على | س $_{ن}$ − س $_{ر}$ | ⩽ | ع $_{ن}$ − ع $_{ر}$ | و | ص $_{ن}$ − ص $_{ر}$ | ⩽ | ع $_{ن}$ − ع $_{ر}$ | . لهذا فان (س $_{ن}$) وَ(ص $_{ن}$) في ك (R)، التي تساوي تق (R) من تمام R . اذن س $_{ن}$ ← س ∋ R وص $_{ن}$ ← ص ∋ R . لهذا فان

| ع $_{ن}$ − (س + ت ص) | ⩽ | س $_{ن}$ − س | + | ص $_{ن}$ − ص | ← ٠ (ن ← ∞)، اذن ع $_{ن}$ ← س + ت ص. لهذا فان (ع $_{ن}$) ∋ تق (ℂ)، مما يثبت النظرية.

المثال ١.

(أ) ع = (ت ^{ن}) = (ت ، −١ ، −ت ، ١ ، . . .) تباعدية. لانه اذا كانت ع ∋ تق ، فان ع ∋ ك، فتكون | ت ^{ن} − ت ^{ر} | < ١ لكل ن ، ر ⩾ ن$_{٠}$ (١). ، فبأخذ ن = ٤ ن$_{١}$ ⩾ ن$_{٠}$ ، ر = ٤ ن$_{١}$ + ٢ ، نحصل على التناقض ٢ < ١.

(ب) ع = ($\frac{ت^{ن}}{ن}$) ∋ تق. ، لأن | $\frac{ت^{ن}}{ن}$ | = $\frac{|ت^{ن}|}{ن}$ = $\frac{١}{ن}$ ← ٠ (ن ← ∞).

وعلى ضوء نتائج سابقة، فان برهان النظرية التالية لا يقدم شيئا جديدا.

النظرية ٢ :

لتكن ع = (ع $_{ن}$) = (س $_{ن}$ + ت ص $_{ن}$)، واكتب س = (س $_{ن}$) ، ص = (ص $_{ن}$). اذن

(أ) ع ∋ تق تتضمن ان نها ع $_{ن}$ وحيدة.

(ب) تق$_{٠}$ ⊂ تق = ك ⊂ ل∞

(حـ) ع ∋ تق اذا وفقط اذا كان س ∋ تق و ص ∋ تق .

البرهان.

(أ) افرض ان $ع_ن \leftarrow أ$، $ع_ن \leftarrow ب$، وخذ $\epsilon > ٠$. اذن يوجد $ن_٠$ بحيث ان $|ع_ن - أ| < \frac{\epsilon}{٢}$ و $|ع_ن - ب| < \frac{\epsilon}{٢}$ لكل $ن \geqslant ن_٠$. فباستخدام المتباينة المثلثية، نحصل على $|أ - ب| < \epsilon$، لهذا فإن أ = ب.

(ب) اذا كان $ع_ن \leftarrow ٠$ فان $(ع_ن)$ تقاربية. لقد اثبتنا ان ك = تق في نظرية ١. لنفرض الآن ان ع $\in$ تق، ولنأخذ $\epsilon = ١$. اذن يوجد $ن_٠$ بحيث ان $|ع_ن - أ| < ١$ لكل $ن \geqslant ن_٠$، ومنه $|ع_ن| \leqslant |ع_ن - أ| + |أ| < ١ + |أ|$ لكل $ن \geqslant ن_٠$. لهذا فان $|ع_ن| \leqslant$ أك $(|ع_١|، \ldots، |ع_{ن_٠}|، ١ + |أ|)$ لكل ن $\in$ N ومنه ع $\in$ ل$^\infty$.

(حـ) اذا كانــت $ع_ن \leftarrow أ = حـ + د ت$، فان $|س_ن - حـ| \leqslant |ع_ن - أ| \leftarrow ٠$ وكذلك $|ص_ن - د| \leqslant |ع_ن - أ| \leftarrow ٠$ ومنه $س_ن \leftarrow حـ$ و $ص_ن \leftarrow د$. وبالعكس اذا كانت س $\in$ تق، وَص $\in$ تق فان $|ع_ن - (حـ + د ت)| = |س_ن - حـ + ت (ص_ن - د)| \leqslant |س_ن - حـ| + |ص_ن - د| \leftarrow ٠$، واذن $ع_ن \leftarrow حـ + د ت$، مما يثبت النظرية.

في النظـريـة ١١، الفصـل الثـاني، اثبتنا نتيجة هامة تتعلق بالتركيب الجبري لمتتاليات الاعداد النسبية المحصورة (ل$^\infty$ (Q)، + ، ٠) وهي انها حلقة تبديلية ذات عنصر محايد. كذلك بينا ان تق (Q') ، ك (Q) هي حلقات جزئية من ل$^\infty$ (Q) وكذلك تق$_٠$ (Q) مثالية في ك (Q).

فسـوف نبحث الآن في الـتركيب الجـبري لـِل$^\infty$ ($\mathbb{C}$) ومجمـوعاتها الجزئية تق ($\mathbb{C}'$) وتق$_٠$ ($\mathbb{C}$):

من الطبيعي ان نعرف الجمع والضرب لمتتاليات الاعداد المركبة بالطريقة التالية:

$$ع + ع^* = (ع_ن + ع^*_ن)، ع ع^* = (ع_ن ع^*_ن) \quad \ldots\ldots \quad (١)$$

حيث $ع = (ع_ن)$، $ع^* = (ع^*_ن)$.

كذلك اذا كان أ $\in \mathbb{C}$ أو أ $\in$ R فاننا نعرف

أ ع = (أ ع $_{ن}$) . . . . (٢)

ان العمليـات المـذكـورة في (١) و (٢) تمكننا من دراسة مجموعات من الاعداد المركبة من حيث كونهـا فضـاءات خطيـة أو جبر يـات على الحقـل $\mathbb{C}$ (أو R) . وبـذا نتحـدث عن الفضاءات الخطية والجبر يات المركبة، أو الحقيقية حسب الحقل الذي نأخذه.

والنتيجـة التـاليـة هامـة، ليس لكـونهـا ذات اهميـة في التركيب، بل لانها تعطينا قواعد لحساب المتتاليات التقاربية عمليا.

النظرية ٣.

(أ) ل$^{\infty}$ هي جبر ية تبديلية من الاعداد المركبة، ذات عنصر محايد.

(ب) تق جبر ية جزئية من ل$^{\infty}$ ذات عنصر محايد. وكذلك اذا كانت ع $_{ن}$ ← أ، ع$^{*}_{ن}$ ← ب فانه لكل حـ $\in$ $\mathbb{C}$ نحصل على:

ع $_{ن}$ + ع$^{*}_{ن}$ ← أ + ب

حـ ع $_{ن}$ ← حـ أ

ع $_{ن}$ ع$^{*}_{ن}$ ← أ ب

كذلك اذا كان ع$^{*}_{ن}$ $\neq$ ٠ لكل ن $\in$ N وع$^{*}_{ن}$ ← ب $\neq$ ٠ فان

$\frac{ع_{ن}}{ع^{*}_{ن}}$ ← $\frac{أ}{ب}$.

(حـ) تق$_{\circ}$ مثالية في ل$^{\infty}$ بمعنى ان تق$_{\circ}$ هي جبر ية جزئية من ل$^{\infty}$ ، وتحقق العلاقة ع ع* $\in$ تق$_{\circ}$، عندما تكون ع $\in$ تق$_{\circ}$ ، ع* $\in$ ل$^{\infty}$.

البرهان.

(أ) يجب التحقق من صحـة عدة مسلمات (انظـر البنـد ٣ من الفصل الاول) لكن جميع الامور مباشرة مع انها متعبة، فننصح القاريء بالتحقق من التفاصيل. ولعل اهم ما في الامر

هو التأكد من ان العمليات في (١) و(٢) معرفة تعريفا جيدا. فعلى سبيل المثال ع ، ع* $\in$ ل∞ تتضمن ان |ع ن| $\leqslant$ م١ و|ع*| $\leqslant$ م٢ ومنه |ع ن + ع*ن| $\leqslant$ م١ + م٢ و|ع ن ع*ن| $\leqslant$ م١ م٢، لكل ن $\in$ N. لهذا فان ع + ع* ، ع ع* $\in$ ل∞، والصفر هو ص = (٠ ، ٠ ، ٠ ، ...)، والعنصر المحايد هو و = (١ ، ١ ، ١ ، ...).

(ب) من الواضح ان ما نحتاج لأثباته ان ع + ع* ، حـ ع ، ع ع* موجودة في تق ، عندما تكون ع ، ع* $\in$ تق وحـ $\in$ $\mathbb{C}$. ولا علاقة لـ $\frac{ع_ن}{ع^*_ن}$ ← $\frac{أ}{ب}$ بكون تق جبرية جزئية من ل∞ .

واذا كانت ع ن ← أ، ع*ن ← ب فانه لكل ϵ > ٠ يوجد ن٠ ، ن١ ، بحيث ان |ع ن - أ| < $\frac{\epsilon}{٢}$ لكل ن $\geqslant$ ن٠ ، و|ع*ن - ب| < $\frac{\epsilon}{٢}$ لكل ن $\geqslant$ ن١ ، اذن |ع ن + ع*ن - (أ + ب)| $\leqslant$ |ع ن - أ| + |ع*ن - ب| < ϵ لكل ن $\geqslant$ ن٠ + ن١ ، مما يعطي ان ع ن + ع*ن ← أ + ب.

الآن لنفرض ان ع ن ← أ، حـ $\in$ $\mathbb{C}$. خذ ϵ > ٠ واختر ن٠ بحيث ان |ع ن - أ| < $\frac{\epsilon}{١ + |حـ|}$ لكل ن $\geqslant$ ن٠. نختار ١ + |حـ| بدلا من |حـ| ، لان حـ قد تكون صفرا.

ينتج الآن ان:

$$|حـ ع_ن - حـ أ| = |حـ| |ع_ن - أ| \leqslant \frac{|حـ| \epsilon}{١ + |حـ|} < \epsilon .$$

لكل ن $\geqslant$ ن٠ ومنه حـ ع ن ← حـ أ.

ولاثبات ان ع ن ع*ن ← أ ب، من الطبيعي ان نأخذ |ع ن ع*ن - أب| ، وهذه سوف نكتبها على الصورة |ع ن (ع*ن - ب) + ب (ع ن - أ)| . الآن ع $\in$ تق تتضمن ع $\in$ ل∞، من النظرية ٢ ، اذن يوجد م $\in$ R بحيث ان |ع*ن| < م لكل ن $\in$ N . فاذا اخذنا ϵ

> . فانه يوجد $ن_٠$ ، $ن_١$ بحيث ان $|ع^*_ن - ب| < \frac{\epsilon}{٢م}$ لكل $ن \geqslant ن_٠$ وكذلك $|ع_ن - أ|$

$< \frac{\epsilon}{٢(١ + |ب|)}$ لكل $ن \geqslant ن_١$. اذن لكل $ن \geqslant ن_٠ + ن_١$ نحصل على

$$|ع_ن ع^*_ن - أب| \leqslant |ع_ن (ع^*_ن - ب)| + |ب||ع_ن - أ|$$

$$\leqslant م|ع^*_ن - ب| + |ب||ع_ن - أ|$$

$$< \frac{\epsilon}{٢} + \frac{\epsilon}{٢} = \epsilon .$$

وهذا يتضمن ان $ع_ن ع^*_ن \leftarrow أب$.

ولاثبات الجزء الاخير من (ب)، لنأخذ $\left|\frac{ع_ن}{ع^*_ن} - \frac{أ}{ب}\right|$ ونكتبه على الصورة $|ب(ع_ن - أ) + أ(ب - ع^*_ن)| / |ب||ع^*_ن|$ وهذا أقل من أو يساوي :

$$\frac{|ع_ن - أ|}{|ع^*_ن|} + \frac{|أ||ع^*_ن - ب|}{|ب||ع^*_ن|} \quad . . . \quad (٣)$$

فبما ان $ع^*_ن \leftarrow ب$، فاننا نحصل على $|ع^*_ن - ب| < \frac{|ب|}{٢}$ لكل $ن \geqslant ن_٠$ ومنه $|ع^*_ن| = |ع^*_ن - ب + ب| \geqslant |ب| - |ع^*_ن - ب| > \frac{|ب|}{٢}$ لكل $ن \geqslant ن_٠$.

اذن (٣) أقل من أو ساوي

$$\frac{٢|ع_ن - أ|}{|ب|} + \frac{٢|أ||ع^*_ن - ب|}{|ب|^٢} \quad . . . . . \quad (٤)$$

ولكن $|ع_ن - أ| \leftarrow ٠$ وكذلك $|ع^*_ن - ب| \leftarrow ٠$، وباستخدام نتيجة (ب) السابقة نرى ان نهاية المقدار في ٤ هي الصفر ومنه $\frac{ع_ن}{ع^*_ن} \leftarrow \frac{أ}{ب}$.

لاحظ ان و= (١ ، ١ ، ١ ، . . . . .) تقاربية، وهي عنصر تق المحايد.

(حـ) اذا كان ع ، ع* ∋ تق. وحـ ∋ $\mathbb{C}$ فان (ب) تتضمن ع ن + ع* ن ← ٠ ، حـ ع ن ← ٠ وع ن ع* ن ← ٠ ، ومنه تق. جبرية جزئية من ل∞ (ومن تق).

لنفرض ان ع ∋ تق. وع* ∋ ل∞ . اذن |ع* ن| < م لكل ن ∋ N . واذا كان

∋ > ٠ فانه يوجد ن. ، بحيث ان |ع ن| ≤ $\frac{\epsilon}{م}$ لكل ن ≥ ن. . اذن |ع ن ع* ن| < ∈

لكل ن ≥ ن. ، ومنه ع ع* ∋ تق. . وقد تم اثبات النظرية.

وبوجه خاص ينتج من النظرية ٣ ان ل∞ ، تق ، تق. هي فضاءات خطية حقيقية. وهذا واضح اذا حصرنا الاعداد حـ بحيث تكون في R .

المثال ٢ .

من النظرية ٢ (أ)، نرى انه يمكن ربط كل متتالية تقاربية (ع ن) بنهايتها الوحيدة نها ع ن ، التي هي عدد مركب. وهذا يعني انه يوجد اقتران ق : تق ← $\mathbb{C}$ بين الجبريتين تق ، $\mathbb{C}$ معرف بـ ق (ع) = نها ع ن.

سنثبت الآن ان هذا الاقتران هو اقتران محافظ. (انظر الفصل الاول، البند ٣). اذا كانت ع ، ع* ∋ تق وحـ ، د ∋ $\mathbb{C}$ فان النظرية ٣ (ب) تنص على ان

نها (حـ ع ن + د ع* ن) = نها حـ ع ن + نها د ع* ن
= حـ نها ع ن + د نها ع* ن
= حـ ق (ع) + د ق (ع*).

واذن ق (حـ ع + د ع*) = حـ ق (ع) + د ق (ع*). كذلك نها ع ن ع* ن = (نها ع ن) (نها ع* ن). واذن ق (ع ع*) = ق (ع) ق (ع*).

لاحظ ان ق هو اقتران شامل لانه اذا كان حـ ∋ $\mathbb{C}$ فان ع = (حـ ، حـ ، حـ ، . . .) ∋ تق وَق (ع) = حـ. ولكن

ق ليس واحدا لواحد، فعلى سبيل المثال، اذا كان ع = $(\frac{1}{ن})$ فان ق (ع) = ق (صـ)

= ٠ ولكن ع $\neq$ صـ . اذن ق ليس تشاكلا.

كثيرا ما يكون من غير الممكن تطبيق قوانين النهايات في النظرية ٣ (ب) مباشرة بل يتطلب الامر بعض العمليات الاولية.

وهذا موضح في المثالين التاليين.

المثال ٣.

افرض ان $س_ن = \frac{٦ن - ٥}{٣ن + ٢}$ لكل ن $\in$ N . لا يمكن استخدام $س_ن = \frac{ع_ن}{ع^*_ن}$ حيث $ع_ن$ = ٦ن − ٥ و $ع^*_ن$ = ٣ن + ٢ لان $ع_ن$ ، $ع^*_ن$ ليستا تقاربيتين. ولكن اذا قسمنا البسط والمقام على ن نحصل على

$$س_ن = \frac{٦ - \frac{٥}{ن}}{٣ + \frac{٢}{ن}} \leftarrow \frac{٦}{٣} = ٢$$ ، لأن

$\frac{حـ}{ن} \leftarrow ٠$ لكل حـ $\in$ R .

وبطريقة مشابهة،

$$\frac{ت^ن ن^٢ + ٣ن - ٢}{-ن^٣ + ٢} = \frac{\frac{ت^ن}{ن} + \frac{٣}{ن^٢} - \frac{٢}{ن^٣}}{-١ + \frac{٢}{ن^٣}} \leftarrow \frac{٠}{-١} = ٠ .$$

لعله من المفيد ان نذكر انه لا يمكن لأي عدد من العمليات الصحيحة ان تحول المتتالية التباعدية الى متتالية تقاربية.

المثال ٤.

هل المتتالية $(\sqrt{ن + ١} - \sqrt{ن})$ تقاربية ؟ قد يقول القاريء بأن $\sqrt{ن + ١} \leftarrow \infty$ وَ

$\sqrt{ن} \leftarrow \infty$ اذن $\sqrt{ن+1} - \sqrt{ن} \leftarrow \infty - \infty = 0$. وهذا غير صحيح لان قوانين النهايات تطبق فقط على المتتاليات التقاربية . و $\sqrt{ن}$ تباعدية . ولكن كل ما نحتاج اليه هو ان نكتب

$$\sqrt{ن+1} - \sqrt{ن} = \frac{(\sqrt{ن+1}-\sqrt{ن})(\sqrt{ن+1}+\sqrt{ن})}{\sqrt{ن+1}+\sqrt{ن}} = \frac{1}{\sqrt{ن+1}+\sqrt{ن}} \leftarrow 0 .$$

هنا كانت النهاية بالطريقة الصحيحة مساوية النهاية بالطريقة الخطأ، ربما لسوء الحظ. ولكن المثال

$$ن - \sqrt{ن^2+2ن} \leftarrow -1$$

يبين ان ذلك لا يحدث عادة.

والنظرية التالية تمكننا من اخذ النهايات لمتباينات اطرافها متتاليات تقاربية (يجب ان تكون المتتاليات بالطبع حقيقية).

النظرية ٤ .

(أ) اذا كانت $(س_ن)$ ، $(ص_ن)$ متتاليتين حقيقيتين تقاربيتين وكان يوجد $ن_0 \in N$ ، بحيث ان $س_ن \leqslant ص_ن$ لكل $ن \leqslant ن_0$ ، فان نها $س_ن \leqslant$ نها $ص_ن$.

(ب) (قاعدة الشطيرة). اذا كانت $س_ن \leqslant أ_ن \leqslant ص_ن$ لكل $ن \leqslant ن_0$ ، وكانت نها $س_ن =$ نها $ص_ن = حـ$، فان $(أ_ن)$ هي متتالية تقاربية ونها $أ_ن = حـ$.

البرهان.

(أ) افرض ان $س_ن \leftarrow أ$، $ص_ن \leftarrow ب$، وافرض، ان كان ذلك ممكنا، ان $أ > ب$.

خذ $\epsilon = \frac{أ-ب}{2} > 0$. اذن يوجد $ن > ن_0$ بحيث ان $أ - \epsilon < س_ن$ و $ص_ن \leqslant ب + \epsilon$، ومنه $أ - \epsilon < س_ن \leqslant ص_ن \leqslant ب + \epsilon$، وهذا يتضمن ان $أ - ب < 2\epsilon$. وهذا يعطينا التناقض $\epsilon < \epsilon$. اذن $أ \leqslant ب$.

(ب) هذا يؤكد الواضح في المتباينات، وهو ان ما توسط بين متتاليتين تقتربان من نهاية واحدة، له ايضا نفس هذه النهاية.

لتكن $\epsilon > 0$. اذن يوجد $ن_1$ ، $ن_2$ بحيث ان $|س_ن - حـ| < \epsilon$ ، $|ص_ن - حـ| < \epsilon$ لكل $ن \geqslant ن_1 + ن_2$. اذن لكل $ن \geqslant ن_0 + ن_1 + ن_2$

$- \epsilon < س_ن - حـ \leqslant أ_ن - حـ \leqslant ص_ن - حـ < \epsilon$ ،

ومنه $|أ_ن - حـ| < \epsilon$ ولهذا فان نها $أ_ن = حـ$. وبذا يتم البرهان.

المثال ٥.

افرض ان $أ_ن = (٢^ن + ٣^ن)^{\frac{1}{ن}}$ لكل $ن \in N$. الآن $٣^ن < ٢^ن + ٣^ن < ٢ (٣^ن)$، ومنه $٣ < أ_ن < (٢^{\frac{1}{ن}})٣$، لكل $ن \in N$. خذ $س_ن = ٣$، $ص_ن = (٢^{\frac{1}{ن}})٣$، في قاعدة الشطيرة. الآن $٢^{\frac{1}{ن}} \leftarrow ١$ لأن $٢^{\frac{1}{ن}} = ١ + د_ن$، $د_ن > ٠$، اذن $٢ = (١ + د_ن)^ن \geqslant ١ + ن د_ن$ من متباينة برنولي. اذن $٠ < د_ن \leqslant \frac{١}{ن}$، لهذا $د_ن \leftarrow ٠$، لهذا فان $٢^{\frac{1}{ن}} \leftarrow ١$. من قاعدة الشطيرة فنحصل على نها $أ_ن$ = نها $س_ن$ = نها $ص_ن = ٣$.

تمارين ٤ ـ ١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ افرض ان $(ع_ن) \in$ ك. اثبت انه يوجد متتالية من الاعداد الطبيعية $(ن_ر)$ تحقق $ن_1 < ن_2 < ن_3 < \ldots$ بحيث ان $|ع_{ن_{ر+1}} - ع_{ن_ر}| < ٢^{-ر}$ لكل $ر \in N$.

٢ ـ اذا كانت $ع = (س_ن + ت ص_ن) \in ل^\infty$ وكانت $(س_ن)$ وتيرية متناقصة و $(ص_ن)$ وتيرية

متزايدة. هل تكون ($ع_ن$) تقاربية؟

٣ ـ اثبت ان ع $\in$ ل$^\infty$ اذا وفقط اذا كانت س $\in$ ل$^\infty$ و ص $\in$ ل$^\infty$.

٤ ـ اثبت انه لا يوجد عنصر محايد في المثالية تق. وان تق ليست مثالية في ل$^\infty$.

٥ ـ اثبت ان $ع_ن \leftarrow$ أ تعطي $|ع_ن| \leftarrow |أ|$. اعط مثالا بحيث ان ($|ع_ن|$) تقاربية و($ع_ن$) تباعدية. هل الاقتران ق : تق $\leftarrow \mathbb{C}$ المعرف بـ ق (ع) = نها $|ع_ن|$ هو اقتران محافظ؟

٦ ـ لكل ع $\in$ ل$^\infty$ عرّف $||ع||$ = ص ح ع $|ع_ن|$. نسمي $||ع||$ معيار المتتالية المحدودة ع = ($ع_ن$). اذا كانت ع ، ع* $\in$ ل$^\infty$ ، حـ $\in \mathbb{C}$ فاثبت ان $||ع||$ = ٠ اذا وفقط اذا كانت ع = صـ، $||حـ ع|| = |حـ| \, ||ع||$ وَ $||ع + ع^*|| \leqslant ||ع|| + ||ع^*||$. لهذا المعيار خواص مقياس الاعداد المركبة. بين ان $||ع ع^*|| \leqslant ||ع|| \, ||ع^*||$ واعط مثالا يكون فيه $||ع ع^*|| < ||ع|| \, ||ع^*||$.

اذا كان ع $\in$ تق ، فاثبت ان $|$نها $ع_ن| \leqslant ||ع||$.

٧ ـ لتكن ع $\in \mathbb{C}$ ، $|ع| = ١$. افرض ان ($ع^ن$) = (ع ، $ع^٢$ ، . . .) تقاربية. فاثبت ان ع = ١ .

٨ ـ لتكن ($أ_ن$) متتالية اعداد حقيقية غير سالبة بحيث ان نها $أ_ن$ = $أ_٠$. اثبت ان نها $\sqrt{أ_ن} = \sqrt{أ_٠}$. من المفيد ان نعزل الحالة أ = ٠.

٩ ـ لتكن ($أ_ن$) متتالية اعداد حقيقية موجبة بحيث ان $أ_ن \leftarrow \infty$. لتكن سـ مجموعة جميع المتتاليات الحقيقية ($س_ن$) بحيث ان $\frac{س_ن}{أ_ن} \leftarrow ٠$ ولتكن صـ مجموعة جميع المتتاليات الحقيقية ($ص_ن$) بحيث ان $أ_ن - ص_ن \leftarrow \infty$. اثبت ان ل$^\infty \subset$ سـ $\subsetneq$ صـ والاحتواءات فعلية.

١٠ ـ اعطيت متتاليات حدها النوني كما يلي. ناقش سلوك هذه المتتاليات عندما ن $\leftarrow \infty$.

(أ) $\frac{ن^٢ - ٤ن + ١}{٣ن^٢ + ٥}$ ،

(ب) $\frac{ن(ن - ١)}{(ن + ٢)(ن + ١)(ن + ٦)}$ ،

(حـ) $(٣^ن + ٥^ن)^{\frac{١}{ن}}$ ،

(د) $\frac{ن}{١ + ن^٢} + \frac{ن}{٢ + ن^٢} + \dots + \frac{ن}{ن + ن^٢}$ ،

(هـ) $ن - \sqrt{(ن + ١)(ن + ٢)}$ ،

(و) $\frac{١ + ٢ + ٣ + \dots + ن}{ن^٢}$.

١١ ـ اذا كان $ع_ن \leftarrow أ$ فاثبت ان الوسط الحسابي $\frac{ع_١ + ع_٢ + \dots + ع_ن}{ن} \leftarrow أ$. (ارشاد: عين $ن_٠$

$= ن_٠ (\in)$ بحيث $|ع_ن - أ| < \in$ لكل $ن > ن_٠$. اكتب $ع_١ + ع_٢ + \dots + ع_ن$ على صورة $(ع_١ + ع_٢ + \dots + ع_{ن_٠}) + (ع_{ن_٠+١} + \dots + ع_ن)$. ثم استخدم $ع \in ل^\infty$.

استنتج ان المتتالية $\frac{١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \dots + \frac{١}{ن}}{ن}$ تقاربية وجد نهايتها. اثبت انه بالرغم

من ان المتتالية $(س_ن) = (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، ١ ، \dots)$ تباعدية. الا ان المتتالية

$\frac{س_١ + س_٢ + \dots + س_ن}{ن}$ تقاربية. ما هي نهايتها ؟

ناقش سلوك الوسط الحسابي للمتتالية $(ع_ن) = (ت^ن) = (ت ، -١ ، -ت ، ١ ،$
$\dots)$ عندما $ن \leftarrow \infty$.

١٢ ـ اذا كانت $(س_ن)$ متتالية حقيقية و $س_ن \leftarrow \infty$ فاثبت ان $\frac{س_١ + س_٢ + \dots + س_ن}{ن} \leftarrow \infty$.

١٣ ـ اذا كان $س_ن \geqslant ٠$ لكل $ن \in N$ وكان $س_ن \leftarrow أ$ فاثبت ان الوسط الهندسي $(س_١ س_٢ \dots س_ن)^{\frac{١}{ن}} \leftarrow أ$.

اذا كانت ص = $(١ ، ٢ ، ١ ، ٢ ، \dots)$ فجد نها $(ص_١ ص_٢ \dots ص_ن)^{\frac{١}{ن}}$.

٢ ـ النهايات العليا والسفلى

يعالج هذا البند متتاليات حقيقية فقط. اذا اعطينا متتالية حقيقية س = (س $_{ن}$) = (س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، . . .) فانها قد تكون تقاربية، تتقارب الى نهاية (وحيدة)، أ ، وهذه عدد حقيقي. أو قد تكون تباعدية. فاذا كانت تباعدية فيمكن تصنيف سلوكها عادة بما يلي:

(١) اذا كانت س تباعدية وكانت س ∈ ل$^{\infty}$ فاننا نقول ان س تتذبذب محصورة.

(٢) اذا كانت س تباعدية و س ∉ ل$^{\infty}$ فان هناك ثلاث حالات محتملة:

(أ) س تتباعد الى ∞ اي ان س $_{ن}$ ← ∞ كما عرفنا في السابق.

(ب) س تتباعد الى −∞ اي ان س $_{ن}$ ← −∞ كما عرفنا في السابق.

(حـ) لا تحدث (أ) ولا (ب) فنقول عندها ان س تتذبذب غير محصورة.

المثال ٦.

(أ) (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، . . .) تتذبذب محصورة.

(ب) (١ ، $\sqrt{٢}$ ، ٣ ، $\sqrt{٤}$ ، ٥ ، $\sqrt{٦}$ ، . . .) تتباعد الى ∞ .

(حـ) ($(-٢)^{ن}$) تتباعد الى −∞ .

(د) (−١ ، ٠ ، −٢ ، ٠ ، −٣ ، . . .) تتذبذب غير محصورة.

سوف نوسع فكرة النهايات للمتتاليات التقاربية ليصبح بالامكان ربط اي متتالية حقيقية برمزين يدعيان النهاية العليا والسفلى للمتتالية، لكي نتمكن من تغطية جميع الاحتمالات. ولا بد من احتواء الرمزين ∞ ، −∞ وباقي الاعداد الحقيقية.

لهذا وكي لا نستثني اي حالة،من المفيد ان نعرف

$$-\infty < أ < \infty \quad \text{لكل أ} \in R \quad . . . \quad (٥)$$

افرض ان س = (س $_{ن}$) متتالية حقيقية. فاذا كانت س غير محصورة من اعلى فاننا نكتب $\overline{نها}$ س $_{ن}$ = ∞ .

واذا كانت س محصورة من اعلى فسوف نأخذ

$$م_ر = ص.ح.ع \{ س_ر ، س_{ر+١} ، \ldots \} = ص.ح.ع_{ن \geqslant ر} س_ن$$

اذن $س_ن \leqslant م_ر$ لكل $ن \geqslant ر$، وكذلك $م_ر \geqslant م_{ر+١}$ لكل $ر \geqslant ١$. لهذا فان المتتالية $(م_ر)$ هي متتالية وتيرية متناقصة. اذن من النظرية ٣، الفصل الثالث، اما ان يكون $نها م_ر = ك.ح.د م_ر$ اذا كانت $(م_ر)$ محصورة من اسفل، أو $م_ر \leftarrow -\infty$ اذا كانت $(م_ر)$ غير محصورة من اسفل. في الحالة الاولى نكتب

$$\overline{نها} س_ن = نها م_ر = ك ح د_{ر \geqslant ١} [ص.ح.ع_{ن \geqslant ر} س_ن] \quad \ldots \ldots (٦)$$

وفي الحالة الثانية نكتب $\overline{نها} س_ن = -\infty$.

خلاصة ما ورد: تربط كل متتالية حقيقية اما بعدد حقيقي كما في (٦) أو بـ ∞ أو $-\infty$. وفي جميع الحالات يدعى العدد او الرمز الذي ربطت به المتتالية: النهاية العليا للمتتالية ويرمز له بالرمز $\overline{نها} س_ن$.

المثال ٧.

(أ) $س = (٠ ، ١ ، ٠ ، ٢ ، ٠ ، ٣ ، \ldots)$ ليست محصورة من أعلى، لهذا فان $\overline{نها} س_ن = \infty$. (ب) $س = ((-١)^ن + ١ + \frac{١}{ن}) = (١ ، ٢\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، ٢\frac{١}{٤} ، \ldots)$ محصورة من اعلى وبالحساب نرى ان $(م_ر) = (٢\frac{١}{٢} ، ٢\frac{١}{٢} ، ٢\frac{١}{٤} ، ٢\frac{١}{٤} ، ٢\frac{١}{٦} ، \ldots)$. اذن $م_ر \leftarrow ٢$ ومنه $\overline{نها} س_ن = ٢$. (حـ) $س = (-ن) = (-١ ، -٢ ، -٣ ، \ldots)$ محصورة من اعلى و $(م_ر) = (-ر)$ ومنه $م_ر \leftarrow -\infty$ ، اذن $\overline{نها} س_ن = -\infty$.

اذا اعطينا متتالية $(س_ن)$، فانه يمكن ان نرى هل هي محصورة من اسفل ام لا. فاذا كانت غير محصورة من اسفل، فاننا نكتب $\underline{نها} س_ن = -\infty$ ، واذا كانت محصورة من اسفل فاننا نأخذ:

$$مـ_ر = ك.ح.د \{ س_ر ، س_{ر+١} ، \ldots \} = ك.ح.د_{ن \geqslant ر} س_ن .$$

نرى ان (مـ ر) متتالية وتيرية متزايدة، ومنه اما ان يكون نها مـ ر = ص.ح.ع مـ ر، اذا كانت (مـ ر) محصورة من اعلى، أو مـ ر ← ∞ ، اذا كانت (مـ ر) غير محصورة من اعلى. ففي الحالة الاولى نكتب:

$$\underline{\text{نها}}\ \text{س}_{\text{ن}} = \text{نها مـ}_{\text{ر}} = \text{ص.ح.ع}_{\text{ر} \geqslant 1} \{ \text{ك.ح د}_{\text{ن} \geqslant \text{ر}}\ \text{س}_{\text{ن}} \}$$

وفي الحالة الثانية نكتب نها س ن = ∞ . نسمي نها س ن بالنهاية السفلى لـ (س ن).

المثال ٨.

لنأخذ المتتاليات المذكورة في المثال ٧:

(أ) س محصورة من اسفل و(مـ ر) = (٠ ، ٠ ، ٠ ، . . .)، اذن نها س ن = ٠.

(ب) س محصورة من اسفل، و(مـ ر) = (٠ ، ٠ ، ٠ ، . . .). اذن نها س ن = ٠.

(حـ) س غير محصورة من اسفل، اذن نها س ن = −∞ . لاحظ انه في هذه الحالة $\overline{\text{نها}}$ س ن = −∞ .

في المتتالية (س ن) = (١ ، ٢ ، ٣ ، . . .)، نرى ان $\overline{\text{نها}}$ س ن = ∞ ونها س ن = ∞ .

والنظرية التالية تعطي خصائص النهايات العليا والسفلى المنتهية، اي عندما تكون هذه النهايات اعدادا حقيقية، وليس ∞ أو −∞ .

النظرية ٥.

(١) اذا كانت $\overline{\text{نها}}$ س ن = حـ ∈ R فان:

(أ) لكل و > ٠، يوجد ن. ∈ N ، بحيث ان س ن < حـ + و، لكل ن ⩾ ن. .

(ب) لكل و > ٠، س ن > حـ − و، لعدد لانهائي من ن.

وبالعكس، كل عدد حقيقي حـ يحقق (أ) ، (ب) يجب ان يكون $\overline{\text{نها}}$ س ن.

(٢) اذا كانت نها س ن = هـ ∈ R فان:

(حـ) لكل و > ٠، يوجد ن. ∈ N ، بحيث ان س ن > هـ − و، لكل ن ⩾ ن. ،

(د) لكل و $>$ ۰، س ن $<$ هـ + و، لعدد لا نهائي من ن.
وبالعكس اي عدد حقيقي هـ يحقق (حـ)، (د) يجب ان يكون نہا س ن.

البرهان.

سوف نبرهن (۱) وبرهان (۲) شبيه به. لنفرض ان نہا س ن = حـ، ولنفرض ان و $>$ ۰. فمن (٦) وتعريف ك.ح.د، فانه يوجد ن. ، بحيث ان م ن. $<$ حـ + و، اذن س ن $\leqslant$ م ن. $<$ حـ + و لكل ن $\leqslant$ ن. مما يعطي (أ).

الآن ك ح د م ر = حـ يعطي م ر $\geqslant$ حـ لكل ر $\leqslant$ ۱. خذ ر = ۱. اذن ص.ح.ع ن$\leqslant$۱ س ن $\geqslant$ حـ تتضمن انه يوجد ن۱ $\leqslant$ ۱ بحيث أن س ن۱ $>$ حـ - و. خذ ر = ۱ + ن۱. اذن يوجد ن۲ $\leqslant$ ۱ + ن۱ $>$ ن۱ بحيث ان س ن۲ $>$ م ۱+ن۱ - و $>$ حـ - و. نستمر بالاستقراء لنحصل على ۱ $\geqslant$ ن۱ $<$ ن۲ $<$ ن۳ $<$ . . . بحيث ان س نر $>$ حـ - و لكل ر $\in$ N مما يثبت (ب).

وبالعكس، لنفرض ان حـ تحقق (أ)، (ب). افرض في (ب) إن س نر $>$ حـ - و لكل ۱ $\geqslant$ ن۱ $<$ ن۲ $<$ . . . اذن ن ر $\leqslant$ ر لكل ر $\in$ N. الآن من (أ) نحصل على
ك.حـ.د ر$\leqslant$۱ م ر $\geqslant$ م ن. $\geqslant$ حـ + و
ومن (ب)،
م ر = ص.ح.ع ن$\leqslant$ر س ن $\leqslant$ س نر $>$ حـ - و.
من هذا ينتج ان ك.ح.د م ر $\leqslant$ حـ - و، لهذا فقد اثبتنا ان | ك ح د م ر - حـ | $\geqslant$ و، وبما ان و كانت عشوائية، فيجب ان نحصل على ك.ح.د م ر = نہا س ن = حـ مما يثبت (۱).

المثال ۹.

لنفرض ان س = (۱ ، ۰ ، ۱ ، ۰ ، . . .). اذا كان و $>$ ۰، فان س ن $<$ ۱ + و، لكل ن $\leqslant$ ۱، وس ن $>$ ۱ - و، لقيم ن = ۱ ، ۳ ، ٥ ، . . . ، اذن من النظرية ٥ (۱) نحصل على نہا س ن = ۱. وبنفس الاسلوب نہا س ن = ۰.

اذا كانت س ، ص متتاليتين حقيقيتين، فاننا نعرف ان نها (س ن + ص ن) = نها س ن + نها ص ن، اي ان الاقتران ق : ى $\to$ R المعرف بـ ق (س) = نها س ن يحافظ على الخاصية الجمعيـــة، اي ق (س + ص) = ق (س) + ق (ص). ماذا يحدث اذا استبـدلنـا نها بـ $\overline{\text{نها}}$؟ اذا كانت س ، ص $\in$ ى، فان نها س ن = $\overline{\text{نها}}$ س ن. وفي هذه الحـــالـــة يكـــون لـ $\overline{\text{نها}}$ الخـاصيـة الجمعيـة. ولكن اذا اخـذنـا س ، ص $\in$ ل$^{\infty}$ ، فانه يكون لـ $\overline{\text{نها}}$ خاصية تحت جمعية، اي ق (س + ص) $\leqslant$ ق (س) + ق (ص)، حيث ق (س) = $\overline{\text{نها}}$ س ن، ق : ل$^{\infty}$ $\to$ R . وسوف نثبت هذا الآن:

النظرية ٦.

اذا كانت س ، ص $\in$ ل$^{\infty}$ ، فان $\overline{\text{نها}}$ (س ن + ص ن) $\leqslant$ $\overline{\text{نها}}$ س ن + $\overline{\text{نها}}$ ص ن

البرهان.

لنفرض ان ر $\in$ N وَن $\geqslant$ ر. اذن س ن + ص ن $\leqslant$ ص.ح.ع س ن + ص.ح.ع ص ن، لهذا فان ص.ح.ع ن$\geqslant$ر (س ن + ص ن) $\leqslant$ ص.ح.ع ن$\geqslant$ر س ن + ص.ح.ع ص ن. ان جميع الحدود في هذه المتباينة محصورة من اسفل باعتبارها اقترانات في ر. لهذا اذا جعلنا ر $\to \infty$ في طرفي المتباينة، نحصل على النتيجة المطلوبة. والمثال س = (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، . . .) وص = (٠ ، ١ ، ٠ ، ١ ، . . .) يوضح ان المتباينة الفعلية قد تحدث.

تمارين ٤ ـ ٢

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ بين صنف المتتالية (ن^{٢} + (−١)^{ن} ن)، اوجد النهايتين العليا والسفلى.

٢ ـ اعـــط امثلة لمتتـاليـات (س ن)، بحيث ان { $\underline{\text{نها}}$ س ن ، $\overline{\text{نها}}$ س ن } هي (أ) { ∞ ، ∞ }

(ب) $\{ ١ ، \infty \}$ (حـ) $\{ ١ ، ٢ \}$ ، (د) $\{ ١ ، ١ \}$ ، (هـ) $\{ -\infty ، \infty \}$ ، (و) $\{ -\infty$ ، ١ ، (ز) $\{ -\infty ، -\infty \}$.

٣ ـ لأي متتالية (س ن)، اثبت ان $\underline{\text{نها}}$ س ن $\leqslant$ $\overline{\text{نها}}$ س ن، باستخدام التعريف (٥) حيث الضرورة. اثبت كذلك ان $\overline{\text{نها}}$ أ س ن = أ $\overline{\text{نها}}$ س ن لكل أ $>$ ٠ .

٤ ـ اذا كان س ن $\leqslant$ ص ن لكل ن $\leqslant$ ن. ، فاثبت ان $\overline{\text{نها}}$ س ن $\leqslant$ $\overline{\text{نها}}$ ص ن وكذلك $\underline{\text{نها}}$ س ن $\leqslant$ $\underline{\text{نها}}$ ص ن.

٥ ـ اذا كانت $\overline{\text{نها}}$ س ن = $\underline{\text{نها}}$ س ن = أ $\in$ R ، فاثبت ان (س ن) تقاربية ونها س ن = أ.
وبالعكس اذا كانت (س ن) تقاربية وكانت نها س ن = أ، فاثبت ان $\overline{\text{نها}}$ س ن = $\underline{\text{نها}}$ س ن = أ.

٦ ـ اذا كانت س ، ص $\in$ ل∞ ، فاثبت ان $\underline{\text{نها}}$ (س ن + ص ن) $\leqslant$ $\underline{\text{نها}}$ س ن + $\underline{\text{نها}}$ ص ن، اي ان $\underline{\text{نها}}$ لها خاصية فوق جمعية على ل∞ (R). اثبت كذلك ان ك‍ح‍د س ن $\leqslant$ $\underline{\text{نها}}$ س ن $\leqslant$ $\overline{\text{نها}}$ س ن $\leqslant$ ص‍ح‍ع س ن.

٧ ـ لنفرض ان ٠ $\leqslant$ س ن $\leqslant$ م$_1$ و ٠ $\leqslant$ ص ن $\leqslant$ م$_2$ لكل ن $\in$ N . اثبت ان $\overline{\text{نها}}$ (س ن ص ن) $\leqslant$ ($\overline{\text{نها}}$ س ن) ($\overline{\text{نها}}$ ص ن)، وأعط مثالا حيث تصبح العلاقة « $<$ » فقط في المتباينة.

٨ ـ اذا كان أ ن $>$ ٠ لكل ن $\in$ R . افرض ان $\overline{\text{نها}} \dfrac{\text{أ}_{\text{ن}+1}}{\text{أ}_{\text{ن}}}$ = حـ $<$ ١ .

استخدم النظرية ٥ لاثبات ان أ ن $\leftarrow$ ٠، سوف تحتاج لاستخدام ر$^{\text{ن}}$ $\leftarrow$ ٠ لكل ٠ $<$ ر $<$ ١.
هل تستطيع القول ان أ ن $\leftarrow$ ٠ عندما تكون حـ = ١؟

٩ ـ هل العبارة التالية صحيحة ام خطأ؟ اذا كان | س ن | $>$ ٠ لكل ن $\in$ N وكانت

نها $\dfrac{\text{س}_{\text{ن}+1}}{\text{س}_{\text{ن}}}$ $<$ ١ فان (س ن) تقاربية .

٣. المتتاليات الجزئية ونقط النهاية

اذا اعطينا متتالية من الاعداد المركبة $(ع_ن)$ فانه بالامكان تكوين متتاليات جديدة بحذف بعض حدود المتتالية وابقاء باقي الحدود بنفس الترتيب السابق. على سبيل المثال بامكاننا حذف $ع_١$ ، $ع_٢$ والحصول على $(ع_٣ ، ع_٤ ، ع_٥ ، \ldots)$، وكذلك بامكاننا حذف $ع_٢$ ، $ع_٤$ ، $ع_٦$ ، ... والحصول على $(ع_١ ، ع_٣ ، ع_٥ ، \ldots)$. ومن الطبيعي ان نفكر بالمتتاليات الجديدة كمتتاليات جزئية من $(ع_ن)$. والتعريف الدقيق هو:

المتتاليات الجزئية.

لتكن $(ع_ن)$ متتالية. فالمتتالية الجزئية من $(ع_ن)$ هي متتالية على شكل $(ع_{ن_ر}) = (ع_{ن_١} ، ع_{ن_٢} ، \ldots)$، حيث $(ن_ر) = (ن_١ ، ن_٢ ، \ldots)$ هي متتالية وتيرية متزايدة فعلا من الاعداد الطبيعية. اي $١ \leqslant ن_١ < ن_٢ < ن_٣ < \ldots$ و$ن_ر \to \infty$ عندما $ر \to \infty$.

من المفيد ان نلاحظ ان $ن_ر \geqslant ر$ لكل $ر \in N$. لأن $ن_١ \geqslant ١$، واذا كانت $ن_ر \geqslant ر$ فان $ن_{ر+١} > ن_ر$ تعطي $ن_{ر+١} \geqslant ١ + ن_ر \geqslant ١ + ر$. اذن ومن الاستقراء نحصل على $ن_ر \geqslant ر$ لكل $ر \in N$.

المثال ١٠.

(أ) $(ع_ن)$ هي متتالية جزئية من نفسها، لانه بالامكان اخذ $ن_ر = ر$.

(ب) اذا كانت $ن_ر = ر + ١$، نحصل على المتتالية الجزئية $(ع_٢ ، ع_٣ ، \ldots)$.

(حـ) اذا كانت $ن_ر = ر^٢$ نحصل على المتتالية الجزئية $(ع_١ ، ع_٤ ، ع_٩ ، \ldots)$.

من الواضح ان المتتالية الجزئية من متتالية جزئية، هي نفسها متتالية جزئية. اي انه اذا كانت هـ متتالية جزئية من ع وكانت ل متتالية جزئية من هـ فان ل تكون متتالية جزئية من ع.

النظرية ٧.

اذا كانت (ع ن) متتالية تقاربية، فان كل متتالية جزئية منها تكون تقاربية، ونهايتها هي نهاية (ع ن).

البرهان.

لنفرض ان ع ن ← أ (ن ← ∞). اذن لكل ∋ > ٠ يوجد ن٠ ∋ N بحيث ان |ع ن - أ| < ∋ لكل ن ≥ ن٠ . افرض ان (ع نر) متتالية جزئية من (ع ن). اذا كان ر ≥ ن. فان نر ≥ ر ≥ ن٠ ، لهذا فان |ع نر - أ| < ∋ لكل ر ≥ ن٠ مما يعطي ع نر ← أ (ر ← ∞)

المثال ١١.

لنفرض ان أ > ١ ، س ن = أ^(١/ن). بما ان أ^ن < أ^(ن+١) ، فاننا نحصل على س ن+١ < س ن .

كذلك س ن > ١ ، اذن (س ن) تقاربية. لنقل س ن ← حـ ≥ ١ . الآن س٢ن٢ = (أ^(١/٢ن))٢ = س ن ومن نظرية ٧ ، س٢ن ← حـ ، باستخدام قوانين النهايات س٢ن٢ ← حـ٢. لهذا فان س٢ن٢ = س ن تعطي حـ٢ = حـ. اذن حـ = ١ أو حـ = ٠ . لكن حـ = ٠ مرفوض لان حـ ≥ ١ . اذن أ^(١/ن) ← ١ .

والنظرية التالية تستخدم كثيرا في التحليل. وتسمى احيانا نظرية بولزانو وفاير شتراس. لكننا سنعطي هذا الاسم للنظرية التي تتبعها.

النظرية ٨

كل متتالية محصورة (حقيقية أو مركبة) لها متتالية جزئية تقاربية.

البرهان.

سوف نعالج اولا المتتاليات الحقيقية. لنفرض ان (س ن) ∋ ل∞ (R)، اذن نهايتها

العليا أ = $\overline{نها}$ $س_{ن}$ هي عدد حقيقي. فمن النظرية ٥ نجد انه لكل و > ٠، يوجد $ن_{٠}$ ، بحيث ان $س_{ن}$ < أ + و، لكل ن ≥ $ن_{٠}$. كذلك $س_{ن}$ < أ − و، لعدد لا نهائي من $ن_{٠}$.

نختار و = ١، وخذ $ن_{١}$ بحيث ان $س_{ن_{١}}$ > أ − ١. اختر و = $\frac{١}{٢}$ وخذ $ن_{٢}$ > $ن_{١}$، بحيث ان $س_{ن_{٢}}$ > أ − $\frac{١}{٢}$ واستمر لتجد $ن_{١}$ < $ن_{٢}$ < . . . بحيث ان $س_{ن_{ر}}$ > أ − $\frac{١}{ر}$. من الواضح الآن ان | $س_{ن_{ر}}$ − أ | < و، للاعداد الكبيرة كبرا كافيا، اي ان $س_{ن_{ر}}$ ← أ. اذن المتتالية الجزئية ($س_{ن_{ر}}$) هي تقاربية ونهايتها هي $\overline{نها}$ $س_{ن}$.

لنفرض الآن ان ($ع_{ن}$) = ($س_{ن}$ + $ص_{ن}$ت) هي متتالية اعداد مركبة محصورة. اذن ($س_{ن}$)، ($ص_{ن}$) متتاليتان حقيقيتان محصورتان، فمما اثبتناه، فانه يوجد، أ، ومتتالية جزئية ($س_{ن_{ر}}$)، بحيث ان $س_{ن_{ر}}$ ← أ.

لنأخذ المتتالية الجزئية ($ص_{ن_{ر}}$) من ($ص_{ن}$). فبما ان ($ص_{ن}$) محصورة فان ($ص_{ن_{ر}}$) تكون محصورة. اذن يوجد متتالية جزئية تقاربية من ($ص_{ن_{ر}}$)، نكتبها على شكل ($ص_{م_{ر}}$)، لتفادي رموز معقدة. وعلى سبيل المثال قد تكون ($ص_{م_{ر}}$) هي ($ص_{ن_{٣}}$، $ص_{ن_{١١}}$، $ص_{ن_{٢٠}}$، . . .). افرض ان $ص_{م_{ر}}$ ← ب. الآن ($س_{م_{ر}}$) هي متتالية جزئية من ($س_{ن_{ر}}$). اذن $س_{م_{ر}}$ ← ب من النظرية ٧. اذن $س_{م_{ر}}$ + ت $ص_{م_{ر}}$ ← أ + ت ب، وهذا يعني ان ($ع_{م_{ر}}$) هي متتالية جزئية من ($ع_{ن}$) وتقاربية. وهذا يثبت النظرية.

وهناك نتيجة بسيطة للنظرية ٨، وهي نتيجة هامة جدا في نظرية المجموعات وهي منسوبة الى بلزانو لكنها معروفة الآن باسم نظرية بلزانو وفايرشتراس. ويبدو ان بلزانو لم يكن ملما بشكل دقيق بفكرة الاعداد، فلم يتمكن من وضع برهان دقيق لها، وهذا يفسر اضافة اسم فايرشتراس، فيما بعد (وهو احد مؤسسي التحليل الدقيق).

النظرية ٩ [بلزانو وفايرشتراس].

يوجد لكل مجموعة محصورة غير منتهية في $\mathbb{C}$ (أو $\mathbb{R}$) نقطة تراكم واحدة على الاقل.

البرهان.

لنفرض ان سہ $\subset$ ك مجموعة محصورة وغير منتهية. اختر متتالية (ع ن) من نقاط مختلفة في سہ. فتكون (ع ن) متتالية محصورة. لهذا، ومن النظرية ٨، فانه يوجد متتالية جزئية تقاربية، لنقل ع نر $\leftarrow$ أ. وهذا العدد، اعني أ، هو نقطة تجمع لِـ سہ. ولاثبات ذلك لنفرض ان ح مجموعة مفتوحة، أ $\in$ ح. اذن يوجد قرص قر(أ ، نق) $\subset$ ح، وبما ان ع نر $\leftarrow$ أ فاننا نحصل على ع نر $\in$ قر(أ ، نق) لكل ر $\leqslant$ ر. وبما ان نقاط ع نر مختلفة فان هذا يثبت ان أ هي نقطة تراكم لِـ سہ، مما يثبت النتيجة.

والفكرة التالية ترتبط بالنتيجة السابقة.

نقطة النهاية للمتتالية. لنفرض ان (ع ن) متتالية. يدعى العدد أ $\in \mathbb{C}$ نقطة نهاية للمتتالية (ع ن)، اذا وفقط اذا كنا لكل $\epsilon > 0$، نحصل على |ع ن -أ| $< \epsilon$ لعدد لا نهائي من ن.

المثال ١٢.

(ت ن) = (ت ، -١ ، -ت ، ١ ، . . .) لها نقاط نهاية ت ، -١ ، -ت ، ١. فعلى سبيل المثال |ت ن + ت| = ٠ $< \epsilon$ لِـ ن = ٣ ، ٧ ، ١١ ، . . . . لاحظ انه لا يوجد نقط تجمع للمجموعة {ت ، -١ ، -ت ، ١}.

ويجب على القارىء ان يميز بين نهاية المتتالية التقاربية وبين نقط النهاية للمتتالية. وهناك علاقة واضحة بين الفكرتين.

النظرية ١٠ .

اذا كانت $ع_{ن} \to$ أ، فان أ تكون نقطة النهاية الوحيدة للمتتالية ($ع_{ن}$)

البرهان .

لكل $\epsilon > ٠$ يوجد $ن_{٠}$ بحيث ان $|ع_{ن} - أ| < \epsilon$ لكل $ن \geq ن_{٠}$. لهذا فان $|ع_{ن} - أ| < \epsilon$ ، لعدد لا نهائي من ن.

واذا كانت ب نقطة نهاية اخرى، للمتتالية ($ع_{ن}$)، فان $|ع_{ن} - ب| < \epsilon$ ، لعنصر ما، $ن \geq ن_{٠}$

لـِ ن هذه نحصل على $|أ - ب| < ٢\epsilon$ مما يعطي أ = ب . وهذا يثبت النظرية .

النظرية ١١ .

لأي متتالية حقيقية محصورة يوجد نقطة نهاية بين حاصريها .

البرهان .

بما ان ك·ح·د $ع_{ن}$ = مـ $\leq س_{ن} \leq$ م = ص·ح·ع $ع_{ن}$ ، لكل $ن \in N$ ، فانه يوجد أ = $\overline{نها}$ $س_{ن} \in R$. اذن أ = ك·ح·د $م_{ر} \leq$ م، كذلك مـ $\leq$ أ. فمن برهان النظرية ٨ ، نحصل على $|س_{ن_{ر}} - أ| <$ و لكل ر كبير بقدر كاف. لهذا فان $|س_{ن} - أ| <$ و، لعدد لا نهائي من ن .
اذن أ هي نقطة نهاية لِـ ($ع_{ن}$)، مما يثبت النظرية .

تمارين ٤ ـ ٣

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

١ ـ اعط مثالين لمتتاليتين غير محصورتين، س ، ص ، بحيث انه يوجد لِـ س متتالية جزئية تقاربية، ولا يوجد لِـ ص متتالية جزئية تقاربية.

٢ ـ اذا كانت لكل متتالية جزئية من $(ع_ن)$، متتالية جزئية صفرية، فاثبت ان $(ع_ن)$ متتالية صفرية.

٣ ـ اثبت ان لكل متتالية غير محصورة، $(ع_ن)$، يوجد متتالية جزئية $(ع_{ن_ر})$، بحيث ان $|ع_{ن_ر}| \leftarrow \infty$ ، (ر $\leftarrow \infty$). قارن مع النظرية ٨.

٤ ـ اذا كانت أ نقطة نهاية للمتتالية $(ع_ن)$، فاثبت انه يوجد متتالية جزئية $(ع_{ن_ر})$، بحيث ان $ع_{ن_ر} \leftarrow$ أ.

٥ ـ ضع بطريقة القطر عناصر Q^+ في متتالية اعدادها مختلفة (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، $\frac{١}{٣}$ ، ٣ ، . . .). ثم افعل نفس الشيء بالنسبة لـ Q بادخال الصفر والاعداد السالبة. س = (٠ ، ١ ، -١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، -٢ ، $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ، . . .). اثبت ان كل عدد حقيقي هو نقطة نهاية لـ س = $(س_ن)$.

٦ ـ جد كل نقط النهاية للمتتاليات (أ) $(\frac{١}{ن})$ ، (ب) $(٢ + (-١)^ن)$ (حـ) $(٢^ن)$

٧ ـ اثبت انه يوجد لكل متتالية محصورة من الاعداد المركبة، نقطة نهاية.

٤ . متتاليات خاصة

سوف نجمع هنا بعض المتتاليات التقاربية المفيدة. وليس من الممكن (الا في حالات

بسيطة جدا) ايجاد نهايات هذه المتتاليات باستخدام القوانين المعتادة (بند ١). وسلوك هذه المتتاليات غير واضح لانه في العادة توجد قوتان واحدة تجعل المتتالية كبيرة، والاخرى تجعلها صغيرة. فيجب العمل بحذر لمعرفة اي منها سوف تتغلب في النهاية.

والرموز α ، أ ، ع هنا، هي لأرقام ثابتة لا تعتمد على $ن \in N$ ، وتنتمي الى المجموعات التي ترد فيها. وهنا اعطينا جميع النهايات عندما $ن \to \infty$.

١ - $\frac{١}{ن^\alpha} \to ٠$ ، $\alpha \in Q^+$

٢ - $ن^\alpha ع^ن \to ٠$ ، $\alpha \in Q$ ، $ع \in \mathbb{C}$ و $|ع| < ١$.

٣ - $\frac{ع^ن}{ن!} \to ٠$ ، $ع \in \mathbb{C}$

٤ - $أ^{\frac{1}{ن}} \to ١$ ، $أ \in R^+$

٥ - $ن^{\frac{1}{ن}} \to ١$

٦ - $(١ + \frac{١}{ن})^ن \to e = ٢,٧١٨٢٨١٨...$

لاثبات ١، نفرض ان $\epsilon > ٠$ ونختار $ن_٠ > (\frac{أ}{\epsilon})^{\frac{1}{\alpha}}$. اذن $ن \geqslant ن_٠$ تعطي $ن > \frac{١}{\epsilon}$ لهذا فان $٠ < \frac{١}{ن^\alpha} < \epsilon$ لكل $ن \geqslant ن_٠$.

لاثبات ٢ ، لنفرض ان $س_ن = ن^\alpha |ع|^ن$، نريد ان نثبت ان $س_ن \to ٠$. اذا كانت $\alpha \leqslant ٠$ فان $٠ \leqslant س_ن \leqslant |ع|^ن$. اذا كانت $\alpha > ٠$ اختر $ر \in N$ بحيث ان $ر > \alpha$ ، اذن $٠ \leqslant س_ن \leqslant ن^ر |ع|^ن$، لهذا، وفي جميع الحالات، $٠ \leqslant س_ن \leqslant ن^ر |ع|^ن$. من قانون الشطيرة فانه يكفي ان نثبت ان $ن^ر |ع|^ن \to ٠$ وهذا بديهي اذا كانت $ع = ٠$ ، لهذا

افـرض ان $ \cdot < |ع| < 1 $. اذن $|ع| = \frac{1}{1 + ص}$ حيث ص $> \cdot$ باستخـدام نظـرية ذات الحدين لكل ن $>$ ر $+ 1$ ، $(1 + ص)^ن = 1 + \binom{ن}{1} ص + \ldots + \binom{ن}{ر+1} ص^{ر+1} + \ldots +$

$$ص^ن > \frac{ن!}{(ر+1)!\,(ن-ر-1)!} ص^{ر+1}$$

$$= \frac{ن(ن-1)\ldots(ن-ر)}{(ر+1)!} ص^{ر+1} \cdot$$

اذن $ن^ر |ع|^ن < \frac{ن^ر (ر+1)!}{ن(ن-1)\ldots(ن-ر) ص^{ر+1}} = \frac{حـ_ن}{ن}$ حيث

$$حـ_ن = \frac{(ر+1)!}{(1-\frac{1}{ن})\ldots(1-\frac{ر}{ن}) ص^{ر+1}} \leftarrow \frac{(ر+1)!}{ص^{ر+1}}$$

لهذا فان $\frac{حـ_ن}{ن} \leftarrow \cdot$ ومنه $ن^ر |ع|^ن \leftarrow \cdot$ مما يثبت ٢ .

لاثبات ٣، نختار ر $\in N$ بحيث ان ر $> |ع|$. ن $>$ ر تعطي $\frac{|ع|^ن}{ن!} < \frac{ر^ن}{ن!} \leqslant$

$\frac{ر^{ر+1}}{ن\,ر!} \leftarrow \cdot$ ،

اذا كان أ = ١ فان ٤ تصبـــح واضحـــة . واذا كان أ > 1 ، فان $أ^{\frac{1}{ن}} = 1 + د_ن$ حيث $د_ن > \cdot$ ومن متباينة برنولي $(1 + د_ن)^ن \geqslant 1 + ن\, د_ن$. لهذا فان $\cdot < د_ن \leqslant \frac{أ - 1}{ن} \leftarrow \cdot$. لهذا فان $د_ن = أ^{\frac{1}{ن}} - 1 \leftarrow \cdot$. واذا كانت $\cdot < أ < 1$ فان ب $= \frac{1}{أ} > 1$ ومنه $ب^{\frac{1}{ن}} \leftarrow 1$. ولكن $أ^{\frac{1}{ن}} =$

$\frac{1}{ب^{\frac{1}{ن}}} \leftarrow \frac{1}{1} = 1$ مما يثبت ٤ .

ولاثبات ٥ ، سنعالجها بطريقة مشابهة لِـ ٤ ، وسنكتب $ن^{\frac{1}{ن}} = 1 + د_ن$ ، ونستخدم نظرية ذات الحدين لنحصل على:

$$ن = (١ + د_ن)^ن > \frac{ن(ن - ١)}{٢} د_ن^٢$$ لكل ن > ١ .

من هذا ينتج ان $٠ < د_{ن+١} < \sqrt{\frac{٢}{ن}} \leftarrow ٠$ مما يثبت ٥ .

بالنسبة لِـ ٦ فسوف نثبت فقط ان المتتالية س = (س ن) حيث $س_ن = (١ + \frac{١}{ن})^ن$ هي متتالية متزايدة فعلا، ومحصورة من اعلى بـ ٣ . اذن $س_ن$ تقاربية، سوف نرمز لِـ نها $س_ن$ بالحرف e . وافضل طريقة لحساب قيمة e هي استخدام المتسلسلات (انظر الفصل ٩، البند ١). وسوف نبين فيها بعد ان e هي اساس اللوغاريتم الطبيعي .

باستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على

$$س_ن = ١ + \sum_{ر=١}^{ن} \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!\, ن^ر}$$

$$= ١ + \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ر!}(١ - \frac{١}{ن})(١ - \frac{٢}{ن}) \ldots (١ - \frac{ر-١}{ن})$$

$$< ١ + \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ر!}(١ - \frac{١}{ن+١}) \ldots (١ - \frac{ر-١}{ن+١})$$

$$< س_{ن+١}$$

كذلك،

$$س_ن < ١ + \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ر!} = ١ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢\times٣} + \frac{١}{٢\times٣\times٤} + \ldots + \frac{١}{٢\times٣\times \ldots \times ن}$$

$$< ١ + ١ + \frac{١}{١} + \frac{١}{٢^٢} + \frac{١}{٢^٣} + \ldots + \frac{١}{٢^{ن-١}}.$$

الآن $(١ - حـ)(١ + حـ + \ldots + حـ^{ن-١}) = ١ - حـ^ن < ١$ اذا كان حـ > ٠ . باخذ حـ = $\frac{١}{٢}$ نحصل على $س_ن < ٣$.

تمارين ٤ ـ ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

عين سلوك المتتاليات المعطى حدها النوني ادناه عندما ن ← ∞ .

(أ) $\sqrt[٣]{ن + حـ} - \sqrt[٣]{حـ}$، حيث حـ $\in R^{+}$

(ب) $\sqrt[ن]{ن!}$

(حـ) $\sqrt[ن]{\frac{٣ن^{٢}}{١ + ن^{٢}}}$

(د) $\frac{١}{ن^{ن/(١+ن^{٢})}}$

(هـ) $(١ - \frac{١}{ن})^{ن}$

(و) $ن^{-ن-١}(ن + ١)^{ن}$

(ز) $(١ + ن^{-٢})^{ن}$

(ح) $\frac{١}{ن} + \frac{ن + ١}{ن^{٢}} + \frac{(ن + ١)^{٢}}{ن^{٣}} + \ldots + \frac{(ن + ١)^{ن}}{ن^{ن+١}}$

(ط) $\frac{\sqrt[ن]{ن!}}{ن}$

(ى) $ن(\sqrt[ن]{٢} - ١)$.

٥ . العلاقات التكرارية

لقـد درسنـا العديد من المتتاليات المعرفة بعلاقات تكرارية. فقد اثبتنا في النظرية ١٠، في الفصل الثاني، ان المتتالية $(س_{ن})$ المعرفة بِـ

$$س_{ن+١} = \frac{٢ + س_{ن}}{١ + س_{ن}}،\quad س_{١} = ١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧)$$

تحقق $س^٢_ن \leftarrow ٢$ وبالتالي $س_ن \leftarrow \sqrt{٢}$، فالعلاقة التكرارية (٧) التي بها يمكن حساب $س_{ن+١}$ عند معرفة قيمة $س_ن$، تعطينا متتالية من الاعداد النسبية تقترب من $\sqrt{٢}$.

وفي الفصل الثاني، البند ٤، عرفنا متتالية فيبوناتشي $(س_ن) = (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، \ldots)$، التي يمكن الحصول عليها من العلاقة التكرارية:

$$س_{ن+٢} = س_{ن+١} + س_ن ،\quad س_١ = س_٢ = ١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨)$$

ففي (٨) نحتاج لمعرفة حدين متتاليين، لنتمكن من حساب الحد التالي لهما.

وفي المثال ٤، الفصل ٣، البند ١، اثبتنا ان

$$س_{ن+١} = ٣ - \frac{٢}{س_ن} ،\quad س_١ = ٤ \quad \ldots\ldots \quad (٩)$$

تحقق $س_ن \leftarrow ٢$.

يتكرر ظهور العلاقات التكرارية في نظرية الاحتمالات والتحليل العددي.

وبالنسبة للعلاقات التكرارية مثل (٧) ، (٨) ، (٩) هناك سؤالان:

هل المتتالية $(س_ن)$ تقاربية؟ . . . . (١٠)

هل يوجد صيغة صريحة لـ $س_ن$؟ . . . . (١١)

وفي الغالب يكون من الصعب الاجابة على (١٠) أو(١١)، مع انه يمكن الاجابة احيانا على (١٠)، ولا يمكن الاجابة على (١١)، كما في المثال المعطى بـ (٩).

وفي الامثلة التالية سوف نناقش طرق معالجة بعض العلاقات التكرارية.

المثال ١٣.

عرف $س_{ن+١} = أ\,س_ن + ب$ لكل $ن \in N$. حيث أ ، ب ، $س_١$ أعداد مركبة ثابتة.
تظهر هذه العلاقة بشكل محدد اكثر في نظرية الاحتمالات.

اذا عرفنا اقتران النقل ق بالصيغة ق (س) = ق $((س_ن)) = (س_{ن+١})$، فان ق يكون

اقترانا معرفا على فضاء جميع المتتاليات الى نفسه فالعلاقات التكرارية هنا يمكن كتابتها بالصيغة:

(ق - أ) س = ب . . . . (١٢)

على ان تعني (ق - أ)س = ق (س) - أ س = (س $_{ن+١}$ - أ س $_{ن}$)، وَب هو عبارة عن المتتالية الثابتة ب = (ب ، ب ، ب ، . . .)، بسبب طبيعة ق الخطية، فان العلاقة التكرارية (١٢) تسمى أحيانا علاقة تكرارية خطية أو معادلة فروق خطية.

سوف نحل س $_{ن+١}$ = أ س $_{ن}$ + ب مباشرة، ثم نبين ان (١٢) تعطي طريقة سريعة للحل.

فبأخذ ن = ١ ، ٢ ، . . . ، نجد ان س$_{٢}$ = أ س$_{١}$ + ب، س$_{٣}$ = أ (أ س$_{١}$ + ب) + ب = أ^{٢} س$_{١}$ + ب (١ + أ)، س$_{٤}$ = أ^{٣} س$_{١}$ + ب (١ + أ + أ^{٢})، وبشكل عام (بالاستقراء)،

س $_{ن}$ = أ$^{ن-١}$ س$_{١}$ + ب (١ + أ + أ^{٢} + . . . + أ$^{ن-٢}$).

فاذا كان أ = ١ ، فان س $_{ن}$ = س$_{١}$ + (ن - ١) ب لكل ن $\geqslant$ ١ . واذا كان أ $\neq$ ١ ، فانه بالامكان كتابة س $_{ن}$ بصورة افضل باستخدام الصيغة

$$١ + أ + أ^{٢} + \ldots + أ^{ن-٢} = \frac{١ - أ^{ن-١}}{١ - أ}$$. لهذا اذا كانت أ $\neq$ ١ فان

$$س_{ن} = (س_{١} - \frac{ب}{١ - أ}) أ^{ن-١} + \frac{ب}{١ - أ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٣)$$

من (١٣) نرى ان (س $_{ن}$) $\in$ تق اذا كان س$_{١}$ = $\frac{ب}{١ - أ}$ لاي أ $\neq$ ١ . ولكن اذا كان س$_{١}$ $\neq$ $\frac{ب}{١ - أ}$، فان (س $_{ن}$) $\in$ تق اذا وفقط اذا كان |أ| $<$ ١ . وعندما تكون المتتالية تقاربية تكون النهاية $\frac{ب}{١ - أ}$

وفي حالة أ = ١ ، س $_{ن}$ = س$_{١}$ + (ن - ١) ب ، تكون المتتالية تقاربية اذا وفقط اذا كان ب = ٠

فاذا قارنا (١٢) و(١٣) في حالة أ ≠ ١، نرى ان (ق - أ) (س) = ب تقترح حلا $س_ن = ح_١ أ^{ن-١} + ح_٢$، حيث $ح_١$، $ح_٢$ ثوابت. بوضع $س_ن = ح_١ أ^{ن-١} + ح_٢$ في $س_{ن+١} = أ س_ن +$ ب نرى ان $ح_٢ = أ ح_٢ +$ ب ومنه $ح_٢ = \frac{ب}{١ - أ}$. كذلك $س_١ = ح_١ + ح_٢$ ومنه $ح_١ = س_١ - \frac{ب}{١ - أ}$.

اما حالة أ = ١ فتختلف ولكن الحل سهل كما بينا.

المثال ١٤.

عرف $س_{ن+٢} = ٥ س_{ن+١} - ٦ س_ن$، حيث $س_١$، $س_٢$ اعداد مركبة وثابتة. لحل هذه نأخذ متتالية جديدة $ص_ن = س_{ن+١} - ٣ س_ن$. اذن $ص_{ن+١} - ٢ ص_ن = س_{ن+٢} - ٥ س_{ن+١} + ٦ س_ن = ٠$ لهذا فان $ص_ن = ٢^{ن-١} ص_١$، ومنه

$$س_{ن+١} = ٣ س_ن + ٢^{ن-١} ص_١ \quad \text{.........} \quad (١٤)$$

باخذ ن = ١، ٢، ... في (١٤) نجد ان

$$س_ن = ٣^{ن-١} س_١ + ٣^{ن-٢} ص_١ \left(١ + \frac{٢}{٣} + \left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ + \ldots + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن-٢}\right)$$

$$= ٣^{ن-١} س_١ + ٣^{ن-١} ص_١ - ٢^{ن-١} ص_١$$

$$= أ ٢^ن + ب ٣^ن \quad \text{.........} \quad (١٥)$$

حيث $أ = \frac{٣ س_١ - س_٢}{٢}$، $ب = \frac{س_٢ - ٢ س_١}{٣}$.

اذن (١٥) هي حل لـ $س_{ن+٢} = ٥ س_{ن+١} - ٦ س_ن$.

فاذا استخدمنا الاقتران ق كما في المثال ١٣ واخذنا ق (س) = $(س_{ن+١})$، $ق^٢ (س) = ق (ق (س)) = (س_{ن+٢})$ تصبح المعادلة

$ق^2$ (س) − ٥ق (س) + ٦س = ٠، أو (ق − ٢)(ق − ٣) س = ٠ ، اذا حللنا $ق^2$ − ٥ق + ٦، الى (ق − ٢) (ق − ٣)،الآن من الواضح ان الحدين $٢^ن$ ، $٣^ن$ في الحل (١٥) جاءا من جذري المعادلة (ق − ٢) (ق − ٣) = ٠، وهما ٢ ، ٣.

والمثال التالي يوضح هذه الطريقة.

المثال ١٥.

عرف $س_{ن+٣}$ = ٢$س_{ن+٢}$ + $س_{ن+١}$ − ٢ $س_ن$، حيث $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ اعداد مركبة ثابتة. ان ق (س) = ($س_{ن+١}$) تعطي ان المعادلة هي على صورة ($ق^3$ − ٢$ق^2$ − ق + ٢) س = (ق − ١) (ق + ١) (ق − ٢) س = ٠

والجذور هي ١ ، −١ ، ٢. لهذا فان الحل يكون على صورة

$س_ن$ = أ + ب $(-١)^ن$ + حـ $٢^ن$ . . . . (١٦)

حيث يمكن تعيين قيم أ ، ب ، حـ من حل المعادلة (١٦) لِـ ن = ١ ، ٢ ، ٣ ونحصل على أ ، ب ، حـ بدلالة $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$.

وبشكل عام، فانه يمكن ان تكون الحدود اعدادا مركبة، فعلى سبيل المثال $ق^2$ + ١ = (ق + ت) (ق − ت).

كذلك يمكن ان تتكرر. على سبيل المثال $ق^2$ − ٤ق + ٤ = (ق − ٢) (ق − ٢) التي تظهر في $س_{ن+٢}$ = ٤$س_{ن+١}$ − ٤ $س_ن$ حيث $س_١$ ، $س_٢$ معطاة. فبتعديل بسيط على طريقة المثال ١٤، يبين ان حل المعادلة الاخيرة هو $س_ن$ = (أ ن + ب) $٢^ن$ حيث تعين قيم أ ، ب بدلالة $س_١$ ، $س_٢$.

والمثال التالي يبين طريقة هامة في الطرق العددية.

المثال ١٦.

لنأخذ المعادلة ق (س) = $س^3$ − ٥س + ٣ = ٠ حيث س ∈ R . فبما ان ق (٠)

$<$ ٠، ق (١) $\geqslant$ ٠، فانه يوجد جذر بين ٥ و١ . وبرهان هذه الحقيقة يعتمد على نظرية القيم الوسطى للاقترانات المتصلة (الفصل ٦، البند ٣).

هذا الجذر وحيد لانه اذا كان ٠ $<$ ب $<$ أ $<$ ١، فان

-ق (ب) = (أ - ب) (أ^{٢} + أب + ب^{٢} - ٥) $<$ ٠

لهذا فان ق (ب) $>$ ٠ كذلك ق (ب) $<$ ٠ اذا كان أ $<$ ب $<$ ١.

لنكتب المعادلة على صورة س = $\frac{س^{٣} + ٣}{٥}$، ونأخذ العلاقة التكرارية س$_{ن+١}$ = $\frac{س_{ن}^{٣} + ٣}{٥}$، ونبدأ بالتقريب الاول س$_{١}$ = ٠,٥ . اذا عرفنا ان (س$_{ن}$) تقاربية، س$_{ن}$ ← حـ مثلا، فان حـ = $\frac{حـ^{٣} + ٣}{٥}$ لهذا فان ق (حـ) = ٠. وبما ان ٠ $<$ س$_{ن}$ $<$ ١ لكل ن ∋ N وق (٠) $>$ ٠، ق (١) $<$ ٠، نحصل على ٠ $<$ حـ $<$ ١ ومنه حـ = أ لان أ وحيدة.

نثبت الآن ان (س$_{ن}$) تقاربية لكي نحصل على متتالية تقاربية من تقريبات للجذر. فباستخدام ٠ $<$ س$_{ن}$ $<$ ١، نحصل على | س$_{ن+١}$ - س$_{ن}$ | $\leqslant$ $\frac{٣}{٥}$ | س$_{ن}$ - س$_{ن-١}$ |

ومنه | س$_{ن+١}$ - س$_{ن}$ | $\leqslant$ ($\frac{٣}{٥}$)$^{ن-١}$ | س$_{٢}$ - س$_{١}$ | ، وهذا يعني ان (س$_{ن}$) هي متتالية كوشية. اذن هي تقاربية.

لقد وجدنا التقريبات التالية باستخدام آلة حاسبة صغيرة مع ان الحساب باليد سهل. وجدنا ان س$_{٢}$ = ٠,٦٢٥ ، س$_{٣}$ = ٠,٦٤٥ ، . . . س$_{٧}$ = ٠,٦٥٦٦ . فالتقارب ليس سريعا ولكن العمليات الحسابية سهلة و٠,٦٥٦٦ صحيح لاربع منازل عشرية.

تمارين ٤ ـ ٥

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ حل علاقة فيبوناتشي س$_{ن+٢}$ = س$_{ن+١}$ + س$_{ن}$، س$_{١}$ = س$_{٢}$ = ١ ومنه جد قيمة نها $\frac{س_{ن}}{س_{ن+١}}$.

٢ ـ قسمت القطعة المستقيمة أ حـ بالنقطة ب بحيث ان $\frac{أب}{ب حـ} = \frac{ب حـ}{أ حـ}$. جد القيمة الحسابية لِـ $\frac{أب}{ب حـ}$ وقارن مع نها $\frac{س_ن}{س_{ن+١}}$ في السؤال ١.

٣ ـ حل العلاقات التكرارية التالية (أ) $س_{ن+١} = ٣س_ن + ٢ن - ١$ ، $س_١ = ٢$ ، (ب) $س_{ن+٢} = -س_ن$ ، $س_١ = -٢$ ، $س_٢ = ٠$ ، (حـ) $س_{ن+٢} = ٢ ت س_{ن+١} + س_ن$ ، $س_١ = ٠$ ، $س_٢ = -١$.

٤ ـ العلاقة التكرارية $س_{ن+٢} = \frac{س_{ن+١} + س_ن}{٢}$ ، حيث $س_١$ ، $س_٢$ اعداد معطاة، تتكرر كثيرا في مسائل رمي قطعة النقد، في نظرية الاحتمالات. حل العلاقة وجد نها $س_ن$.

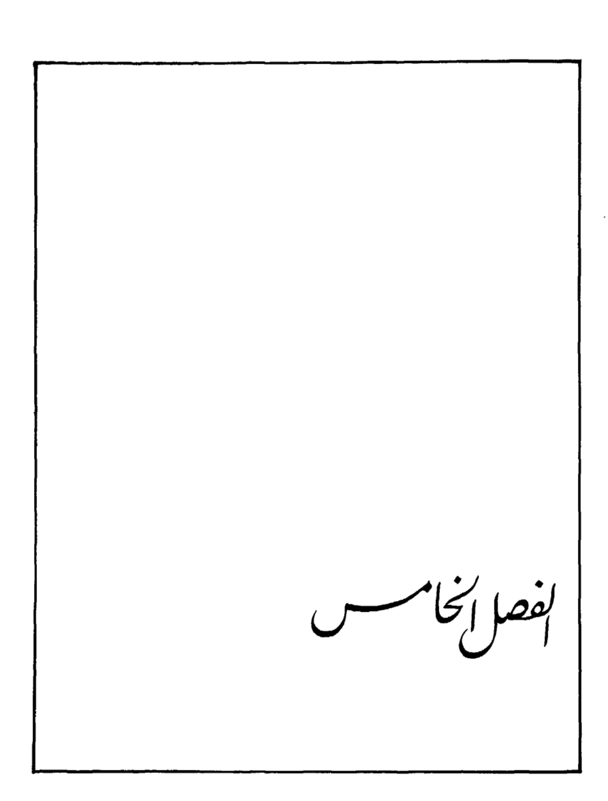
٥ ـ عرف $س_{ن+١} = \frac{أ}{١ + س_ن}$ ، $أ > ٠$ ، $س_١ > ٠$ اثبت ان $(س_ن)$ ∋ تق وجد النهاية.

٦ ـ عرف $س_{ن+١} = \frac{١}{٢}[س_ن + \frac{أ}{س_ن}]$ حيث $أ > ٠$ ، $س_١ > \sqrt{أ}$. اثبت ان $(س_ن)$ وتيرية متناقصة محصورة من أسفل. استنتج ان $س_ن \leftarrow \sqrt{أ}$. استخدم العلاقة التكرارية لحساب $\sqrt{٣}$ مقربا الى عددين عشريين.

٧ ـ عرف $س_{ن+١} = \sqrt{٣س_ن + ٤}$ ، حيث $س_١ = ١$. اثبت ان $(س_ن)$ ∋ تق وجد النهاية.

٨ ـ عرف $س_{ن+١} = \frac{١}{٢}(س_ن + ص_ن)$ و $ص_{ن+١} = \frac{٢س_ن ص_ن}{س_ن + ص_ن}$ حيث $|س_ن + ص_ن| > ٠$ لكل ن ∋ N . اثبت ان $(س_ن ص_ن)$ ∋ تق اذا كان $س_١ > ص_١ \geqslant ٠$ فاثبت ان نها $س_ن$ = نها $ص_ن = \sqrt{س_١ ص_١}$.

٩ ـ عرف $س_{ن+١} = \frac{١}{٢}(س_ن + ص_ن)$ و $ص_{ن+١} = \sqrt{س_ن ص_ن}$ ، $س_١ \geqslant ٠$ ، $ص_١ \geqslant ٠$. اثبت ان $(س_ن)$ ، $(ص_ن)$ تتقاربان الى نفس النهاية.


الفصل الخامس

المتسلسلات

١ . التقارب والتقارب المطلق

اذا اعطينا متتالية اعداد مركبة $أ = (أ_ر) = (أ_١ ، أ_٢ ، \ldots)$ فانه بالامكان تكوين متتالية جديدة، $س = (س_ن)$، من المجاميع : باضافة الحدود $(أ_ر)$ على التتابع، اي ان $س_١ = أ_١$، $س_٢ = أ_١ + أ_٢$، $س_٣ = أ_١ + أ_٢ + أ_٣$، $\ldots$ ، $س_ن = أ_١ + \ldots + أ_ن$. وهذا يمهد لفكرة المتسلسلة $أ_١ + أ_٢ + \ldots + أ_ن + \ldots$ وهي أحياناً تدعى متسلسلة لانهائية.

المتسلسلة : المتسلسلة هي زوج مرتب من المتتاليات $(أ ، س)$. حيث $أ = (أ_ر)$ معطى ، $س = (س_ن)$ تعتمد على $أ$، ومعرّفة بـ $س_ن = أ_١ + \ldots + أ_ن$. ونسمي $س_ن$ المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $(أ ، س)$. وكذلك نكتب $\sum أ_ر$ أو $\sum_{ر=١}^{\infty} أ_ر$، بدلا من $(أ ، س)$ ونتحدث عن المتسلسلة $\sum أ_ر = أ_١ + أ_٢ + \ldots$.

المثال ١ .

$\sum \frac{١}{ر} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \ldots$ هي المتسلسلة (($\frac{١}{ر}$)، (١ + $\frac{١}{٢}$ + ... + $\frac{١}{ر}$)). يجب ملاحظة ان ر في $\sum أ_ر$ هو متغير يمكن استبداله بأي حرف آخر. لهذا فان كلا من $\sum أ_ن$، $\sum أ_م$ هو نفس المتسلسلة $\sum أ_ر$.

واحيانا يكون من المفيد ان نبدأ المتسلسلة بعدد صحيح غير الواحد فمثلا،

$$\sum_{ر=٠}^{\infty} \frac{١}{ر+١} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \ldots \text{؛} \quad \sum_{ر=٣}^{\infty} \frac{١}{ر^٢ - ٤} = \frac{١}{٥} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٢١} + \ldots$$

على اي حال سنعتبر ان $\sum أ_ر$ تعني $\sum_{ر=١}^{\infty} أ_ر$ الا اذا ذكر غير ذلك. ونؤكد هنا ان $\sum أ_ر$ ما هو الا مجرد رمز ليعني الزوج المرتب (أ ، س). ولا يعني ذلك وضع ر = ∞ داخل اشارة المجموع $\sum$.

وبالنسبة لجمع عدد منته من الحدود فسوف نعرف

$$\sum_{ر=م}^{ن} أ_ر = أ_م + أ_{م+١} + \ldots + أ_ن \quad \text{(اذا كان ن > م)}$$
$$= أ_م \quad \text{(اذا كان ن = م)}$$
$$= ٠ \quad \text{(اذا كان ن < م)}$$

ومن الطبيعي ان نقول ان المتسلسلة تكون تقاربية اذا كانت متتالية المجاميع الجزئية تقاربية.

المتسلسلة التقاربية. نقول ان المتسلسلة $\sum أ_ر$ = (أ ، س) هي متسلسلة تقاربية اذا وفقط اذا كانت س ∈ تق . لهذا فان $\sum أ_ر$ تقاربية تكافيء $س_ن = أ_١ + أ_٢ + \ldots + أ_ن \to$ نهاية ما عندما ن ← ∞ . فاذا كانت $\sum أ_ر$ تقاربية وكانت $س_ن \to أ$ فسوف نكتب $\sum أ_ر = أ$.

ونسمي أ مجموع المتسلسلة التقاربية $\sum أ_ر$. ونعرف γ (جاما) كما يلي:

$$\gamma = \{ أ = (أ_ر) \mid س \in تق \} = \{ أ = (أ_ر) \mid \sum أ_ر \text{ تقاربية} \}$$

ونسمي γ مجموعة جميع المتسلسلات التقاربية. والمتسلسلة غير التقاربية تسمى تباعدية.

لقد كنا متساهلين في نقطتين. فقد استخدمنا $\sum$ أ$_ر$ ليعني المتسلسلة ويعني مجموعها (عندما تكون تقاربية). ولن يحدث التباس في ذلك. ثم ان ٧ هي مجموعة متتاليات، وليست مجموعة متسلسلات (أ، س). ولن يحدث هنا التباس ايضا ولكن المهم التمييز بين ٧ وتق. وسوف نبين ان ٧ مجموعة جزئية فعلية من تق.

والامثلة التالية تبين اهمية المجاميع الجزئية س$_ن$ للمتسلسلة $\sum$ أ$_ر$.

المثال ٢ [المتسلسلة الهندسية].

$\sum$ ع$^{ر-١}$ = ١ + ع + ع^٢ + ... = $\frac{١}{١ - ع}$ لكل |ع| > ١، اي ان المتسلسلة تكون تقاربية عند |ع| > ١ ويكون $\frac{١}{١ - ع}$ هو مجموعها. فاذا كانت |ع| ≥ ١ فان المتسلسلة تكون تباعدية. ولا معنى للحديث عن مجموعها.

ولاثبات ذلك نستخدم (١ − ع) (١ + ع + ع^٢ + ... + ع$^{ن-١}$) = ١ − ع^ن. اذن عندما ع ≠ ١، نحصل على

$$\text{س}_{ن} = \sum_{ر=١}^{ن} \text{ع}^{ر-١} = \frac{١ - \text{ع}^{ن}}{١ - \text{ع}}.$$

اذا كانت |ع| > ١ فان ع^ن ← ٠ (خذ α = ٠ في المتتالية الخاصة ٢، الفصل الرابع). اذن

س$_ن$ ← $\frac{١}{١ - ع}$ لهذا فان $\sum$ ع$^{ر-١}$ = $\frac{١}{١ - ع}$.

واذا كان ع = ١ فان س$_ن$ ← ∞، لهذا فان $\sum$ ع$^{ر-١}$ تباعدية. ولجميع قيم ع الاخرى يبدو واضحا ان (ع^ن) تباعدية.

المثال ٣ [المتسلسلة التوافقية].

$\sum \frac{١}{ر}$ = ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ + ... تباعدية. قد لا تكون هذه النتيجة واضحة لانه قد

يظن القـاريء انـه بما ان الحـدود تصبـح صغيرة جدا فان ذلك يؤدي الى التقارب. ولكن في معركة التقارب فان صغر الاعداد يقابله كثرة عددها، وفي هذه الحالة تنتصر الكثرة.

وسوف نثبت هذه النتيجة بان نبين ان $س_ن \leftarrow \infty$. لنفرض ان $أ \in R^+$ نختار $م > ٢أ$، ونأخذ $ن > ٢^م = ن_٠$ ، اذن $س_ن \geqslant س_{ن_٠}$ و

$$س_{ن_٠} = (١ + \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}) + (\frac{١}{٥} + \ldots + \frac{١}{٨}) + \ldots + (\frac{١}{١ + ٢^{م-١}} + \ldots + \frac{١}{٢^م})$$

$$> \frac{١}{٢} + \frac{٢}{٤} + \frac{٤}{٨} + \ldots + \frac{٢^{م-١}}{٢^م} = \frac{م}{٢} > أ.$$

اذن $س_ن > أ$ لكل $ن \geqslant ن_٠$ ، لهذا ومن التعريفات في الفصل الثاني، البندين (٣ ، ٤) نحصل على $س_ن \leftarrow \infty$.

المثال ٤ [المتسلسلة التلسكوبية].

المتسلسلة $\sum (ب_ر - ب_{ر+١}) = (ب_١ - ب_٢) + (ب_٢ - ب_٣) + \ldots$ تكون تقاربية اذا وفقط اذا كانت $(ب_ر) \in$ تق . وينتج هذا مباشرة من الحقيقة القائلة ان

$$\sum_{ر=١}^{ن} (ب_ر - ب_{ر+١}) = ب_١ - ب_{ن+١} .$$

لهذا، وبحذف الحدود، فان المجاميع الجزئية تشبه التلسكوب في طريقة اغلاقه.

المثال ٥.

$\sum \frac{١}{ر(ر+١)} = \frac{١}{١ \times ٢} + \frac{١}{٢ \times ٣} + \ldots = ١$، لان $ب_ر = \frac{١}{ر}$ تعطي $ب_ر - ب_{ر+١} = \frac{١}{ر(ر+١)}$، لهذا فان المتسلسلة تلسكوبية و$\sum (ب_ر - ب_{ر+١}) = ب_١ - نها\, ب_{ر+١} = ١ - ٠ = ١$.

المثال ٦.

$\sum \frac{١}{ر^٢} = ١ + \frac{١}{٢^٢} + \frac{١}{٣^٢} + \ldots$ تقاربية، مجموعها $\frac{\pi^٢}{٦}$، ولكن ليس من السهل اثبات ذلك. لا تبدو هذه المتسلسلة مختلفة كثيرا عن المتسلسلة التوافقية التباعدية (المثال ٣).

ولكن زيادة الصغر الناتجة عن تربيع $\frac{١}{ر}$ كانت كافية لانتاج التقارب. ولاثبات التقارب نرى ان

$$س_ن = \sum_{ر=١}^{\infty} \frac{١}{ر^٢} = ١ + \sum_{ر=٢}^{ن} \frac{١}{ر^٢}$$
$$\leqslant ١ + \sum_{ر=٢}^{ن} \frac{١}{ر(ر-١)} < ٢$$

وذلك من نتيجة المثال ٥. الآن $س_{ن+١} - س_ن = \frac{١}{(ن+١)^٢} > ٠$. اذن $(س_ن)$ هي متتالية وتيرية متزايدة ومحصورة من اعلى بـ ٢، اذن $(س_ن) \in$ تق حسب النظرية ٣، في الفصل ٣، البند ١*.

المثال ٧.

$\sum (-١)^{ر-١} = ١ - ١ + ١ - ١ + \ldots$ تباعدية لان $(س_ن) = (١، ٠، ١، ٠، \ldots)$ تباعدية.

المثال ٨.

هذا المثال يوضح استخدام الاقواس في المتسلسلات. لنفرض ان $\sum أ_ر = أ_١ + أ_٢ +$

---

* ينتج عن هذه النظرية مبدأ اكثر شمولا هو انه اذا كان $(ب_ر)$ متتالية حقيقية فيها $ب_ر \geqslant ٠$ لكل $ر \in N$، وكانت ايضا $(س_ن)$ محصورة من اعلى، تكون $\sum ب_ر$ تقاربية.

وس = (س$_1$ ، س$_2$ ، . . .). فالمتسلسلة (أ$_1$ + أ$_2$) + (أ$_3$ + أ$_4$) + . . . تعني المتسلسلة التي متتالية مجاميعها الجزئية هي (س$_2$ ، س$_4$ ، س$_6$ ، . . .). لاحظ ان المتتالية الاخيرة هي متتالية جزئية من س. كذلك المتسلسلة (أ$_1$ + أ$_2$ + أ$_3$) + أ$_4$ + (أ$_5$ + أ$_6$ + أ$_7$) + أ$_8$ + . . . متتالية مجاميعها الجزئية هي (س$_3$ ، س$_4$ ، س$_7$ ، س$_8$ ، . . .).

لهذا فان (١ -١) + (١ - ١) + (١ - ١) + . . . هي تقاربية مجموعها صفر. قارنها بالمثال ٧. لكن (١ - ١ + ١) - ١ + (١ - ١ + ١) - ١ + . . . هي تباعدية.

يتضح ان ادخال اقواس في متسلسلة تقاربية يولد متسلسلة تقاربية جديدة لها نفس المجموع، لان متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة التي بها الاقواس هي متتالية جزئية من س. ولكن حذف الاقواس في متسلسلة تقاربية يمكن ان يولد متسلسلة تباعدية، كما رأينا في (١ - ١) + (١ - ١) + ...

المثال ٩.

$١ - ١ + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٣} + . . .$ متسلسلة تقاربية مجموعها صفر. لان س $= (١ ، ٠ ، \frac{١}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٣} ، ٠ ، . . .) \in$ تق. .

فأول نظرية نناقشها حول المتسلسلات تعكس خاصية التمام في $\mathbb{R}$ وتعطي شرطا كافيا وضروريا لأن تكون المتسلسلة تقاربية.

النظرية ١ [القاعدة العامة لتقارب المتسلسلة].

تكون $\sum$ أ$_ر$ تقاربية اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon > ٠$، يوجد ن$_٠$ = ن$_٠$ (ϵ) $\in N$ بحيث ان

$\left| \sum_{ر=ن}^{ن+م} أ_ر \right| < \epsilon$ لكل ن $\geq$ ن$_٠$ ولكل م $\geq$ ٠.

البرهان.

لنفرض ان $س_ن = أ_1 + أ_2 + \dots + أ_ن$. اذن $\sum أ_ر$ تقاربية اذا وفقط اذا كان $س \in$ تق. ولكن تق = ك. (من النظرية ١ في الفصل الثاني). لهذا نحصل على النتيجة المطلوبة لان $أ_ن + أ_{ن+1} + \dots + أ_{ن+م} = س_{ن+م} - س_{ن-1}$.

نتيجة.

اذا كانت $\sum أ_ر$ تقاربية فانه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $ن_0$ بحيث ان $\left| \sum_{ر=ن}^{\infty} أ_ر \right| < \epsilon$ لكل $ن \geqslant ن_0$.

البرهان.

المتسلسلة $\sum_{ر=ن}^{\infty} أ_ر$ هي متسلسلة تقاربية لكل $ن \in N$. لان مجاميعها الجزئية $س_ن - س_{ن-1}$، $س_{ن+1} - س_{ن-1}$، .... ومن النظرية ١ يوجد $ن_0 \left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ بحيث ان

$$\left| \sum_{ر=ن}^{ن+م} أ_ر \right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ لكل } ن \geqslant ن_0 \text{ ولكل } م \geqslant 0 \quad \dots\dots \quad (1)$$

وبما ان $\sum_{ر=ن}^{\infty} أ_ر = نها \sum_{ر=ن}^{ن+م} أ_ر$، يمكننا اخذ النهايات في (١) عندما $م \to \infty$ ونحصل على $\left| أ_ن + أ_{ن+1} + \dots \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ مما يثبت النتيجة.

وهناك طريقة اخرى لصياغة النتيجة هي القول ان $\sum أ_ر$ تقاربية تتضمن $\sum_{ر=ن}^{\infty} أ_ر \to 0$ $(ن \to \infty)$.

وهناك تعريفان هامان.

المتسلسلة ذات التقارب المطلق: نقول ان المتسلسلة $\sum أ_ر$ ذات تقارب مطلق اذا وفقط اذا كانت $\sum |أ_ر|$ تقاربية. ونعرف

$ل^1 = \{ أ = (أ_ر) \mid \sum |أ_ر| \text{ تقاربية} \}$.

نسمي ل[1] مجموعة جميع المتسلسلات ذوات التقارب المطلق .

المتسلسلة ذات التقارب المشروط : نقول ان المتسلسلة $\sum$ أ ر ذات تقارب مشروط ، اذا وفقط اذا كانت تقاربية ، ولكن ليست ذات تقارب مطلق .

نشدد هنا على ان كلمة مطلق تستعمل في وصف التقارب بمعنى اصطلاحي يعني اخذ $\sum$ | أ ر | ، وهي متسلسلة القيم المطلقة | أ ر | . وهي لا تعني ان التقارب المطلق هو أفضل تقارب .

واحيانا نستخدم الرمز $\sum$ | أ ر | $< \infty$ لتعني ان $\sum$ | أ ر | تقاربية . ولكن يجب ان لا نستخدم الرمز $\sum$ أ ر $< \infty$ لتعني ان $\sum$ أ ر تقاربية لانه قد يسبب التباسا .

فتعريف التقارب المطلق لـ $\sum$ أ ر لا يتعلق بتقارب $\sum$ أ ر ذاتها ، وانما بتقارب $\sum$ | أ ر | . ولكن هنــاك نتيجــة هامــة للتعــريف ، وهي ان كل متسلسلة ذات تقـارب مطلق ، تكــون تقاربية ، اي ان $\sum$ | أ ر | $< \infty$ تتضمن ان $\sum$ أ ر تقاربية . وسنبرهن هذا في النظرية التالية ونبين لها ايضا علاقات بين فضاءات متتاليات اخرى .

النظرية ٢ .

ل[1] $\subset$ ٧ $\subset$ تق . $\subset$ تق $\subset$ ل$^\infty$ وجميع الاحتواءات فعلية . فالاحتواء ل[1] $\subset$ ٧ ينص على ان كل متسلسلة ذات تقارب مطلق هي تقاربية . والاحتواء ٧ $\subset$ تق . ينص على انه اذا كانت $\sum$ أ ر تقاربية فان أ ر $\leftarrow$ الصفر.

البرهان .

اذا كانت أ $\in$ ل[1] فان $\sum$ | أ ر | تقاربية . لنفرض ان $\epsilon >$ ٠ ، فحسب النظرية ١ فانه يوجد ن. بحيث انه لكل ن $\geqslant$ ن. ، لكل مـ $\geqslant$ ٠ نحصل على

| $\sum_{ر=ن}^{ن+مـ}$ | أ ر | | $< \epsilon$. اذن من المتتالية المثلثية لكل ن $\geqslant$ ن. ، مـ $\geqslant$ ٠

$$\left|\sum_{ر=ن}^{ن+م} أ_ر\right| \leqslant \sum_{ر=ن}^{ن+م} |أ_ر| = \left|\sum_{ر=ن}^{ن+م} |أ_ر|\right| < \epsilon$$

لهذا، وباستخدام النظرية ١ ثانية، نرى أن

$\sum أ_ر$ تقاربية اي $أ \in \gamma$ مما يثبت ان $ل^1 \subset \gamma$.

لنفرض الآن ان $أ \in \gamma$. باخذ م = ٠ في النظرية ١ نحصل على $|أ_ن| < \epsilon$ لكل ن $\geqslant$ ن. ، اذن $أ_ن \to ٠$، اي ان $أ \in$ تق. اي ان $\gamma \subset$ تق. . واليك طريقة اخرى لبرهنة ذلك. نلاحظ ان $أ_ن = س_ن - س_{ن-١}$ لكل ن > ١ ومنه $س_ن \to ح$ تتضمن $أ_ن \to ح - ح = ٠$.

لقد تم برهنة الاحتواءين تق. $\subset$ تق $\subset$ $ل^\infty$ سابقا، وقد جئنا بهما هنا لاكمال الصورة.

ان المتسلسلة $\sum أ_ر = ١ - ١ + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}$، المذكورة في المثال ٩، تقاربية.

ولكن $\sum |أ_ر| = ١ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \ldots$ هي تباعدية، كما في المثال ٣. اذن فالاحتواء $ل^1 \subsetneq \gamma$

فعلي. كذلك $(\frac{١}{ن}) = (١، \frac{١}{٢}، \ldots) \in$ تق. ولكن $(\frac{١}{ن}) \notin \gamma$ ، كما في المثال ٣، لهذا فان الاحتواء $\gamma \subset$ تق. هو ايضا فعلي. ولقد عرفنا في السابق ان الاحتواءات الاخرى فعلية. وهذا يثبت النظرية.

المثال ١٠ .

$\sum (\frac{ت}{٢})^ر$ ذات تقارب مطلق، فهي اذن تقاربية. لان $|\frac{ت}{٢}|^ر = \frac{١}{٢^ر}$ وَ $\sum \frac{١}{٢^ر}$ تقاربية، من المثال ٢، باخذ ع $= \frac{١}{٢}$.

المثال ١١ .

المتسلسلة $١ - ١ + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٣} + \ldots$ ذات تقارب مشروط، من المثالين

٣ ، ٩. والمتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{ر}}{ر^{2}}$ ليست ذات تقارب مشروط، من المثال ٦. والمتسلسلة التوافقية $\sum \frac{1}{ر}$ ليست ذات تقارب مشروط.

ومن الاسباب الرئيسية في اهمية التقارب المطلق هو انه كثيرا ما يكون التعامل مع المتسلسلة $\sum |أ_{ر}|$ من الحدود غير السالبة اسهل من التعامل مع المتسلسلة $\sum أ_{ر}$. فاذا استطعنا اثبات ان $\sum |أ_{ر}|$ تقاربية، فاننا نستنتج ان $\sum أ_{ر}$ تقاربية، من النظرية ٢. ولكن اذا كانت $\sum |أ_{ر}|$ تباعدية فلا نستطيع استنتاج ان $\sum أ_{ر}$ تباعدية (أنظر المثال ١١) وفي هذه الحالة علينا دراسة $\sum أ_{ر}$ بدقة اكثر لمعرفة سلوكها.

لقد لاحظنا في الفصل الرابع، البند ١، ان ل$^{\infty}$ هي فضاء خطي مركب وان تق. وتق هي فضاءات خطية جزئية من ل$^{\infty}$. والنظرية التالية تبين ان ل^{1} ، γ هي فضاءات خطية من تق. واذن من ل$^{\infty}$. وكالعادة نعرف أ + ب = (أ$_{ر}$ + ب$_{ر}$)، حـ أ = (حـ أ$_{ر}$) لكل حـ $\in \mathbb{C}$

النظرية ٣.

γ و ل^{1} هما فضاءان خطيان وجزئيان من الفضاء الخطي المركب تق. ، الذي يتكون من جميع المتتاليات الصفرية. كذلك اذا كان أ ، ب $\in \gamma$ و $\sum أ_{ر}$ ، $\sum ب_{ر}$ يرمزان لمجاميع المتسلسلة فان

$$\sum (حـ أ_{ر} + د ب_{ر}) = حـ \sum أ_{ر} + د \sum ب_{ر} \quad \ldots\ldots (٢)$$

لكل حـ ، د $\in \mathbb{C}$.

البرهان.

لاثبات ان γ هي فضاء جزئي من تق. علينا اثبات ان حـ أ + د ب $\in \gamma$ ، حينما يكون أ ، ب $\in \gamma$ وحـ، د $\in \mathbb{C}$. الآن اذا كان أ ، ب $\in \gamma$ فاذ $\sum_{ر=1}^{ن} أ_{ر} \leftarrow ح_{1}$ و $\sum_{ر=1}^{ن} ب_{ر} \leftarrow$

ح٢ . ولكن $\sum_{ر=١}^{ن}$ (حـ أر + د ب ر) = حـ $\sum_{ر=١}^{ن}$ أر + د $\sum_{ر=١}^{ن}$ ب ر ← حـ ح١ + د ح٢ ، من النظرية ٣ ، الفصل الرابع ، البند ١ . اذن حـ أ + د ب ∋ ٧ ، وبذا تتحقق (٢) .

الآن لنفرض ان أ ، ب ∋ ل١ وَحـ ، د ∋ ℭ . اذن $\sum$ | أر | وَ $\sum$ | بَ ر | تقاربيتان . فاذا رمزنا للمجموعين بـ $\sum$ | أر | ، $\sum$ | ب ر | يكون

س ن = $\sum_{ر=١}^{ن}$ | حـ أر + د ب ر | ≤ | حـ | $\sum_{ر=١}^{ن}$ | أر | + | د | $\sum_{ر=١}^{ن}$ | ب ر | ≤ | حـ | $\sum$ | أر | + | د | $\sum$ | ب ر | .

اذن (س ن) هي متتالية وتيرية متزايدة محصورة من اعلى ، اذن يجب ان تكون تقاربية . ولهذا فان $\sum$ | حـ أر + د ب ر | تقاربية اي ان حـ أ + د ب ∋ ل١ مما يثبت ان ل١ هو فضاء جزئي من تق٠ . وهذا يثبت النظرية .

والطالب يعرف بالطبع طريقة كتابة الاعداد الحقيقية على الصورة العشرية . مثل $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥ ، $\frac{١}{٧}$ = ٠,١٤٢٨٥٧١٤٢٨٥٧ . . . ،وكذلك $\sqrt{٢}$ = ١,٤١٤٠٠٠ . وبصورة عامة فان الاعداد النسبية تكتب على صورة عشرية غير منتهية ، اي انها لا تنتهي باصفار . والعدد الـذي يكتب على صورة عشرية غير منتهية هو في الحقيقة حالة خاصة من المتسلسلات ، وفي النظرية التالية نثبت انه يمكن كتابة كل عدد حقيقي بصورة عشرية . والصورة العشرية للارقام النسبيـة هي عبـارة عن وحـدات من الارقـام مكـررة عددا لا نهائيـا من المـرات ، فمثلا $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥٠ ، $\frac{١}{٧}$ = ٠,$\underline{١٤٢٨٥٧}$ حيث الخط تحت الارقام يعني ان تلك الارقـام مكررة عددا لا نهائيا من المرات . نسمي هذه الصورة صورة دورية .

النظرية ٤ [الكسور العشرية]

لكل س ∋ R صورة عشرية على شكل متسلسلة غير منتهية

$$س = أ_٠ + \frac{أ_١}{١٠} + \frac{أ_٢}{١٠٠} + \ldots = أ_٠ , أ_١ أ_٢ \ldots$$

حيث $أ_ن \in Z$ لكل $ن \geq ٠$ و $٠ \leq أ_ن \leq ٩$ لكل $ن \geq ١$.

وبالعكس **فإن كل** متسلسلة من النوع .... $أ_٢ \, أ_١ \, , أ_٠$ ، حيث $٠ \leq أ_ن \leq ٩$ لكل $ن \geq ١$ **تعرّف عدداً حقيقياً.**

وتكون الصورة العشرية لِـ س غير دورية (غير مكررة) اذا وفقط اذا كان س عددا غير نسبي.

البرهان.

افرض ان $أ_٠ = [س]$ اكبر عدد صحيح في س. لهذا فان $أ_٠ \in Z$ و $س - ١ < أ_٠ \leq س$. لنكتب $ص_١ = س - أ_٠$. لهذا فان

$$س = أ_٠ + ص_١ = أ_٠ + \frac{١٠ ص_١}{١٠} \text{، حيث } ٠ \leq ص_١ < ١.$$

لهذا فان $٠ \leq ١٠ ص_١ < ١٠$. لنكتب $أ_١ = [١٠ ص_١]$، اذن $٠ \leq أ_١ \leq ٩$. اذن

$$١٠ ص_١ = أ_١ + ص_٢ = أ_١ + \frac{١٠ ص_٢}{١٠} \text{ حيث } ٠ \leq ص_٢ < ١ \text{. اذن}$$

$$س = أ_٠ + \frac{أ_١}{١٠} + \frac{١٠ ص_٢}{١٠^٢} \text{ حيث } ٠ \leq ١٠ ص_٢ < ١٠$$

نستمر بالاستقراء لنحصل على

$$٠ \leq س - \left(أ_٠ + \frac{أ_١}{١٠} + \dots + \frac{أ_ن}{١٠^ن}\right) = \frac{١٠ ص_{ن+١}}{١٠^{ن+١}} < \frac{١}{١٠^ن}.$$

وبما ان $\frac{١}{١٠^ن} \to ٠$ ($ن \to \infty$) فاننا نحصل على الصورة العشرية لـ س باخذ النهاية عندما $ن \to \infty$.

وبالعكس لنأخذ متتالية من النوع ... $أ_٢ \, أ_١ \, , أ_٠$ حيث $أ_٠ \in Z$ و $٠ \leq أ_ن \leq ٩$ لكل $ن \geq ١$. بما ان $\frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠^٢} + \dots$ هي متسلسلة هندسية تقاربية. اذن $\frac{٩}{١٠} + \frac{٩}{١٠^٢} +$

. . . هي ايضا تقاربية . ومن القاعدة العامة للتقارب ، نرى ان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $ن_\circ$ بحيث ان

$$\sum_{ر=ن}^{ن+م} \frac{9}{10^ر} < \epsilon \text{ لكل } ن \geqslant ن_\circ \text{ ، } م \geqslant 0 .$$

بما ان $0 \leqslant أ_ن \leqslant 9$ فاننا نحصل على

$$\sum_{ر=ن}^{ن+م} \left| \frac{أ_ر}{10^ر} \right| < \epsilon \text{ ، لكل } ن \geqslant ن_\circ \text{ ، } م \geqslant 0$$

اذن . . . $أ_2 أ_1 , أ_\circ$ هي ذات تقارب مطلق ، واذن تقاربية . لهذا فان مجموعها حقيقي .

لنفــرض ان س عدد غير نسبي ، ولنفـرض ، ان امكن ، ان صورتـه دوريـة . ولتبسيـط الامور افرض ان

س = $أ_4 أ_3 أ_2 أ_1 , أ_\circ$ = . . . $أ_4 أ_3 أ_4 أ_3 أ_2 أ_1 , أ_\circ$ اذن

$$س = حـ + \left(\frac{10 أ_3 + أ_4}{10^4} \right) \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + . . . \right)$$

$$= حـ + \left(\frac{10 أ_3 + أ_4}{10^4} \right) \frac{10^2}{99} ،$$

حيث حـ $\in$ Q . فمن الواضح ان س $\in$ Q ، مما يناقض ان س عدد غير نسبي . لهذا يجب ان تكون الصورة غير دورية .

اخيرا افرض ان س عدد نسبي ، س = $\frac{أ}{ب}$ حيث أ $\in$ Z ، ب $\in$ N . سوف نثبت ان صورة س دورية . فلنكتب $أ_\circ$ = [س] . لهذا فان أ = $أ_\circ$ ب + $ب_\circ$ ، حيث $أ_\circ \in$ Z ، $0 \leqslant ب_\circ <$ ب . كذلــك نكتــب $10 ب_\circ = أ_1 ب + ب_1$ حيث $0 \leqslant ب_1 < 9$ ، $0 \leqslant ب_1 <$ ب ، لهذا فان

$$\frac{أ}{ب} = أ_\circ + \frac{ب_\circ}{ب} = أ_\circ + \frac{أ_1}{10} + \frac{ب_1}{10 ب} ،$$

نستمر بالاستقراء لنعين متتاليتين $(أ_ن)$ ، $(ب_ن)$ حيث $0 \leqslant أ_ن \leqslant 9$ ، $0 \leqslant ب_ن <$

ب وحيث ان 10 ب$_{ن}$ = أ$_{ن+1}$ ب + ب$_{ن+1}$ ، وَ

$$\frac{أ}{ب} = أ_{٠} + \frac{أ_{1}}{10} + \ldots + \frac{أ_{ن}}{10^{ن}} + \frac{ب_{ن}}{10^{ن} ب} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

قد يحدث ان تكون ب$_{ن}$ = ٠ لعدد ما ن . خذ اصغر ن بحيث ان ب$_{ن}$ = ٠ نرى من (٣) ان

$\frac{أ}{ب}$ = ـ أ$_{ن}$ . . . أ$_{2}$ أ$_{1}$,أ$_{٠}$. لهذا فان الصورة دورية .

الاحتمال الثاني ان تكون ب$_{ن}$ > ٠ لكل ن ≥ ٠ . يمكن ان تأخذ ب$_{ن}$ القيم ١ ، ٢ ، . . . ، ب − ١ فقط . لنفرض ان ب$_{ن}$ هي اول عدد يتكرر ولنقُل ب$_{ن}$ = ب$_{ن+م}$. اذن أ$_{ن+م+1}$ = أ$_{ن+1}$ لهذا فان ١٠ ب$_{ن}$ = أ$_{ن+1}$ب + ب$_{ن+1}$ وهذا يتضمن ب$_{ن+1}$ = ب$_{ن+م+1}$ واذن أ$_{ن+م+2}$ = أ$_{ن+2}$. ونستمر على هذا فنجد ان

س = أ$_{ن+م}$ . . . أ$_{ن+2}$ أ$_{ن+1}$ أ$_{ن}$ . . . أ$_{1}$,أ$_{٠}$

لهذا فان الصورة دورية . مما يثبت النظرية .

تمارين ٥ ـ ١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ لنفرض ان أ ، ب ∈ ح ، $\sum$ أ$_{ن}$ = ح$_{1}$ ، $\sum$ ب$_{ن}$ = ح$_{2}$. اثبت ان

$\sum$ حـ$_{ن}$ = أ$_{1}$ + ب$_{1}$ + أ$_{2}$ + ب$_{2}$ + . . .

تقاربية مجموعها ح$_{1}$ + ح$_{2}$ ، واستنتج ان $\sum$ (أ$_{ن}$ + ب$_{ن}$) = ح$_{1}$ + ح$_{2}$.

٢ ـ اذا كانت $\sum$ أ$_{ر}$ ذات تقارب مطلق ، فاثبت ان $|\sum$ أ$_{ر}| \leqslant \sum |$أ$_{ر}|$.

اعط مثالا تكون فيه العلاقة «اقل من» وحدها .

٣ ـ باستخدام الطريقة التلسكوبية اثبت ان $\sum \frac{1}{(ر+1)(ر+2)(ر+3)} = \frac{1}{4}$.

٤ ـ جد مجموع $\sum \frac{2ر+1}{ر^{2}(ر+1)^{2}}$.

٥ ـ اثبت ان γ ليست جبرية جزئية من ل$^{\infty}$ ، ولكن ل^{1} هي مثالية في ل$^{\infty}$.

٦ ـ اثبت انه يوجد تشاكل بين الفضاءين الخطيين γ وتق. .

٧ ـ لكل أ ∈ ل^{1} عرف $||$أ$|| = \sum |$أ$_{ر}|$. اثبت ان هذا هو معيار على ل^{1} .

اي ان $||$أ$|| = ٠$ اذا وفقط اذا كانت أ = صـ، $||$حـ أ$|| = |$حـ$| \, ||$أ$||$ وَ $||$أ+ب$|| \leqslant ||$أ$|| + ||$ب$||$ لكل أ ، ب ∈ ل$^{\infty}$ ، حـ ∈ $\mathbb{C}$.

اثبت كذلك ان ص.ح ع $|$أ$_{ن}| \leqslant ||$أ$||$ لكل أ ∈ ل^{1} .

٨ ـ عرف ل^{2} = { أ = (أ$_{ر}$) $| \sum |$أ$_{ر}|^{2}$ تقاربية } . اثبت ان ل^{1} ⊂ ل^{2} ⊂ تق. والاحتواءات فعلية. اثبت كذلك ان ل^{2} و γ يتقاطعان ولكن لا يحتوي اي منهما الآخر.

٩ ـ افرض ان أ ، ب متتاليتان حقيقيتان . ان بعض العبارات التالية صحيح وبعضها خطأ. اثبت العبارات الصحيحة وبين خطأ العبارات الخطأ (باعطاء امثلة).

(١) اذا كانت $\sum$ أ$_{ر}$ وَ $\sum$ ب$_{ر}$ تباعديتين كانت $\sum$ (أ$_{ر}$ + ب$_{ر}$) تباعدية.

(٢) اذا كانت $\sum$ أ$^{2}_{ن}$ ، $\sum$ ب$^{2}_{ن}$ تقاربيتين كانت $\sum$ أ$_{ن}$ ب$_{ن}$ تقاربية.

(٣) اذا كانت أ$_{ن} \to ٠$ فان أ$_{1}$ − أ$_{1}$ + أ$_{2}$ − أ$_{2}$ + أ$_{3}$ − أ$_{3}$ + . . . تقاربية.

(٤) اذا كانت $\sum |$أ$_{ن}|$ تقاربية وَب$_{ن} \to ١$ فان $\sum$ أ$_{ن}$ ب$_{ن}$ تقاربية.

(٥) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية وَب$_{ن} \to ١$ فان $\sum$ أ$_{ن}$ ب$_{ن}$ تقاربية.

(٧) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية فان $\sum$ أ$^{2}_{ن}$ تقاربية.

(٨) اذا كانت $\sum |$أ$_{ن}|$ تقاربية فان $\sum$ أ$^{2}_{ن}$ تقاربية.

(٩) اذا كانت $\sum |$أ$_{ن}|$ تقاربية فان $\sum$ أ$_{ن}$ (أ$_{1}$ + أ$_{2}$ + . . . + أ$_{ن}$) تقاربية.

(١٠) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تباعدية فان أ$_{ن} \not\to ٠$

(١١) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية فان ن أ$_{ن} \to ٠$

(١٢) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية، (أ$_{ن}$) متناقصة، فان ن أ$_{ن} \to ٠$.

(١٣) اذا كانت $\sum$ (أ$_{ن}$ + أ$_{ن+1}$) تقاربية وَأ ∈ تق فان $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية.

(١٤) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية فان $\sum |$أ$_{ن}$ − أ$_{ن+1}|$ تقاربية.

(١٥) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية و ن أ$_{ن}$ $\leftarrow$ ٠ فان $\sum$ ن(أ$_{ن}$ − أ$_{ن+١}$) = $\sum$ أ$_{ن}$.

(١٦) اذا كانت $\sum$ |أ$_{ن}$| تقاربية فان $\sum$ |أ$_{ن}$ أ$_{ن+١}$|$^{\frac{١}{٢}}$ تقاربية.

(١٧) اذا كانت $\sum$ |أ$_{ن}$ أ$_{ن+١}$|$^{\frac{١}{٢}}$ تقاربية فان $\sum$ |أ$_{ن}$| تقاربية.

(١٨) اذا كانت $\sum$ |أ$_{ن}$ − أ$_{ن+١}$| تقاربية فان أ $\ni$ تق .

(١٩) اذا كانت أ $\ni$ تق. فان $\sum$ |أ$_{ن}$ − أ$_{ن+١}$| تقاربية.

(٢٠) اذا كانت $\sum$ |أ$_{ن}$|^{٢} تقاربية فان $\sum$ |أ$_{ن}$|^{٣} تقاربية.

(٢١) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية فان $\sum$ أ$_{ن}$ع^{ن} تقاربية لكل |ع| $<$ ١.

(٢٢) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تباعدية فان $\sum \frac{١}{١ + |أ_{ن}|}$ تباعدية.

(٢٣) اذا كان ن |أ$_{ن}$| $\leqslant$ ١ لكل ن $\ni$ N فان $\sum$ أ$_{ن}$ تباعدية.

(٢٤) اذا كان ٢ |أ$_{ن+١}$| $\leqslant$ |أ$_{ن}$| لكل ن $\ni$ N فان $\sum$ |أ$_{ن}$| تقاربية.

(٢٥) اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية فان $\frac{(أ_{١} + ٢أ_{٢} + \ldots + ن\,أ_{ن})}{ن} \leftarrow$.

١٠ـ اكتب ٠,١٢١٢١٢٠٠٠ على صورة عدد نسبي. هل المتسلسلة ٠,١٠١٠٠١٠٠٠١٠٠٠ عدد نسبي ام غير نسبي؟

١١ـ ما هي الاعداد الحقيقية التي لها صور عشرية وحيدة؟

٢. اختبارات التقارب

كثيرا ما يكون من المستحيل ايجاد صيغة بسيطة للمجموع الجزئي النوني للمتسلسلة. وكذلك فان القاعدة العامة للتقارب يصعب تطبيقها على متسلسلات الارقام. لهذا فاننا نحتاج الى

اختبارات تقارب يكون من السهل تطبيقها، وتحتوي على الحدود $أ_ن$ فقط للمتسلسلة أوعلى اقترانات سهلة لها.

والاختبارات الرئيسية التي سنبحثها هي: اختبار المقارنة واختبار الجذر النوني، واختبار النسبة، واختبار رابي. ونشدد هنا على ان الاختبارات تنص فقط على شروط كافية للتقارب (او التباعد). لهذا سنجد دائما متسلسلات تقاربية أو تباعدية لا تنطبق عليها شروط الاختبار.

فعلى سبيل المثال، ان اختبار الجذر النوني ينص على انه اذا كانت $\overline{نها} |أ_ن|^{\frac{1}{ن}} < ١$ فان $\sum أ_ن$ ذات تقارب مطلق، فهي اذن تقاربية. ولكن يوجد متسلسلات $\sum أ_ن$ ذات تقارب مطلق وفيها ان $\overline{نها} |أ_ن|^{\frac{1}{ن}} \not< ١$ مثل $\sum \frac{١}{ن^٢}$.

النظرية ٥.

اذا كان $أ_ن \not\to ٠$ اي ان $|أ_ن| \not\to ٠$ فان $\sum أ_ن$ تباعدية.

البرهان.

من النظرية ٢ نعرف ان $\sum أ_ن$ تقاربية تعطي $أ_ن \to ٠$، لهذا فانه اذا كان $أ_ن \not\to ٠$ فان $\sum أ_ن$ ليست تقاربية.

المثال ١٢.

$\sum \frac{(-١)^ن ن}{ن + ١}$ تباعدية لان $\left| \frac{(-١)^ن ن}{ن + ١} \right| = \frac{ن}{ن + ١} \to ١$. كذلك $١ - ١ + ٠ + ١ - ١ + ٠ + \dots$ تباعدية لان $(|أ_ن|) = (١، ١، ٠، ١، ١، ٠، \dots) \not\ni$ تقـ٠ .

المثال ١٣.

عكس النظرية ٥ خطأ. فمثلا $\sum \frac{١}{ن}$ تباعدية، $\frac{١}{ن} \to ٠$.

النظرية ٦ . [اختبار المقارنة للحدود غير السالبة] .

(أ) افرض انه يوجد مـ $\in N$ بحيث ان ٠ $\leqslant$ أ$_{ن}$ $\leqslant$ ب$_{ن}$ لكل ن $\leqslant$ مـ. فان $\sum$ ب$_{ن}$ تقاربية تتضمن $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية .

(ب) افرض انه يوجد مـ $\in N$ بحيث ان ٠ $\leqslant$ ب$_{ن}$ $\leqslant$ أ$_{ن}$ لكل ن $\leqslant$ مـ. اذن $\sum$ ب$_{ن}$ تباعدية تتضمن $\sum$ أ$_{ن}$ تباعدية .

البرهان .

(أ) اذا كان ن $\leqslant$ مـ ، د $\leqslant$ ٠ فاننا نحصل على .

$$٠ \leqslant \sum_{ر=ن}^{ن+د} أ_{ر} \leqslant \sum_{ر=ن}^{ن+د} ب_{ر} \quad \ldots\ldots \quad (٤)$$

لنفرض ان $\in$ > ٠ . فبما ان $\sum$ ب$_{ر}$ تقاربية ، فان القاعدة العامة للتقارب تعطي ن$_{٠}$ بحيث ان ب$_{١}$ + ب$_{٢}$ + . . . + ب$_{ن+د}$ > $\in$ لكل ن $\leqslant$ ن$_{٠}$ ، د $\leqslant$ ٠ . من (٤) نحصل على ٠ $\leqslant$ أ$_{ن}$ + . . . + أ$_{ن+د}$ > $\in$ لكل ن $\leqslant$ مـ + ن$_{٠}$ ، د $\leqslant$ ٠ ، وباستخدام القاعدة العامة للتقارب نحصل على $\sum$ أ$_{ر}$ تقاربية .

(ب) لوكانت $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية فانه باستخدام (أ) واستبدال أ$_{ن}$ وَب$_{ن}$ نحصل على $\sum$ ب$_{ن}$ تقاربية ، مما يناقض $\sum$ ب$_{ن}$ تباعدية . اذن $\sum$ أ$_{ن}$ تباعدية .

ملاحظة .

يمكن اثبات (أ) بملاحظة ان أ$_{ن}$ $\leqslant$ ٠ تعطي س$_{ن+١}$ − س$_{ن}$ = أ$_{ن}$ $\leqslant$ ٠ لهذا فان (س$_{ن}$) = (أ$_{١}$ + . . . + أ$_{ن}$) وتيرية متزايدة . ولكن $\sum$ ب$_{ن}$ تقاربية تعطي ان (ب$_{١}$ + . . . + ب$_{ن}$) محصورة من اعلى ، اذن (س$_{ن}$) محصورة من اعلى ، اذن (س$_{ن}$) تقاربية ، اي ان $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية .

نتيجة.

اذا كانت $(أ_ن)$ متتالية اعداد مركبة، وكان $ب_ن > ٠$ لكل $ن \in N$ بحيث ان نها $\frac{أ_ن}{ب_ن}$ موجودة فان $\sum ب_ن$ تقاربية تعطي $\sum أ_ن$ ذات تقارب مطلق (فهي اذن تقاربية).

البرهان

تقارب المتتالية $\frac{أ_ن}{ب_ن}$ يتضمن انها محصورة.

اذن $|أ_ن| \leqslant م ب_ن$ لكل $ن \in N$. لكن $\sum م ب_ن$ تقاربية. اذن تقارب $\sum |أ_ن|$ ينتج من النظرية ٦ (أ).

وتعتمد الاستفادة من اختبار المقارنة ونتيجته على معرفة متسلسلات $\sum ب_ن$، لتتم المقارنة بها. واليك اهم هذه المتسلسلات.

$ب_ن = س^ن$ حيث س ثابت $٠ \leqslant س < ١$ . . . (٥)

$ب_ن = \frac{١}{ن^\alpha}$ حيث $\alpha > ١$ . . . . (٦)

$ب_ن = \frac{١}{ن}$ . . . . (٧)

نعرف ان المتسلسلة التي تتولد من (٥) تقاربية والتي تتولد من (٧) تباعدية. وفي حالة $\alpha = ٢$، مثال ٦، يتبين ان المتسلسلة المكونة من (٦) تقاربية. وفي المثال التالي نعالج $\alpha > ١$.

المثال ١٤ [اقتران زيتا]

اذا كانت $\alpha \in Q$ فان $\sum \frac{١}{ن^\alpha}$ تكون تباعدية اذا كانت $\alpha \leqslant ١$، وتقاربية اذا

كانت $\alpha > 1$. لاثبات ذلك لاحظ ان $\frac{1}{ن^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{ن}$ اذا كانت $\alpha \leqslant 1$. لهذا فان التباعد ينتج من اختبار المقارنة. واذا كانت $\alpha \geqslant 2$ فان $0 < \frac{1}{ن^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{ن^{2}}$. والتقارب ينتج من اختبار المقارنة مع المتسلسلة التقاربية $\sum \frac{1}{ن^{2}}$.

تبقى الحالة $1 < \alpha < 2$. والبرهان الذي سوف نقدمه ينطبق على اي $\alpha > 1$.

لنأخذ $ن \in N$ ولنكتب $س_ن = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{ن^{\alpha}}$. فالمتتالية $(س_ن)$ هي متتالية وتيرية متزايدة. ولكل $ن > 1$ تكون $س_ن \leqslant س_{((ن))}$ حيث $((ن)) = 2^{ن} - 1$، و

$$س_{((ن))} < 1 + \frac{2}{2^{\alpha}} + \frac{4}{4^{\alpha}} + \ldots + \frac{2^{ن-1}}{(2^{ن-1})^{\alpha}}$$

$$= 1 + س + س^{2} + \ldots + س^{ن-1} < \frac{1}{1 - س}\text{، حيث } س = \frac{1}{2^{\alpha - 1}} < 1.$$

اذن $(س_ن)$ محصورة من اعلى، لهذا فهي تقاربية. لاحظ اننا في الحقيقة اثبتنا المتباينة

$$1 < \sum \frac{1}{ن^{\alpha}} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} \text{ لكل } \alpha \in Q \text{، } \alpha > 1.$$

خلاصة ما ورد انه عندما تكون $\alpha \in Q$ ، $\alpha > 1$ فان المتسلسلة $\sum \frac{1}{ن^{\alpha}}$ تتقارب. ويرمز لمجموعها بالرمز $ز(\alpha)$. والاقتران $ز$، $ز: \{\alpha \in Q \mid \alpha > 1\} \longrightarrow R$ يسمى اقتران زيتا (Zeta) . وفيما بعد، عندما تعرف معنى $ن^{\alpha}$ حيث α أي عدد حقيقي، وليس نسبيا فقط، فسوف نثبت ان $\sum \frac{1}{ن^{\alpha}}$ تقاربية لكل $\alpha \in R$ ، $\alpha > 1$. وتصبح ز معرفة على $\{\alpha \in R \mid \alpha > 1\}$.

المثال ١٥.

لنفرض ان $\sum أ_ن = \sum \frac{2ن^{2} + ن + ت^{ن}}{1 + ن^{س}}$. فلأي قيم $س \in Q$ تكون المتسلسلة تقاربية؟

حينما تكون ن كبيرة فان $\text{أ}_{\text{ن}}$ تكون «شبيهة» من حيث سلوكها بـ $\frac{1}{\text{ن}^{\text{س}-2}}$. وهذا يوحي بان نأخذ $\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}^{\text{س}-2}}$، في نتيجة النظرية ٦، ونفترض ان س $>$ ٣. لهذا فان $\sum \text{ب}_{\text{ن}}$ تقاربية، من المثال ١٤ . اذن

$$\frac{\text{أ}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}}} = \frac{2\text{ن}^{\text{س}} + \text{ن}^{\text{س}-1} + \text{ت}^{\text{ن}} \cdot \text{ن}^{\text{س}-2}}{1 + \text{ن}^{\text{س}}} \leftarrow 2 \text{ عندما ن } \leftarrow \infty \, .$$

اذن $\sum \text{أ}_{\text{ن}}$ تكون ذات تقارب مطلق حينما تكون س $>$ ٣.

واذا كانت س $\leqslant$ ٢ فمن الواضح ان $\text{أ}_{\text{ن}} \not\leftarrow 0$، لهذا فان $\sum \text{أ}_{\text{ن}}$ تباعدية. واخيرا افرض ان ٢ $<$ س $\leqslant$ ٣. اذن $\text{أ}_{\text{ن}} \leftarrow 0$ ولكن هذا وحده غير كاف لضمان تقارب $\sum \text{أ}_{\text{ن}}$. وفي الحقيقة ان $\sum \text{أ}_{\text{ن}}$ تكون تباعدية، كما سنرى.

الآن $\sum \text{ب}_{\text{ن}} = \sum \frac{\text{ن} + \text{ت}^{\text{ن}}}{1 + \text{ن}^{\text{س}}}$ ذات تقارب مطلق، لان س $>$ ٢. ولكن س $\leqslant$ ٣ تعطي

$$\frac{1}{\text{ن}} \leqslant \frac{2\text{ن}^2}{1 + \text{ن}^3} \leqslant \frac{2\text{ن}^2}{1 + \text{ن}^{\text{س}}} \text{،}$$

اذن $\sum \text{حـ}_{\text{ن}} = \sum \frac{2\text{ن}^2}{1 + \text{ن}^{\text{س}}}$ تباعدية، بالمقارنة مع المتسلسلة التوافقية التباعدية $\sum \frac{1}{\text{ن}}$.

الآن $\text{س}'_{\text{ن}} = (\text{ب}_1 + \ldots + \text{ب}_{\text{ن}}) + (\text{حـ}_1 + \ldots + \text{حـ}_{\text{ن}}) = \text{ل}_{\text{ن}} + \text{م}_{\text{ن}}$، لقد اثبتنا ان $\text{ل}_{\text{ن}} \leftarrow$ نهاية ما، $\text{م}_{\text{ن}} \leftarrow \infty$. اذن $(\text{س}_{\text{ن}})$ تباعدية.

والاختبار التالي ينسب الى كوشي، وهو كثير الفائدة، وبخاصة عند دراسة متسلسلات القوى (التي سوف ندرسها في فصل قادم).

النظرية ٧ [اختبار الجذر النوني].

افرض ان $أ = \overline{نها} \, |أ_ن|^{\frac{1}{ن}}$. فان :

(١) $أ < ١$ تعطي $\sum أ_ن$ ذات تقارب مطلق .

(٢) $أ > ١$ تعطي $\sum أ_ن$ تباعدية .

(٣) $أ = ١$ لا تعطي اي استنتاج ، اي ان الاختبار يفشل في اعطاء نتيجة . فقد تكون $\sum أ_ن$ تباعدية او تقاربية .

البرهان.

(١) من النظرية ٥ ، الفصل الرابع ، نجد انه لكل $و > ٠$ يوجد $ن_٠ (و)$ بحيث ان $|أ_ن|^{\frac{1}{ن}} < أ + و$ لكل $ن \geqslant ن_٠$. بما أن $أ < ١$ فيمكن ان نختار $و = \frac{١ - أ}{٢} > ٠$. اذن $|أ_ن| < س^ن$ لكل $ن \geqslant ن_٠$ ، حيث $٠ < س = أ + و = \frac{١ + أ}{٢} < ١$. اذن $\sum |أ_ن| < \infty$ ، بالمقارنة مع المتسلسلة الهندسية التقاربية $\sum س^ن$.

(٢) خذ $و = أ - ١ > ٠$. اذن $|أ_ن|^{\frac{1}{ن}} > أ - و = ١$ لعدد غير منته من ن ، لهذا فان $|أ_ن| > ١$ لكل هذه الاعداد . اذن $أ_ن \not\to ٠$ لهذا فان $\sum أ_ن$ تباعدية ، من النظرية ٥ .

(٣) اذا كان $أ_ن = ١$ لكل ن فان $أ = ١$ ولكن $\sum أ_ن$ تباعدية . اذا كان $أ_ن = \frac{١}{ن^٢}$ فان $أ = ١$ (باستخدام $ن^{\frac{1}{ن}} \to ١$) ولكن $\sum أ_ن$ تقاربية .

ملاحظة.

من حسن الحظ اننا كثيرا ما نستطيع استبدال $\overline{نها}$ بـ نها في اختبار الجذر النوني ، ويبقى الاستنتاج صحيحا .

المثال ١٦ .

لكل ع $\in \mathbb{C}$. $\sum \frac{ع^ن}{ن^ن}$ تقاربية . لتوضيح ذلك خذ $\left| \frac{ع^ن}{ن^ن} \right|^{\frac{1}{ن}} = \frac{|ع|}{ن} \leftarrow ٠$.

وينتج التقارب المطلق من اختبار الجذر النوني .

في حالات بسيطة وعديدة نجد من الصعب تطبيق اختبار الجذر النوني ، فمثلا $أ_ن = \frac{ن!}{ن^ن}$. في العديد من هذه الحالات يكون الاختبار التالي مفيدا (وينسب الى دلامبرت) .

النظرية ٨ [اختبار النسبة] .

افرض ان $|أ_ن| > ٠$ لكل ن $\in N$ فان

(١) $\overline{نها} \left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \right| < ١$ تعطي ان $\sum أ_ن$ ذات تقارب مطلق .

(٢) $\underline{نها} \left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \right| > ١$ تعطي ان $\sum أ_ن$ تباعدية

(٣) نها $\left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \right| = ١$ لا تعطي اي استنتاج .

البرهان .

(١) لنرمز لـ $\overline{نها}$ بالرمز أ . فكما في النظرية ٧ (١) ، خذ و $= \frac{١ - أ}{٢}$. لهذا فان

$\left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \right| <$ س لكل ن $\geqslant ن_٠$ حيث ٠ $<$ س $<$ ١ + و $<$ ١ . اذن لـ ن = $ن_٠$ نحصل

على $|أ_{ن+١}| <$ س $|أ_ن|$ ، $|أ_{ن+٢}| <$ $س^٢ |أ_ن|$ . . . ، $|أ_{ن+ر}| < س^ر |أ_ن|$ لكل ر $\geqslant$ ١ . ولكن $\sum_{ر=١}^{\infty} س^ر$ هي متسلسلة هندسية تقاربية . اذن $حـ_ن = \sum_{ر=١}^{\infty} |أ_{ن+ر}|$ تقاربية باستخدام اختبار المقارنة . اذن $\sum |أ_ر| = |أ_١| + \ldots + |أ_{ن_٠}| + حـ_{ن_٠}$. تقاربية .

(٢) اذا كانت نها $\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| = أ > ١$، فانه باستخدام النظرية ٥، الفصل الرابع، يوجد $ن_٠$ بحيث ان $\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| > ١$ لكل $ن \geqslant ن_٠$. اذن باخذ $ن = ن_٠$ نحصل على $|أ_{ن+ر}| > |أ_ن| > ٠$ لكل $ر \geqslant ١$، اذن $أ_ن \not\to ٠$. وهذا يعطي $\sum أ_ن$ تباعدية.

(٣) اذا كان $أ_ن = ١$ لكل ن فان نها $\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| = ١$ ولكن $\sum أ_ن$ تباعدية. اذا كان $أ_ن = \frac{١}{ن^٢}$ فان نها $\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| = ١$ ولكن $\sum أ_ن$ تقاربية. وهذا يثبت النظرية.

المثال ١٧ [المتسلسلة الاسية].

ان المتسلسلة سا (ع) $= \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ع^ن}{ن!} = ١ + ع + \frac{ع^٢}{٢!} + \frac{ع^٣}{٣!} + \ldots$ هامة جدا في التحليل. وهي تعرف الاقتران الاسي سا : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ، وسوف ندرسه بالتفصيل في فصل قادم. نريد الآن ان نثبت ان المتسلسلة تقاربية (في الحقيقة ذات تقارب مطلق) لجميع قيم $ع \in \mathbb{C}$. واختبار النسبة هو الاختبار المناسب. فالحالة ع = ٠ بديهية لان المتسلسلة تصبح ١ + ٠ + ٠ + ٠ + ... الآن لنفرض ان $|ع| > ٠$ ونطبق اختبار النسبة لـ $أ_ن = \frac{ع^ن}{ن!}$،

فنحصل على

$$\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| = \frac{|ع|}{ن+١} \leftarrow ٠ \quad (ن \leftarrow \infty).$$

لكل $ع \in \mathbb{C}$. اذن نها $\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| =$ نها $\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| = ٠ < ١$. اذن $\sum |أ_ن|$ تقاربية، باستخدام النظرية ٨ (١).

المثال ١٨ .

المتسلسلة $\sum \text{أ}_{\text{ن}} = \sum \frac{\text{ن!}}{\text{ن}^{\text{ن}}}$ هي تقاربية لان

$$\left|\frac{\text{أ}_{\text{ن+١}}}{\text{أ}_{\text{ن}}}\right| = \frac{\text{ن}^{\text{ن}}}{(\text{١} + \text{ن})^{\text{ن}}} = \frac{\text{١}}{(\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{ن}})^{\text{ن}}} \leftarrow \frac{\text{١}}{e} > \text{١ لان } e = \text{٢،٧١..}$$

والاختبـار التـالي يصلح لمعـالجـة بعض الحالات التي يكون بها $\left|\frac{\text{أ}_{\text{ن+١}}}{\text{أ}_{\text{ن}}}\right| \leftarrow \text{١}$ في اختبار النسبة .

النظرية ٩ [اختبار رابي] .

افرض ان $|\text{أ}_{\text{ن}}| > \text{٠}$ لكل ن $\in N$. اذن

$$\overline{\text{نها}}\ \text{ن} \left(\left|\frac{\text{أ}_{\text{ن+١}}}{\text{أ}_{\text{ن}}}\right| - \text{١} \right) > -\text{١}$$

تعطي ان $\sum \text{أ}_{\text{ن}}$ ذات تقارب مطلق .

البرهان .

افرض ان $\overline{\text{نها}}$ تساوي ١ − ٢د حيث د > ٠ ، اذن يوجد مـ = مـ (د) $\in N$ بحيث ان ن $\geqslant$ مـ تعطي ن $\left(\left|\frac{\text{أ}_{\text{ن+١}}}{\text{أ}_{\text{ن}}}\right| - \text{١} \right) > -\text{١} - \text{د}$. وبعمليات حسابية ينتج $\text{د}\,|\text{أ}_{\text{ن}}| > (\text{ن} - \text{١})\,|\text{أ}_{\text{ن}}| - \text{ن}\,|\text{أ}_{\text{ن+١}}|$ ، ومن هذا نستنتج ان

$$\sum_{\text{ن=مـ}}^{\text{مـ+ر}} |\text{أ}_{\text{ن}}| > \frac{(\text{مـ} - \text{١})\,|\text{أ}_{\text{مـ}}|}{\text{د}} \text{ لكل ر} \geqslant \text{١} .$$

اذن مجاميع $\sum |\text{أ}_{\text{ن}}|$ الجزئية محصورة، اذن تقاربية .

المثال ١٩.

نعرف ان $\sum$ أ$_ن$ = $\sum \frac{1}{ن^2}$ تقاربية ولكن لنأخذها كمثال. يفشل اختبار النسبة في اعطاء نتيجة لان $\left| \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن} \right| = \frac{ن^2}{(ن+1)^2} \leftarrow 1$.

فاذا استخدمنا اختبار رابي نجد ان

$$ن \left(\left| \frac{أ_{ن+1}}{أ_ن} \right| - 1 \right) = \frac{-2ن^2 - ن}{(ن+1)^2} \leftarrow -2 > -1.$$

مما يثبت التقارب.

وجميع الاختبارات السابقة هي اختبارات تقارب مطلق، ولكننا نعرف انه يوجد متسلسلات ذات تقارب مشروط. فعلى سبيل المثال، $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots$ بشكل عام يصعب حل هذه المتسلسلات. ولكن النتيجة التالية تساعد في حل مسائل التقارب المشروط.

النظرية ١٠ [إختبار ديد كند]

لنفرض ان (أ$_ر$) ، (ب$_ر$) متتاليتان من الاعداد المركبة. ولنكتب س$_ن$ = أ$_1$ + أ$_2$ + ... + أ$_ن$ و $\triangle$ ب$_ر$ = ب$_ر$ − ب$_{ر+1}$. ان الشروط الثلاثة التالية (س$_ن$) $\in$ ل$^\infty$ ، $\sum |\triangle$ب$_ر| < \infty$ وَب$_ر \leftarrow 0$ تعطي ان $\sum$ أ$_ر$ب$_ر$ تقاربية. وكذلك $\sum$ أ$_ر$ب$_ر$ = $\sum$ س$_ر$ $\triangle$ ب$_ر$.

البرهان.

يستند البرهان الى متطابقة تعرف باسم صيغة آبل للجمع الجزئي:

$$\sum_{ر=1}^{ن} أ_ر ب_ر = س_ن ب_ن + \sum_{ر=1}^{ن-1} س_ر \Delta ب_ر \quad . . . (8)$$

بما ان $س_1 = أ_1$ ، فان (٨) تتحقق لِـ ن = ١ . افرض ان ن > ١ . اذن $أ_ر = أ س_ر - س_{ر-1}$ لكل ر > ١ . والطرف الايمن من (٨) يساوي

$$س_1 ب_1 + (س_2 - س_1) ب_2 + . . . + (س_ن - س_{ن-1}) ب_ن =$$

$$س_ن ب_ن + س_1 (ب_1 - ب_2) + . . . + س_{ن-1} (ب_{ن-1} - ب_ن)$$

مما يثبت (٨) .

بما ان $(س_ن) \in ل^\infty$ و$ب_ن \to 0$ فان $س_ن ب_ن \to 0$ ($ن \to \infty$)، وهذا يعالج الحد الاول في (٨) . كذلك وبما ان $|س_ر| \leqslant م$ لكل $ر \in N$ ، فان $\sum م |\Delta ب_ر| < \infty$. ومن اختبــار المقــارنــة نحصــل على $\sum |س_ر \Delta ب_ر| < \infty$. اذن $\sum س_ر \Delta ب_ر$ تقاربية ، وبذا تكون المجاميع الجزئية تقاربية . وهذا يعالج الحد الثاني في (٨) . اذن $\sum أ_ر ب_ر$ تقاربية ومجموعها هو $\sum س_ر \Delta ب_ر$.

المثال ٢٠ .

سوف نثبت ان $\sum \frac{(-1)^{ر-1}}{ر} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + . . .$ تقاربية . (ليست بالطبع ذات تقارب مطلق) . خذ $أ_ر = (-1)^{ر-1}$ و$ب_ر = \frac{1}{ر}$ في اختبار ديدكند . اذن $س_ن$ = ١ أو صفرا، حسب كون ن فردية أوزوجية . اذن $|س_ن| \leqslant 1$ اي ان $(س_ن) \in ل^\infty$.

الآن $ب_ن = \frac{1}{ن} \to 0$ وَ

$\sum |\Delta ب_ر| = \sum |\frac{1}{ر} - \frac{1}{ر+1}| = \sum \frac{1}{ر(ر+1)} = 1$ ، من المثال ٥ في الفصل ٥ ، البند ١ . اذن $\sum أ_ر ب_ر$ تقاربية ومجموع المتسلسلة هو في الحقيقة لن٢ ، ولكن لا نستطيع إثبات هذا الآن .

سوف نعطي الآن حالة خاصة من النظرية ١٠ تعمم المثال السابق :

النظرية ١١ [اختبار ليبنتس أو اختبار المتسلسلات المتناوبة] .

اذا كانت (ب ن) متتالية حقيقية صفرية وكانت ايضا وتيرية متناقصة ، تكون المتسلسلة $\sum$ (-١)^ر-١ ب ر = ب١ - ب٢ + ب٣ - . . . تقاربية . كذلك فان ب١ - ب٢ $\leqslant$ $\sum$ (-١)^ر-١ ب ر $\leqslant$ ب١ .

البرهان .

خذ أ ر = (-١)^ر-١ في النظرية ١٠ . اذن (س ن) $\in$ ل∞. نعرف أن ب ن $\leftarrow$ ٠ وبما ان ب ر $\geqslant$ ب ر+١ ، فان المجمــوع الجـزئي النـوني من $\sum$ | Δ ب ر | يسـاوي ب١ - ب ن $\leftarrow$ ب١ ، اذن $\sum$ | Δ ب ر | تقاربية . كذلك $\sum$ (-١)^ر-١ ب ر = $\sum$ س ر Δ ب ر = (ب١ - ب٢) + ٠ + (ب٣ - ب٤) + . . . والتي هي $\geqslant$ ب١ - ب٢ .

اخــيرا ب ن $\leftarrow$ ٠ ، (ب ن) متنــاقصـة تعطي ب ن $\geqslant$ ٠ لكـل ن . لهذا فان المجمـوع الجزئي النوني لـ $\sum$ (-١)^ر-١ ب ر اقل من أو يساوي ب١ . وهكذا اثبتنا النظرية .

المثال ٢١ .

المتسلسلة ١ - ٢^-٢ + ٣^-٢ - ٤^-٢ + . . . هي تقاربية ، باستخدام اختبار ليبنتس . وفي الحقيقة هي ذات تقارب مطلق . لنرمز لهذا المجموع بالرمز س . فباستخدام اختبار ليبنتس نجد ان ٥^-٢ - ٦^-٢ $\leqslant$ ٥^-٢ - ٦^-٢ + ٧^-٢ - . . . $\leqslant$ ٥^-٢ . وبايجاد قيم الحدود الاربعة الاولى من المتسلسلة نجد ان ٠,٨١ $<$ س $<$ ٠,٨٤ .

تمارين ٥ ـ ٢

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ ناقش التقارب المطلق والتقارب للمتسلسلات $\sum$ أ$_{ن}$ حيث أ$_{ن}$ معطاة كما يلي:

(أ) $(-١)^{ن}(١ + \frac{١}{ن})^{-ن}$ (ب) $\frac{٢^{ن}}{ن^{١٠٠}}$ (حـ) $\frac{ن٢^{ن}}{٣^{ن}}$

(د) $(\sqrt[ن]{ن} - ١)^{ن}$ (هـ) $\frac{ن٢}{\sqrt{٣ن^{٣} + ٤}}$ (و) $\frac{ت^{ن}}{(ن + ٢)(ن + ٦)}$

(ز) $(\frac{ن}{ن + ١})^{ن^٢}$ (ح) $\frac{ع^{ن}}{ن}$ لكل ع $\in \mathbb{C}$.

(ك) $\frac{(ن!)^{٣} س^{٣ن}}{(٣ن)!}$ حيث س $\in R$.

(ل) $(٢ + (-١)^{ن})^{ن} \left| ١ - س^{-١} \right|^{ن}$ حيث س $\in R$.

(م) $\frac{(-١)^{ن}}{ن}(١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \ldots + \frac{١}{ن})$

٢ ـ اذا كان أ$_{ن}$ $>$ ٠ لكل ن $\in N$ وكانت نها ن $(\frac{أ_{ن+١}}{أ_{ن}} - ١) > -١$ فاثبت ان $\sum$ أ$_{ن}$

تباعدية. ناقش تقارب

$\sum \frac{أ(أ + ١) \ldots (أ + ن)}{ب(ب + ١) \ldots (ب + ن)}$ حيث أ ، ب اعداد حقيقية ثابتة ولا تساوي ٠ ، -١

، -٢ ، . . . .

٣ ـ هل العبارة التالية صحيحة ام خطأ؟

«اذا كان أ$_{ن}$ $>$ ٠ لكل ن $\in N$ وكان $\frac{أ_{ن+١}}{أ_{ن}} > ٢$ لعدد لا نهائي من ن فان $\sum$ أ$_{ن}$

تباعدية» .

٤ ـ اذا كان $أ_ن > ٠$ لكل ن $\in$ N وكان $\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \leftarrow أ$ (ن $\leftarrow \infty$) فاثبت ان $أ_ن^{\frac{١}{ن}} \leftarrow أ$ (ن $\leftarrow \infty$). استخدم هذه النتيجة لحساب قيمة نها $\frac{(ن!)^{\frac{١}{ن}}}{ن}$

٥ ـ اذا كانت س > ٠ عددا ثابتا فاثبت ان

$$\frac{١}{س} - \frac{١}{س+١} + \frac{١}{س+٢} - \frac{١}{س+٣} + \frac{١}{س+٤} - \ldots$$ تقاربية،

ولكن المتسلسلات التي نحصل عليها بتغير الاشارات الى (أ) ++ - ++ - . . . ،

(ب) + - - + - - . . . ، هي تباعدية .

٦ ـ [متسلسلة ذات الحدين]: اثبت ان

$$١ + أع + \frac{أ(أ-١)ع^٢}{٢!} + \frac{أ(أ-١)(أ-٢)ع^٣}{٣!} + \ldots$$

ذات تقارب مطلق اذا كان $|ع| < ١$، وتباعدية اذا كان $|ع| > ١$. لأي أ $\in \mathbb{C}$.

وإذا كانت $|ع| = ١$ فاثبت ان المتسلسلة تكون ذات تقارب مطلق اذا كان الجزء الحقيقي من أ > ٠ . وتكون تباعدية اذا كان الجزء الحقيقي من أ $\leqslant -١$.

٧ ـ افرض ان $\sum أ_ر$ تقاربية وَ $\sum |\Delta ب_ر| < \infty$. فاثبت ان $ب_ن \in$ تق ، ثم استخدم صيغة أبل للجمع الجزئي لاثبات ان $\sum أ_ر ب_ر$ تقاربية . اعط مثالا تبين فيه ان $\sum أ_ر ب_ر$ قد لا تكون ذات تقارب مطلق .

٨ ـ اذا كانت $\sum أ_ر ب_ر$ تقاربية لكل أ $\in \gamma$ ، فاثبت ان $\sum |\Delta ب_ر| < \infty$.

٩ ـ عرف تم = { ب = $(ب_ر)$ | $\sum |\Delta ب_ر| < \infty$ }. وهذه هي المتتاليات ذوات التغير المحصور. اثبت ان $ل^١ \subset$ تم $\subset$ تق وان تم هو فضاء خطي وجزئي من تق . اثبت كذلك ان γ وَتم يتقاطعان ولكن لا يحوي اي منهما الآخر.

١٠ ـ لنفرض ان س ترمز الى المجموع $١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \ldots$. كم حدا يجب ان نجمع كي تكون س صحيحة لست منازل عشرية؟

٣. ضرب المتسلسلات

في هذا البند سوف نفترض ان جميع المتسلسلات تبدأ عند ن = ٠، لهذا فان $\sum$ أ$_{ن}$ يرمز الى أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ + أ$_{٢}$ + . . . وهذا يساعد عند دراسة ضرب المتسلسلات ولكنه ليس ضروريا منطقيا.

عندما نحتاج لجمع متتاليتين $\sum$ أ$_{ن}$، $\sum$ب$_{ن}$ فان الطريقة الطبيعية هي جمع الحدود اي ان الجمع هو $\sum$(أ$_{ن}$ + ب$_{ن}$). ولكن اذا احتجنا ان نضرب $\sum$ أ$_{ن}$ وَ $\sum$ب$_{ن}$ فهناك مشكلة اذ انه لا يوجد طريقة طبيعية لترتيب حواصل الضرب أ$_{ر}$ ب$_{ن}$.

لنأخذ (أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ + . . .) (ب$_{٠}$ + ب$_{١}$ + . . .) ولنفكر بجميع حواصل الضرب المكتوبة فيما يلي

أ$_{٠}$ ب$_{٠}$ أ$_{٠}$ ب$_{١}$ أ$_{٠}$ ب$_{٢}$ . . .
أ$_{١}$ ب$_{٠}$ أ$_{١}$ ب$_{١}$ أ$_{١}$ ب$_{٢}$ . . .
أ$_{٢}$ ب$_{٠}$ أ$_{٢}$ ب$_{١}$ أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ . . .

في هذه المرحلة لا نهتم بكون المتسلسلات تقاربية ام لا. كل ما يهمنا الآن هو تكوين حواصل ضرب مختلفة اعتمادا على قواعد محددة.

اذا سرنا من اليمين الى اليسار ونزولا على الاقطار نحصل على تعريف للضرب القطري لـ $\sum$ أ$_{ن}$ وَ $\sum$ ب$_{ن}$ وهو المتسلسلة:

$\sum$ د$_{ن}$ = أ$_{٠}$ ب$_{٠}$ + أ$_{٠}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٠}$ + أ$_{٠}$ ب$_{٢}$ + أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{٢}$ ب$_{٠}$ + . . .

لاحظ انه لا يوجد اقواس في الضرب القطري.والمجاميع الجزئية هي

أ$_{٠}$ ب$_{٠}$ ، أ$_{٠}$ ب$_{٠}$ + أ$_{٠}$ ب$_{١}$ ، أ$_{٠}$ ب$_{٠}$ + أ$_{٠}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٠}$ ، . . . .

وهناك طريقة ضرب اخرى تفيد احيانا، نحصل عليها بوضع اقواس حول حدود كل قطر. تسمى هذه العملية عملية الضرب الكوشية لِـ $\sum$ أ$_{ن}$ وَ $\sum$ ب$_{ن}$ وهي معرفة بِـ

$\sum$ حـ$_{ن}$ = (أ$_{٠}$ ب$_{٠}$) + (أ$_{٠}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٠}$) + (أ$_{٠}$ ب$_{٢}$ + أ$_{١}$ ب$_{١}$ + أ$_{٢}$ ب$_{٠}$) + . . .

وبشكل عام فانه لكل ن $\geqslant$ ٠

حـ$_{ن}$ = $\sum_{ر=٠}^{ن}$ أ$_{ر}$ ب$_{ن-ر}$ . . . . (٩)

وبما أننا نحصل على $\sum$ حـ$_{ن}$ بوضع اقواس في $\sum$ د$_{ن}$ فإنه اذا كانت $\sum$ د$_{ن}$ تقاربية فان $\sum$ حـ$_{ن}$ تكون تقاربية (لنفس المجموع)، ويمكن اثبات ان العكس غير صحيح.

وتظهر عملية الضرب الكوشية عند ضرب المتسلسلات الاسية اي متسلسلات على شكل أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ع + أ$_{٢}$ع^{٢} + . . . = $\sum$ أ$_{ن}$ ع^{ن} حيث ع $\in$ $\mathbb{C}$.

فاذا ضربنا متسلسلتين من هذا النوع:

(أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ع + أ$_{٢}$ع^{٢} + . . .) (ب$_{٠}$ + ب$_{١}$ع + ب$_{٢}$ع^{٢} + . . .)

= أ$_{٠}$ ب$_{٠}$ + (أ$_{٠}$ ب$_{١}$ + أ$_{١}$ ب$_{٠}$) ع + . . .

حيث نجمع الحدود التي تحوي ع^{٠} ، ع^{١} ، ع^{٢} ، . . . ،فانناnحصل على حاصل الضرب الكوشي بوضع ع = ١ .

وهناك عملية ضرب اخرى تستحق الذكر وتسمى عملية الضرب المربع، ونحصل عليها بالترتيب التالي:

$أ_٠ ب_٠$	$أ_٠ ب_١$	$أ_٠ ب_٢$	$\cdots$
$أ_١ ب_٠$	$أ_١ ب_١$	$أ_١ ب_٢$	$\cdots$
$أ_٢ ب_٠$	$أ_٢ ب_١$	$أ_٢ ب_٢$	$\cdots$
-	-	-	$\cdots$

لهذا فاننا نعرف حاصل الضرب المربع لِـ $\sum أ_ن$ وَ $\sum ب_ن$ على انه

$$\sum س_ن = (أ_٠ ب_٠) + (أ_٠ ب_١ + أ_١ ب_١ + أ_١ ب_٠) + (أ_٠ ب_٢ + أ_١ ب_٢ + أ_٢ ب_٢ + أ_٢ ب_١ + أ_٢ ب_٠) + \ldots$$

واذا كتبنا $ح_ن = أ_٠ + أ_١ + \ldots + أ_ن$ وَ$م_ن = ب_٠ + ب_١ + \ldots + ب_ن$ وَ$ل_ن = س_١ + س_٢ + \ldots + س_ن$، فان من الواضح ان $ل_ن = ح_ن م_ن$. لهذا فانه اذا كانت $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ تقاربيتين، $ح_ن \leftarrow ح$، $م_ن \leftarrow م$ مثلا فان $ل_ن \leftarrow ح م$. لهذا فان $\sum س_ن$ تقاربية.

لهذا فان كون $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ تقاربيتين يعطي ان حاصل الضرب المربع $\sum س_ن$ تقاربي وكذلك

$$\sum س_ن = (\sum أ_ن)(\sum ب_ن) \qquad \ldots\ldots \qquad (١٠)$$

ونتمنى ان تكون النتيجة المعبر عنها في (١٠) صحيحة لكل نوع من عمليات الضرب لأي متسلسلتين تقاربيتين.

ولكن الحظ فانه يمكن لحاصل الضرب الكوشي لمتسلسلتين تقاربيتين ان يكون متسلسلة تباعدية (بخلاف حاصل الجمع المربع).

المثال ٢٢ .

لنفرض ان $أ_ن = ب_ن = \frac{(-١)^ن}{\sqrt{ن + ١}}$. فتكون $\sum أ_ن = \sum ب_ن$ تقاربية،

وباستخدام اختبار ليبتنس ومن (٩) نحصل على

$$|ح_ن| = \sum_{ر}^{ن} \frac{1}{\sqrt{(ر+1)(ن-ر+1)}} .$$

ولكن اذا كانت $0 \leqslant ر \leqslant ن$ فإن $\sqrt{(ر+1)(ن-ر+1)} \leqslant ن+1$ ، واذن لكل $ن \leqslant 0$ ،

$|ح_ن| \leqslant 1$ لهذا فان $ح_ن \not\to 0$ ومنه $\sum ح_ن$ تباعدية .

نسأل الآن ما هي الشروط التي يجب ان نضعها على المتسلسلتين $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ لكي نضمن ان متسلسلة اي حاصل ضرب هي تقاربية . ونعني باي متسلسلة حاصل ضرب اي اعادة ترتيب حدود لحاصل الضرب القطري

$\sum د_ن = د_0 + د_1 + \ldots$ ، على سبيل المثال $د_1 + د_0 + د_3 + د_2 + د_5 + د_4 + \ldots$.

والتعريف الدقيق هو:

اعادة الترتيب

لنفرض ان $(أ_ن)$ هي متتالية اعداد مركبة ولنفرض ان ق:

$\{0, 1, 2, \ldots\} \leftarrow \{0, 1, 2, \ldots\}$ هو اقتران تقابل اي ان ق تبديلية على الاعداد الصحيحة غير السالبة . نسمي $(أ_{ق(ن)}) = (أ_{ق(0)}, أ_{ق(1)}, \ldots)$ اعادة ترتيب لـ $(أ_ن)$ وكذلك نسمي $\sum أ_{ق(ن)}$ اعادة ترتيب لـ $\sum أ_ن$.

سوف نبين ان التقارب المطلق لِـ $\sum أ_ن$ وَ $\sum ب_ن$ هو شرط كاف لضمان ان اي متسلسلة حاصل ضرب $\sum ص_ن$ تكون ذات تقارب مطلق حيث يكون $\sum ص_ن = (\sum أ_ن)(\sum ب_ن)$.

ولكي نتمكن من برهنة هذه النظرية سوف نبرهن اولا نظرية عن اعادة الترتيب لمتسلسلة ذات تقارب مطلق .

النظرية ١٢ .

لنفرض ان $\sum أ_ن$ ذات تقارب مطلق . اذن اي اعادة ترتيب $\sum أ_{ق(ن)}$ تكون ذات

تقارب مطلق ويكون $\sum$ أ$_{ن}$ = $\sum$ أ$_{ق(ن)}$.

البرهان .

لكل ر ⩾ ٠ من الواضح ان $\sum_{ن=٠}^{ر}$ | أ$_{ق(ن)}$ | ⩽ $\sum_{ن=٠}^{\infty}$ | أ$_{ن}$ | ، اذن $\sum$ | أ$_{ق(ن)}$ | > ∞ . لنأخذ الآن ∈ > ٠ . يوجد مـ = مـ ($\frac{\epsilon}{٢}$) بحيث ان | أ$_{مـ+١}$ | + | أ$_{مـ+٢}$ | + . . . > $\frac{\epsilon}{٢}$.

وكل ن ⩾ ٠ تساوي ق (ر$_{ن}$) لعنصر ما ر$_{ن}$ ⩾ ٠ ،ويمكن ان نختار د ∋ N بحيث ان

{٠ ، ١ ، . . . مـ } ⊂ { ق (٠) ، ق(١)، . . . . ق (د)} . . (١١)

اذن لكل ن > د فان ق (ن) > مـ واذن

| أ$_{ق(٠)}$ + أ$_{ق(١)}$ + . . . + أ$_{ق(ن)}$ − $\sum$ أ$_{ر}$ |

⩽ | أ$_{ق(٠)}$ + . . . + أ$_{ق(ن)}$ − س$_{مـ}$ | + | س$_{مـ}$ − $\sum_{ر=مـ+١}^{\infty}$ أ$_{ر}$ |

⩽ (| أ$_{مـ+١}$ | + | أ$_{مـ+٢}$ | + . . .) + | $\sum$ أ$_{ر}$ |

⩽ ٢ $\sum_{ر=مـ+١}^{\infty}$ | أ$_{ر}$ | > ∈ . . . . (١٢)

والنقطة الهامة هي انه، وباستخدام (١١)، تختصر حدود في أ$_{ق(٠)}$ + . . . + أ$_{ق(ن)}$ − س$_{مـ}$ وتكون الحدود الباقية اكبر من مـ بكثير. وينتج من (١٢) ان $\sum$ أ$_{ق(ر)}$ = $\sum$ أ$_{ر}$ مما يثبت النظرية .

المثال ٢٣ .

نتيجة النظرية ١٢ لا تصـــح في حالة التقارب المشروط . فعلى سبيل المثال ١ − ١ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٣}$ + . . . يمكن اعادة ترتيبه بحيث نأخذ اعدادا موجبة كافية مجموعها اكبر

من ٢ ، مثلا $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}$ ثم نتبعها بـ -١ . اذن $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} - ١ >$ ١ . ثم نأخذ اعدادا موجبة اخرى مجموعها اكبر من $\frac{٣}{٢}$ مثلا $\frac{١}{٥} + \frac{١}{٦} + \ldots + \frac{١}{٣٢}$ ثم نتبعها بـ $-\frac{١}{٢}$. اذن $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} - ١ + \frac{١}{٥} + \ldots + \frac{١}{٣٢} - \frac{١}{٢} >$ ٢ . ونستمر بهذه الطريقة ونعيد ترتيب $١ - ١ + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} + \ldots$ بحيث ان المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة الجديدة والذي حده الاخير $-\frac{١}{ن}$ يكون اكبر من ن . اذن تكون المتسلسلة الجديدة تباعدية .

هذا المثال هو عبارة عن حالة لنظرية لريمان تنص على انه اذا كانت $\sum أ_ن$ ذات تقارب مشروط فانه يمكن اعادة ترتيبها بحيث تكون المتسلسلة الناتجة تباعدية ، أو تتقارب لأي عدد نريده

نعود الآن لعملية ضرب المتسلسلات .

النظرية ١٣ .

اذا كانت كل من $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ ذات تقارب مطلق ، فان اي متسلسلة حاصل ضرب $\sum ص_ن$ ، تكون ذات تقارب مطلق حيث يكون $\sum ص_ن = (\sum أ_ن)(\sum ب_ن)$

البرهان .

من التعريف $\sum ص_ن = \sum د_{ق(ن)}$ ، لتبديل ما ، ق ، على { ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . }.

حيث $\sum د_ن$ هو حاصل الضرب القطري . من الواضح ان

$$\sum_{ن}^{م} |د_ن| \leqslant (\sum_{ن}^{\infty} |أ_ن|)(\sum_{ن}^{\infty} |ب_ن|).$$

لكل م $\geqslant$ ٠ ، واذن $\sum |د_ن|$ تقاربية ، ومنه $\sum د_ن$ تقاربية .

نعيد ترتيب $\sum$ د$_ن$ لنحصل على متسلسلة الضرب المربع، ولكن دون اقواس، اي ان $\sum$ م$_ن$ = أ$_٠$ ب$_٠$ + أ$_٠$ ب$_١$ + أ$_١$ ب$_١$ + أ$_١$ ب$_٠$ + ... فمن النظرية ١٢ نعلم ان $\sum$ م$_ن$ ذات تقارب مطلق وَ $\sum$ م$_ن$ = $\sum$ د$_ن$. وبوضع اقواس في $\sum$ م$_ن$ لنحصل على $\sum$ س$_ن$ لا يتغير المجموع. لهذا فان $\sum$ د$_ن$ = $\sum$ م$_ن$ = $\sum$ س$_ن$. ولكن $\sum$ أ$_ن$، $\sum$ ب$_ن$ تقاربيتان. اذن من (١٠) نحصل على $\sum$ د$_ن$ = $\sum$ س$_ن$ = ($\sum$ أ$_ن$) ($\sum$ ب$_ن$) مما يثبت النظرية.

نتيجة.

اذا كانت كل من $\sum$ أ$_ن$، $\sum$ ب$_ن$ ذات تقارب مطلق فان حاصل الضرب الكوشي $\sum$ حـ$_ن$ ذو تقارب مطلق وكذلك $\sum$ حـ$_ن$ = ($\sum$ أ$_ن$) ($\sum$ ب$_ن$).

المثال ٢٤.

لنرمز للمتسلسلة الاسية بالرمز سا (ع) = $\sum \frac{ع^ن}{ن!}$. من مثال ١٧ نعلم ان هذه المتسلسلة ذات تقارب مطلق، لجميع قيم ع $\in$ $\mathbb{C}$. لنأخذ اي ع ، م $\in$ $\mathbb{C}$ ولنطبق النتيجة

$\sum$ حـ$_ن$ = (سا (ع)) (سا (م)) حيث

$$حـ_ن = \sum_{ر=٠}^{ن} \frac{ع^ر}{ر!} \frac{م^{ن-ر}}{(ن-ر)!} = \frac{١}{ن!} \sum_{ر=٠}^{ن} \frac{ن!\, ع^ر م^{ن-ر}}{ر!\,(ن-ر)!} = \frac{(ع+م)^ن}{ن!}،$$

من نظرية ذات الحدين. ولكنّ سا (ع + م) = $\sum \frac{(ع+م)^ن}{ن!}$ لهذا فقد اثبتنا نظرية هامة بالنسبة للاقتران الاسي وهي ان

سا (ع + م) = سا (ع) · سا (م).

وهذا تعميم هام لنتيجة النظرية ١٣ وينسب الى ميرتنس.

النظرية ١٤ [ميرتنس]

اذا كانت $\sum$ أ$_{ن}$ ذات تقارب مطلق وكانت $\sum$ ب$_{ن}$ تقاربية (ليست بالضرورة ذات تقارب مطلق). فان متسلسلة حاصل الضرب الكوشي تكون تقاربية ويكون

$$\sum حـ_{ن} = (\sum أ_{ن}) (\sum ب_{ن}).$$

البرهان.

لنكتب ح$_{ن}$ = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ + . . . + أ$_{ن}$ ، م$_{ن}$ = ب$_{٠}$ + ب$_{١}$ + . . . + ب$_{ن}$، ل$_{ن}$ = حـ$_{٠}$ + حـ$_{١}$ + . . . + حـ$_{ن}$. كذلك نكتب ح = $\sum$ أ$_{ن}$، م = $\sum$ ب$_{ن}$. الآن

$$حـ_{٠} = أ_{٠} ب_{٠}$$

$$حـ_{١} = أ_{٠} ب_{١} + أ_{١} ب_{٠}.$$

$$حـ_{ن} = أ_{٠} ب_{ن} + أ_{١} ب_{ن-١} + . . . + أ_{ن} ب_{٠}.$$

باضافة الحدود عموديا نحصل على

$$ل_{ن} = أ_{٠} م_{ن} + أ_{١} م_{ن-١} + . . . + أ_{ن} م_{٠}$$

$$= \sum_{ر=٠}^{ن} أ_{ر} م_{ن-ر} = \sum_{ر=٠}^{ن} أ_{ر} (م_{ن-ر} - م + م)$$

$$= م ح_{ن} + \sum_{ر=٠}^{ن} أ_{ن-ر} (م_{ر} - م) \quad . . . . \quad (١٣)$$

الآن م ح$_{ن}$ ← م ح (ن ← ∞). لهذا فاننا نريد ان نثبت ان نهاية الحد الثاني في (١٣) هي الصفـر: لاي ∈ > ٠ يوجـد مـ = مـ (∈) بحيث ان |م$_{ر}$ − م| < ∈ لكـل ر > مـ. كذلك يوجد ن$_{٠}$ بحيث ان |أ$_{ر}$| + |أ$_{ر+١}$| + . . . + |أ$_{ر+د}$| < ∈ لكل ر > ن$_{٠}$ ، د ≥ ٠. وبما ان م$_{ر}$ − م ← ٠ فان |م$_{ر}$ − م| < ك لكل ر ≥ ٠، لهذا فان ن > مـ + ن$_{٠}$ تعطي ان

$$\sum_{ر=٠}^{ن} |أ_{ن-ر}| |م_{ر} - م| = \sum_{ر=٠}^{مـ} |أ_{ن-ر}| |م_{ر} - م| + \sum_{ر=مـ+١}^{ن} |أ_{ن-ر}| |م_{ر} - م|$$

$$\leqslant ك \sum_{ر=٠}^{م} |أ_{ن-ر}| + \epsilon \sum_{ر=م+١}^{ن} |أ_{ن-ر}|$$

$$\leqslant \epsilon ك + \epsilon \sum_{ر=٠}^{\infty} |أ_ر| \ldots\ldots \qquad (١٤)$$

ولكن ك، $\sum |أ_ر|$ عددان ثابتان ولا يعتمدان على ن، ϵ لهذا فان (١٤) تعطي ان نهاية الحد الثاني في (١٣) هي الصفر. وهذا يثبت نظرية (ميرتنس).

تمارين ٥ ـ ٣

(تجد في اخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ جد $\sum أ_ن$، $\sum ب_ن$ بحيث ان $\sum حـ_ن$ تقاربية ولكن $\sum د_ن$ تباعدية.

٢ ـ اذا كانت $(ع_ن) \ni$ تق فاثبت ان اي اعادة ترتيب $(ع_{ق(ن)}) \ni$ تق ونها $ع_ن =$ نها $ع_{ق(ن)}$

٣ ـ جد مجموع $-٣^{-١} + ١ + ٣^{-٢} - ٣^{-٣} + ٣^{-٤} + ٣^{-٦} - ٣^{-٥} + \ldots$

٤ ـ لنرمز لمجموع $١ - ٢^{-١} + ٣^{-١} - ٤^{-١} + \ldots$ بالرمز س. اعد الترتيب لتحصل على $\sum ب_ن = ١ - ٢^{-١} + ٤^{-١} + ٣^{-١} - ٦^{-١} - ٨^{-١} + ٥^{-١} - \ldots$ بحيث ان كل حد موجب يتبعه حدان سالبان. بدراسة $م_{٣ن}$، $م_{٣ن+١}$، $م_{٣ن+٢}$ اثبت ان $\sum ب_ن = \frac{س}{٢}$.

٥ ـ اذا كانت $(أ_{ن_ر})$ متتالية جزئية من $(أ_ن)$ فاننا نعرف $\sum أ_{ن_ر} = أ_{ن_١} + أ_{ن_٢} + \ldots$ على انها متسلسلة جزئية من $\sum أ_ن = أ_١ + أ_٢ + \ldots$. اثبت ان المتسلسلة $\sum أ_ن$ تكون ذات تقارب مطلق اذا وفقط اذا كانت كل متسلسلة جزئية، تقاربية.

٦ ـ اثبت ان متسلسلة الضرب الكوشي للمتسلسلتين التباعديتين $٣ + ٣ + ٣^٢ + ٣^٣ + ٣^٤ +$

. . . وَ-٢ + ٢ + $٢^٢$ + $٢^٣$ + $٢^٤$ + . . . هي ذات تقارب مطلق.

٧ - اوجد مجموع المتسلسلة $\sum$ (ن + ١) $ع^{ن}$ = ١ + ٢ع + . . . حيث | ع | < ١.

٨ - اذا كان | ع | < ١ فاثبت ان

$$(ع + \frac{ع^٢}{٢} + \frac{ع^٣}{٣} + \ldots)(١ - ع)^{-١} = \sum_{ن=١}^{\infty} (١ + \frac{١}{٢} + \ldots + \frac{١}{ن}) ع^{ن}.$$

٩ - اثبت انه لكل ع ∈ $\mathbb{C}$ تكون المتسلسلتان س (ع) = ع − $\frac{ع^٣}{٣!}$ + $\frac{ع^٥}{٥!}$ − . . . وَ

ص(ع) = ١ − $\frac{ع^٢}{٢!}$ + $\frac{ع^٤}{٤!}$ − . . . ذات تقارب مطلق. باخذ حاصل الضرب الكوشي،

اثبت ان $[\text{س (ع)}]^٢ + [\text{ص (ع)}]^٢ = ١$. لاحظ ان الجيب وجيب التمام يحققان هذه المتطابقة.

١٠ - اعط مثالا لـ أ ∈ $ل^١$ وب ∈ ٧ بحيث ان متسلسلة حاصل الضرب الكوشي $\sum$ $حـ_{ن}$ ليست ذات تقارب مطلق. هل يناقض هذا نظرية ميرتنس؟

١١ - لنفرض ان $أ_{ن} = ب_{ن} = (-١)^{ن} (ن + ١)^{-a}$ حيث a ∈ Q . ضع شروطا على a تتضمن ان متسلسلة حاصل الضرب الكوشي تقاربية.

١٢-لاقتران زيتا، ز، اثبت ان $ز^٢ (a) = \sum_{ن=١}^{\infty} د(ن) ن^{-a}$ لكل a > ١ حيث د (ن) هو عدد عوامل ن بما فيها ١ ، ن.

١٣ - لـ | ع | < ١، أوجد مجموع

$$١ + \sum_{ن=١}^{\infty} (ن + ١ + \frac{ن}{١!} + \frac{(ن - ١)}{٢!} + \ldots + \frac{١}{ن!}) ع^{ن}.$$

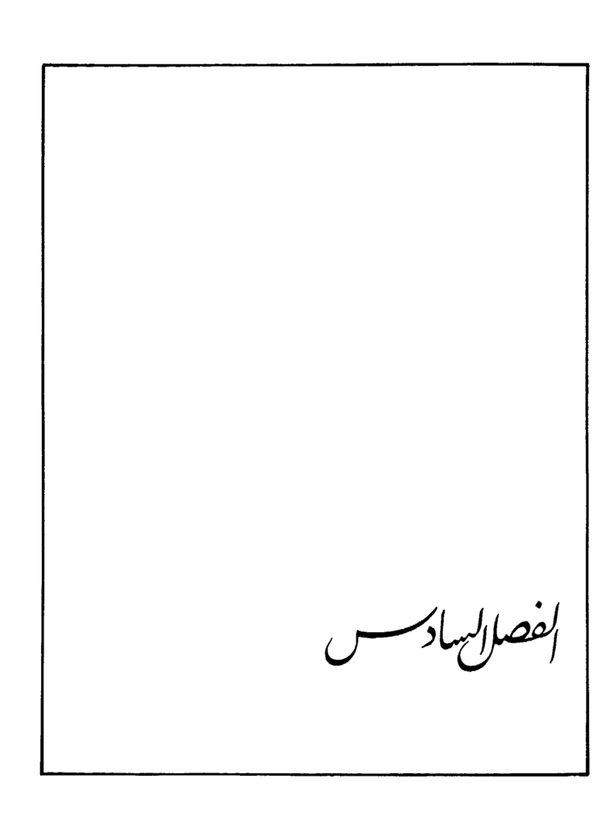
هل تكون المتسلسلة تقاربية لـ | ع | ≤ ١ ؟

١٤ - اذا كان $أ_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{ن + ١}$ فاثبت ان حاصل الضرب الكوشي لـ $\sum أ_{ن}$ في نفسها يحقق

$$ح_ن = \frac{٢(-١)^ن}{ن + ٢} \left(١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \ldots + \frac{١}{ن + ١}\right).$$

اثبت كذلك ان $\sum$ $ح_ن$ تقاربية.

١٥ ـ لنفرض ان $\sum$ $أ_ن$ متسلسلة اعداد مركبة. اثبت ان $\sum$ $أ_ن$ تكون ذات تقارب مطلق اذا وفقط اذا كانت كل متسلسلة تحصل باعادة الترتيب تقاربية [استخدم النظرية ١٢ ونظرية ريمان المذكورة بعد المثال ٢٣].



الفصل السادس

النهايات والاتصال

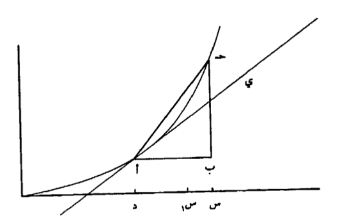
١ . نهاية الاقتران عند نقطة

اهتم الاغـريق القـدامى ونجحـوا في اعطـاء البنـاء الهنـدسي لمماسات منحنيات مثل الدائرة والقطـع النـاقص واللولب . فسنفـترض معـرفة بدائية بفكرة المماس للمنحنى عند نقطة عليه . ولسوء الحظ فان معظم تعريفات المماس المعطاة في كتب الهندسة القديمة لا معنى لها . واعتقد ان التعـريف الـوحيـد المعقول للمماس يعتمد على التحليل . ولكن ، من اجل خلق الحافز ، لا ضرر من اللجوء الى الافكار الهندسية .

كانت طريقة التفكير في المنحنيات في القرن السابع عشر تقوم على ان المنحنيات معطاة بصيـغ أو معـادلات مثـل ص = س^{٢} ، وهي معادلة القطع المكافيء . وقد اهتم ليبنتس في ايجاد صيـغ ميـل المـماس للمنحنى على كل نقطـة عليـه . امـا اسحق نيـوتن مخترع ومطـور فكـرة

التفاضل، فكان مهتما في المسائل التي تتعلق بالنهايات في نسبة التغير وقد جابهها في نظريته عن الحركة والجاذبية.

لنأخذ القطع المكافيء ص = $س^2$ ولنحاول ايجاد ميل المماس عند س = د. في الرسم نفترض ان د > ٠.



لنأخذ س > د ونفترض ان أ = (د ، $د^2$)، حـ = (س ، $س^2$) هما نقطتان على القطع المكافيء كما هو مبين. فمن التعريف فان ميل الوتر أ حـ هو

$$\frac{حـ ب}{أ ب} = \frac{س^2 - د^2}{س - د} = س + د \text{ لأن } س > د.$$

افترض الآن ان س تقترب من د، وقد اصبحت عند $س_1$، ولنأخذ النقطة المقابلة $حـ_1$ = ($س_1$ ، $س_1^2$) على المنحنى. فميل الوتر الجديد هو $س_1$ + د. وكلما اقتربت س من د وبقيت اكبر من د لنقل س = $س_ن$ اصبح ميل أ $حـ_ن$ هو $س_ن$ + د، وهذا المقدار يقترب من ٢د. فاذا تخيلنا متتالية ما ($س_ن$) بحيث ان $س_ن$ ← د (ن ← ∞)، $س_ن$ > د فان ميل أ $حـ_ن$ يقترب من ٢د (ن ← ∞). فمن الطبيعي ان نعتبر ان ٢ د هو ميل المماس أ ي. لاننا نفكر في أ ي انه الخط المعرف بنهاية الاوتار أ $حـ_ن$. ويمكن تطبيق نفس الطريقة لقيم س < د.

بقي ان نبين بدقة اكثر ان:

$\frac{س^٢ - د^٢}{س - د} \leftarrow$ ٢ د (عندما س $\leftarrow$ د) . . . . (١)

نريد ان تقترب الكمية $\frac{س^٢ - د^٢}{س - د}$ من ٢ د عندما تقترب س من د بحيث تبقى س $\neq$ د.

وبدقة اكثر نريد ان يكون لكل $\epsilon >$ ٠ يوجد عدد حقيقي $\delta >$ ٠ بحيث ان ٠ $<$ |س - د| $< \delta$ تعطي $\left|\frac{س^٢ - د^٢}{س - د} - ٢ د\right| < \epsilon$ ، فالشرط ٠ $<$ |س - د| $< \delta$ يتضمن ان س $\neq$ د.

في الحالة التي ندرسها خذ $\delta = \epsilon$. اذا كان $\epsilon >$ ٠ و $\epsilon = \delta$ فان ٠ $<$ |س - د| $< \epsilon$ تعطي س $\neq$ د ولهذا فان

$$\left|\frac{س^٢ - د^٢}{س - د} - ٢ د\right| = |س + د - ٢ د| = |س - د| < \epsilon .$$

وقبل اعطاء التعريف الدقيق لنهاية الاقتران عند نقطة نعطي مثالين توضيحيين.

المثال ١.

لنأخذ منحنى المعادلة التكعيبية ص = س^٣. فلأي د $\in R$ نحصل على $\frac{س^٣ - د^٣}{س - د} \leftarrow$ ٣ د^٢ (س $\leftarrow$ د). لنحاول برهنة ذلك اعتمادا على تعريف (ϵ ، δ) المعطى بعد (١) وبعد استبدال س^٢ ، د^٢ بـ س^٣، د^٣. لأي س ، د نحصل على (س - د) (س^٢ + س د + د^٢) = س^٣ - د^٣ ، ولهذا فان ٠ $<$ |س - د| تعطي

$$\left|\frac{س^٣ - د^٣}{س - د} - ٣ د^٢\right| = |س^٢ - د^٢ + د (س - د)|$$

$$\leq |س - د| (|س + د| + |د|)$$

$$\leq |س - د| (|س - د| + ٣ |د|) \quad . . . . . \quad (٢)$$

لأن $|$ س + د $|$ = $|$ س − د + ٢د $|$ ⩽ $|$ س − د $|$ + ٢ $|$ د $|$. يتضح من (٢) كيف نختار δ .

لانه اذا كان ϵ > ٠ يمكن اختيار δ = أص { ١ ، $\frac{\epsilon}{١ + ٣ |د|}$ } . اذن ٠ > $|$ س − د $|$ > δ تعطي ان القيمة في (٢) أقل من δ (١ + ٣ $|$ د $|$) > ϵ .

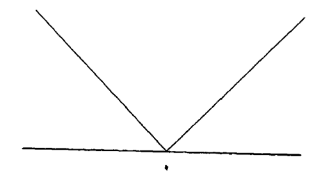
وبلغة هندسية فان ميل المماس لِـ ص = س^٣ عند (د ، د^٣) هو ٣ د^٢ .

المثال ٢ .

مهما يكن ما يعنيه الفرد بكلمة منحنى ، فقد يوجد منحنيات لا مماس لها عند نقطة ما . فاذا اتفقنا على ان ص = $|$ س $|$ تمثل منحنيا فان لا يوجد مماس له عند س = ٠ .

لنفرض ان امكن انه يوجد مماس للمنحنى ص = $|$ س $|$ عند (٠ ، ٠) وميله م اي افترض ان $\frac{|س|}{س}$ ← م (س ← ٠). خذ ϵ = ١، اذن يوجد δ > ٠ بحيث ان ٠ > $|$ س $|$ > δ تعطي $|$ $\frac{|س|}{س}$ − م $|$ > ١ .فباخذ س = $\frac{\delta}{٢}$ نحصل على $|$ ١ − م $|$ > ١ وباخذ س = − $\frac{\delta}{٢}$ نحصل على $|$ −١ − م $|$ > ١ . اذن وبكتابة ٢ = $|$ (١ − م) − (−١ − م) $|$ وبتطبيق المتباينة المثلثية نحصل على ٢ ⩽ $|$ ١ − م $|$ + $|$ −١ − م $|$ > ٢ وهذا تناقض .

وعدم وجود مماس عند (٠ ، ٠) يتضح ايضا «هندسيا» من مخطط ص = $|$ س $|$:



والتعريف التالي تحليلي محض ولا يعتمد على اي فكرة هندسية :

نهاية الاقتران عند نقطة : لتكن سه مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ وافترض ان ق : سه ← $\mathbb{C}$.
افترض كذلك ان أ نقطة تراكم لـ سه . اذن نقول انه يوجد لـ ق نهاية عند أ اذا وفقط اذا كان يوجد م ∋ $\mathbb{C}$ بحيث انه لكل ϵ > ٠ يوجد δ = δ (أ ، ϵ) > ٠ بحيث ان س ∋ سه وَ ٠ < | س - أ | < δ تعطي | ق (س) - م | < ϵ .

نسمي م نهاية ق عند أ، ونكتب ق (س) ← م (س ← أ) أو نهاس←أ ق (س) = م .
وايضا نقول ان ق (س) تقترب من م عندما تقترب س من أ .

يمكن تطبيق هذا التعريف على الاقترانات الحقيقية المعرفة على مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$.

والسبب في افتراض ان أ نقطة تراكم للمجموعة سه هو لضمان وجود س ∋ سه بحيث ان ٠ < | س - أ | < δ لكل δ > ٠ .

ومن المهم ان نلاحظ ان أ، بصورة عامة، لا يلزم ان تكون عنصرا في سه ، وليس من الضروري ان يكون الاقتران ق معرفا عند أ . كما انه، بصورة عامة، لا يوجد علاقة بين م ، ق (أ) عندما تكون أ ∋ سه .

وقد ذكرنا في التعريف δ = δ (أ ، ϵ) للدلالة على ان δ تعتمد بصورة عامة على كل من أ ، ϵ ، وهذا واضح من المثال ١ .

المثال ٣ .

لتكن سه = (-١ ، ١) ⊇ $\mathbb{R}$ ، وعرف ق : سه ← $\mathbb{R}$ بـ ق (س) = ٠ اذا كانت س ≠ ٠ وَق (٠) = ١ . فيكون ق (س) ← ٠ (س ← ٠)، كما سنبين. وفي هذه الحالة فان نهاية ق عند ٠ موجودة ولكنها لا تساوي ق (٠) .

لاثبات ذلك لاحظ ان ٠ ∋ سهَ . افرض ان ϵ > ٠ وخذ δ = ١ . اذن س ∋ سه وَ ٠ < | س | < ١ تعطي س ≠ ٠ وَ| س | < ١، اذن | ق (س) | = | ٠ | < ϵ .

المثال ٤ .

لتكن ق : (٠ ، ١) ⟵ R معرفة بـ ق (س) = س . اذن ق (س) ⟵ ١ عندما س ⟵ ١ . لأن ١ ∋ (٠ ، ١)^ت ، واذا كان ∈ > ٠ نأخذ δ = ∈ . اذن س ∋ (٠ ، ١) وَ ٠ > |س - ١| > δ تعطي |ق (س) - ١| = ١ - س > ∈ .

المثال ٥ .

لنأخذ المثال الاصلي ص = س٢ . خذ اي د ∋ R وعرف سٍ = { س ∋ R | س ≠ د } اي ان سٍ هي R بدون النقطة د . اذن د نقطة تراكم لِـ سٍ . لهذا اذا عرفنا ق : سٍ ⟵ R بـ ق (س) = $\frac{س^٢ - د^٢}{س - د}$ نحصل على ق (س) ⟵ ٢ د (س ⟵ د) .

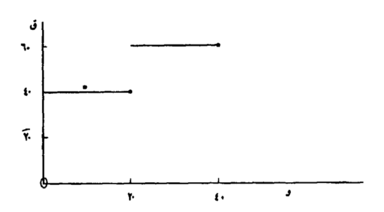
المثال ٦ [اقتران مكتب البريد]

اذا كان وزن رسالة مساويا ، او اقل من ، قيمة معينة ، فان تكلفة ارسالها بالبريد تبلغ قيمة ما محددة . واذا زاد وزنها عن تلك القيمة فان تكلفتها تزيد وتبقى التكلفة ثابتة الى ان يصل الوزن الى قيمةاخرى محددة . وكذلك تزيد التكلفة مع الزمن .

ففي زمن ما كان الاقتران ق : { الوزن بالغرام } ⟵ { التكلفة بالفلوس } معرفا كالتالي : ق (و) = ٤٠ اذا كان ٠ > و ≥ ٢٠ وَق (و) = ٦٠ اذا كان ٢٠ > و ≥ ٤٠ . نتوقع طبعا ان ق (٠) = ٠ . ولنفرض ان مكتب البريد يرفض الرسائل التي يزيد وزنها عن ٤٠ غراما .

ولنهمل وزن الطوابع لانها تزيد من وزن الرسالة مما يؤدي الى زيادة التكلفة .

فالصورة كما في الشكل :



اذا كانت سه = (٠ ، ٤٠) فانـه من السهـل ان نرى ان ق : سه ← { التكـاليف } لانهاية لها عند ٢٠ . ولكن اذا كانت سه = (٢٠ ، ٤٠) فان ق : سه ← { التكاليف } لها نهاية عند ٢٠ ، وفي الحقيقة ان ق (و) ← ٦٠ (و ← ٢٠) . يبين هذا المثال ان وجود النهاية قد يعتمد على مجال الاقتران .

المثال ٧ .

عرف ق : R ← R' بـ ق (س) = ٠ اذا كان س عددا نسبيا وق (س) = ١ اذا كان س عددا غير نسبي . ان محاولة رسم مخطط لهذا الاقتران عديمة الجدوى. ولكن نقول على سبيل التقريب ان ق تقفز الى اعلى والى اسفل باستمرار عندما تتحرك س على الخط الحقيقي .

سوف نثبت انه لا يوجد نهاية لِـ ق عند اي نقطة أ $\in R$ ، فلنفرض ان امكن انه يوجد أ $\in R$ بحيث ان ق (س) ← م (س ← أ). خذ ϵ = ١، اذن يوجد δ > ٠ بحيث ان ٠ < | س - أ | < δ تعطي | ق (س) - ق (أ) | < ١ . اذا كان أ $\in Q$ فاننا نختار عددا غير نسبي س ∈ (أ ، أ + δ)، لهذا فان | ق (س) - ق (أ) | = ١ . واذا كان أ $\in Q'$ فاننا نختار عددا نسبيا س في (أ ، أ + δ)، لهذا فان | ق (س) - ق (أ) | = ١ . ففي الحالتين نحصل على تناقض .

والنتيجة التالية تصف ق (س) ← م (س ← أ) بدلالة المتتاليات .

النظرية ١.

ق (س) ← م (س ← أ) اذا وفقط اذا كان ق (س ن) ← م (ن ← ∞) لجميع المتتاليات (س ن) في سه التي تحقق س ن ≠ أ، وَس ن ← أ (ن ← ∞).

البرهان.

افرض ان ق (س) ← م (س ← أ). اذن س ∈ سه وَ ٠ < |س - أ| < δ تعطي |ق (س) - م| < ε، لأي ε > ٠. خذ اي متتالية (س ن) كالموصوفة في النظرية (يوجد على الاقل متتالية واحدة مثلها من تعريف نقطة التراكم). الآن يوجد ن٠ = ن٠ (δ) = ن٠ (ε) لأن δ تعتمد على ε ، بحيث ان ٠ < |س ن - أ| < δ لكل ن ≥ ن٠ اذن |ق (س ن) - م| < ε لكل ن ≥ ن٠ اي ان ق (س ن) ← م (ن ← ∞).

وبالعكس افترض ان ق (س ن) ← م (م ← ∞) لجميع المتتاليات (س ن) الموصوفة ولكن افترض ان ق (س) ↛ م (س ← أ). اذن يوجد ε > ٠ بحيث انه لجميع δ > ٠ يوجد س ∈ سه ، ٠ < |س - أ| < δ و |ق (س) - م| ≥ ε .

لتكن ن ∈ N خذ δ = ١/ن . اذن يوجد س ن ∈ سه، ٠ < |س ن - أ| < ١/ن وَ |ق (س ن) - م| ≥ ε . اذن يوجد متتالية (س ن) في سه، س ن ≠ أ، س ن ← أ (ن ← ∞) . ولكن ق (س ن) ↛ م. مما يناقض الفرض. وهذا يثبت النظرية.

نتيجة.

اذا كان لـ ق نهاية عند أ فان هذه النهاية وحيدة.

البرهان.

افرض ان ق (س) ← م١ (س ← أ) وَق (س) ← م٢ (س ← أ). يوجد (س ن) ∈ سه بحيث ان ق (س ن) ← م١ وق (س ن) ← م٢.

إذن ومن النظرية ٢، الفصل ٤ نستنتج أن م١ = م٢

النظرية ٢ .

اذا كان ق (س) ← $م_1$ (س ← أ) و هـ (س) ← $م_2$ (س ← أ) فان ق (س) + هـ(س) ← $م_1$ + $م_2$ (س ← أ)، ق (س) - هـ (س) ← $م_1$ - $م_2$ (س ← أ)، ق (س) هـ (س) ← $م_1$ $م_2$ (س ← أ)، حـ ق (س) ← حـ $م_1$ (س ← أ) لكل حـ ∋ $\mathbb{C}$.

وكذلك اذا كان $م_2$ ≠ ٠ وهـ (س) ≠ ٠ في $س_م$ فان $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ← $\frac{م_1}{م_2}$ (س ← أ).

البرهان .

ينتج هذا مباشرة من التعريف . وبطريقة اخرى يمكن استخدام النظرية ١ مع النتائج المقابلة للمتتاليات في النظرية ٣ في الفصل الرابع .

المثال ٨ .

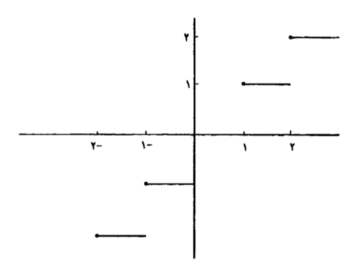
لنفرض ان حـ ، د اعداد مركبة . فيكون

$$ق (ع) = \frac{حـع^2 + دع - ١}{دع^2 - حـع + ١} \leftarrow -١ \quad (ع \leftarrow ٠) \quad . . . . (٣)$$

هذا واحد من الامثلة الشائعة التي لا يعطى بها مجال للاقتران . لهذا فانه لا معنى للحديث عن النهايات هنا . ولكن سنحاول معرفة هل الاقتران معرف على مجموعة والصفر نقطة تراكم لهذه المجموعة . ففي الحقيقة، عندما ع ← ٠ نلاحظ ان $ع^2$ ← ٠، $دع^2$ ← ٠، حسب النظرية ٢ ، لذا فان $دع^2$ - حـع + ١ ← ١ . لهذا فانه يوجد δ > ٠ بحيث ان |$دع^2$ - حـع + ١| > $\frac{١}{٢}$ لكل |ع| < δ . لهذا فان ق معرف على القرص المفتوح قر(٠ ، δ) . ونحصل

على النتيجة ٣ من النظرية ٢ . وبطريقة مشابهة نجد ان $\frac{ع}{١ + ع^٣} \leftarrow \frac{ت - ١}{٢}$ (ع ← ت) .

واحيانا نستخدم في R فكرة النهاية من جهة واحدة . ولنوضح ذلك بمثال : عرف ق : R ← Z بـ ق (س) = [س] اعني اكبر عدد صحيح في س . واليك مخطط ص = [س] موضحا ادناه .



اذا كانت $س_ق$ = R فان $نها_{س ← ٠}$ [س] غير موجودة . ولكن اذا كانت $س_ق$ = (٠ ، ١) وحددنا ق على (٠ ، ١) فان $نها_{س ← ٠}$ [س] = ٠ هذا لان س تقترب من الصفر على القيم الموجبة . وفي هذه الحالة نكتب $نها_{س ← ٠+}$ [س] = ٠ . كذلك نكتب $نها_{س ← ٠-}$ [س] = -١ .

وفي الاقترانات العامة ق وعند وجود النهاية من جهة واحدة فاننا نتحدث عن النهاية اليمنى ق (أ+) والنهاية اليسرى ق (أ-) حيث

ق (أ+) = $نها_{س ← أ+}$ ق (س) وق (أ-) = $نها_{س ← أ-}$ ق (س) .

ولا يتضمن تعريف نهاية الاقتران عند نقطة ، الحالة التي توجد بها متتالية ($ق_ن$) تقارب

نقطـة ما عنـدمـا ن ← ∞ . لهذا يجب وضـع تعـريفات لمعالجة حالات النهايات عند $\pm \infty$ و «النهايات غير المنتهية». والجدول التالي يوضح جميع الاحتمالات للاقترانات الحقيقية.

س ←	أ	أ	أ	∞	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ق (س) ←	م	∞	$-\infty$	م	∞	$-\infty$	م	∞	$-\infty$

لقد عرفنا معنى ق (س) ← م (س ← أ) وهو العمود الاول. وفي العمود الثاني نعرف ق (س) ← ∞ (س ← أ) بقولنا: لاي ل $\in \mathbb{R}$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان س $\in$ سٍ، $0 < |$ س - أ $| < \delta$ تعطي ق (س) $>$ ل.

وباستبدال ق (س) $>$ ل بـ ق (س) $<$ ل نعرف معنى ق (س) ← $-\infty$ (س ← أ).

لنأخذ العمود الرابع: ق (س) ← م (س ← ∞). المشكلة هنا ان ∞ لا تدخل ضمن نقط تراكم مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. ويمكن معالجة هذا بان نقول ان ∞ هي نقطة تجمع لـ سٍ $\subset \mathbb{R}$ اذا وفقط اذا كان لكل ل $\in \mathbb{R}$ ، (ل ، ∞) $\cap$ سٍ $\neq \emptyset$ اي ان كل مجموعة مفتوحة {س $\in \mathbb{R}$ | س $>$ ل } تحوي نقاطا من سٍ.

لهذا اذا كان ق : سٍ ← $\mathbb{R}$ ، ∞ نقطة تجمع لـ سٍ فاننا نعرف ق (س) ← م (س ← ∞) اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد س. = س. (ϵ) بحيث ان س $\in$ سٍ، س $>$ س. تعطي | ق (س) - م | $< \epsilon$.

المثال ٩.

افرض ان ق : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ، اي ان ق متتالية حقيقية. اذا اخذنا ل $\in \mathbb{R}$ فانه يوجد ن $\in \mathbb{N}$ بحيث ان ن $>$ ل (من مسلمـة ارخميـدس). اذن من تعـريفنـا اعلاه فان ∞ هي نقطة تراكم لـ $\mathbb{N}$. فمن الواضح الآن ان التعريف الجديد لـ ق (س) ← م (س ← ∞) يطابق التعريف الاصلي لـ ق (ن) ← م (ن ← ∞)، في الحالة الخاصة التي تكون فيها سٍ = $\mathbb{N}$.

المثال ١٠

ان $\frac{٣س - س^٢}{٢س^٢ - ١} \leftarrow \frac{-١}{٢}$ (س $\leftarrow \infty$)، لان الاقـتـران معـرف على ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ∞) وَس $> \frac{١}{\sqrt{٢}}$ تعطي

$$\frac{٣س - س^٢}{٢ س^٢ - ١} = \frac{\frac{٣}{س} - ١}{٢ - \frac{١}{س^٢}} \leftarrow \frac{-١}{٢} \text{ (س} \leftarrow \infty\text{)}.$$

أما الاعمدة الباقية في الجدول فاننا نتركها للقاريء لكتابة التعريفات لها.

وبالنسبة للاقترانات ق : سِ $\leftarrow \mathbb{C}$ حيث سِ $\subset \mathbb{C}$ فانه يمكن ان نعرف |ق (ع)| $\leftarrow \infty$ (ع $\leftarrow$ أ)؛ ق (ع) $\leftarrow$ م (|ع| $\leftarrow \infty$)؛ |ق (ع)| $\leftarrow \infty$ (|ع| $\leftarrow \infty$).

على سبيل المثال أفرض انه لكل نق $>$ ٠ ان {ع $\in \mathbb{C}$ | |ع| $>$ نق} تحوي نقطة من سِ. اذن ق (ع) $\leftarrow$ م (|ع| $\leftarrow \infty$) اذا وفقط اذا كان لكل $\epsilon >$ ٠ يوجد نق$_٠ >$ ٠ بحيث ان ع $\in$ سِ، |ع| $>$ نق$_٠$ تعطي |ق (ع) - م| $< \epsilon$.

المثال ١١

ان $\frac{ع}{١ + ع^٢} \leftarrow$ ٠ (|ع| $\leftarrow \infty$)، لان |ع| $>$ ١ تعطي |١ + ع^٢| $\geqslant$ |ع^٢| - ١ $>$ ٠، لهذا فان الاقتران معرف على {ع | |ع| $>$ ١} .

لهذا فاذا كان |ع| $> \sqrt{٢}$ فان

$$\left|\frac{ع}{١ + ع^٢}\right| \leqslant \frac{|ع|}{|ع|^٢ - ١} \leqslant \frac{٢}{|ع|} \leftarrow ٠ \text{ (|ع|} \leftarrow \infty\text{)}.$$

تمارين ٦ ـ ١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اذا كان ن $\in N$ فعين ميل المماس لِـ ص = س^{ن} عند (أ ، أ^{ن}).

٢ ـ عرف ق: [٠ ، ∞) ⟵ R بِـ ق (س) = $\sqrt{س}$. استعمل تعريف ($\in$ ، δ) لاثبات ان ق (س) ⟵ $\sqrt{أ}$ (س ⟵ أ) لكل أ $\in$ [٠ ، ∞) . من الافضل عزل الحالة أ = ٠ .

٣ ـ اثبت انه يوجد مماس لِـ ص = $\sqrt{س}$ عند (أ ، $\sqrt{أ}$) لكل أ > ٠، ولكن لا يوجد مماس عند (٠ ، ٠) بمعنى ان $\frac{\sqrt{س}}{س}$ ⟵ ∞ (س ⟵ ٠+). نقول هندسيا ان المماس رأسي، أو ميله ∞ ، ولكن في التحليل فاننا نعتبر فقط المماسات التي ميلها عدد حقيقي منته.

٤ ـ افرض ان ك (ع) = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ع + . . . + أ$_{ن}$ع^{ن} حيث أ$_{٠}$ ، أ$_{١}$ ، . . . ، أ$_{ن}$ اعداد مركبة ثابتة وأ$_{ن}$ ≠ ٠ . نسمي الاقتران ق : $\mathbb{C}$ ⟵ $\mathbb{C}$ حدودية في (ع) درجتها ن.

استخدم النظرية ٢ لاثبات ان ق (ع) ⟵ ق (أ) (ع ⟵ أ).

اذا كان ن ⩾ ١ فاثبت ان | ق (ع) | ⟵ ∞ (| ع | ⟵ ∞)، اي اثبت انه لكل ل > ٠ يوجد ر$_{٠}$ بحيث ان | ق (ع) | > ل لكل | ع | > ر$_{٠}$

٥ ـ عرّف ق : R ⟵ R بـ ق (س) = س − [س]، حيث [س] هو اكبر عدد صحيح في س. ناقش وجـود النهـايـات والنهايات من جهة واحدة لِـ ق عند كل أ $\in$ R . هل تقترب ق (س) من نهاية عندما س ⟵ ∞ ؟

قد يساعد رسم الاقتران قبل محاولة الحل.

٦ ـ عرف ق (س) = $\frac{[س]}{س}$. اثبت ان ق محصـــورة على (٠ ، ∞) اي انـه يوجـد عددان ثابتـــان ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ بحيث ان ل$_{١}$ ⩽ ق (س) ⩽ ل$_{٢}$ لكـــل س > ٠ هل توجـد نها$_{س ⟵ ∞}$ ق (س)

اذا كانت النهـايـة موجـودة جد قيمتها. كذلك ما هي ق (+٠). ارسم بدقة مخطط ص = ق (س) على الفترة (٠ ، ٤].

٧ ـ افرض ان ق : [١ ، ∞) ← R بحيث ان ق (س) ←م (س ← ∞). اثبت ان المتتالية (ق (ن)) = (ق (١)، ق (٢)، . . .) تقاربية الى م. اعط مثالا لاقتران هـ: [١ ، ∞) ← R بحيث ان (هـ (ن)) متتالية صفرية ولكن هـ (س) لا تقترب من نهاية عندما س ← ∞ .

٨ ـ افرض ان ق ، هـ: (٠ ، ١) ← R ، افرض ان أ ∋ (٠ ، ١)،

(١) اثبت ان ق (س) ← م (س ← أ) تعطي | ق (س) | ← | م | (س ← أ).

(٢) اذا كانت نها$_{س ← أ}$ | ق (س) | = ٠. هل تكـون نها$_{س ← أ}$ ق (س) موجـودة؟ اذا كان الجواب بالايجاب ما قيمتها. اثبت جوابك.

(٣) اذا كانـت نها$_{س ← أ}$ ق (س) = ٠ هل تكـون نها$_{س ← أ}$ ق (س) هـ (س) موجـودة بالضرورة؟ اثبت صحة ذلك أو بطلانه.

(٤) اذا كانت نها$_{س ← أ}$ ق (س) = ٠ وكانت هـ محصورة على (٠ ، ١). هل تكون نها$_{س ← أ}$ ق (س) هـ (س) موجودة؟ اذا كان الجواب بالايجاب ما هي قيمتها؟ برهن ذلك.

(٥) اذا كانت نها$_{س ← أ}$ | ق (س) | موجودة وموجبة، هل تكون نها$_{س ← أ}$ ق (س) موجودة بالضرورة؟ برهن.

(٦) اذا كانت نها$_{س ← أ}$ ق (س) = ٠، وَ | ق (س) | > ٠ عندما س ∋ (٠ ، ١)، هل تكون نها$_{س ← أ}$ $\frac{١}{ق (س)}$ موجودة بالضرورة؟ برهن.

٩ ـ في المثال ٧ أعطينا مثالا لاقتران بحيث انه لا توجد نهاية له عند اي نقطة في R . اعط مثالا مع البرهان لاقتران هـ : R ← R لا توجد له نهاية الا عند الصفر.

١٠ ـ اعط مثالا لاقتران ق : R ← R له نهاية عند كل نقطة في R ويحقق ق (س) ← ١ (س ← ١)، ق (س) ← ١ (س ← -١)، ق (س) ← ٠ (س ← ∞)، ق (س) ← ٠ (س ← -∞). هل الاقتران محدود على R .

٢ . الاقترانات الوتيرية

لتكن سہ مجموعة غير خالية وجزئية من R وليكن ق : سہ ← R . نعرف الاقتران الوتيري فنقول ان ق وتيري على سہ اذا كان متناقصا أو متزايدا حيث

(أ) يكون ق متزايدا على سہ اذا وفقط اذا كان ق (س) ≽ ق (ص) عندما يكون س > ص وَس ، ص ∋ سہ.

(ب) يكون ق متناقصا على سہ اذا وفقط اذا كان ق (س) ≼ ق (ص) عندما يكون س ، ص ∋ سہ. وَس > ص.

نعرف «متزايدا فعلا» و «متناقصا فعلا» بتغيير ≽ الى > في (أ) و ≼ الى > في (ب).

المثال ١٢ .

عرف ق : R ← R بـ ق (س) = س^{٣}. ق اقتران متزايد فعلا على R . لاثبات ذلك خذ س ، ص∋ R ، س > ص.(س^{٣} − ص^{٣}) = (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})، وَ هـ (س ، ص) = س^{٢} + س ص + ص^{٢} = (س + $\frac{ص}{٢}$)^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ ص^{٢}. هناك حالتان، ص = ٠ وَص ≠ ٠:اذا كان ص = ٠ فان س > ٠ وَهـ (س ، ص) = س^{٢} > ٠ ومنه س^{٣} − ص^{٣} > ٠ .

اذا كان ص ≠ ٠ فان هـ (س ، ص) ≼ $\frac{٣}{٤}$ ص^{٢} ومنه ايضا س^{٣} − ص^{٣} > ٠ . في الحالتين حصلنا على ق (س) > ق (ص) لهذا فان ق متزايد فعلا على R .

المثال ١٣ .

عرف ق : [٠ ، ١] ← R بـ ق (س) = ١ اذا كان ٠ ≼ س ≼ $\frac{١}{٢}$ وق (س) = ٠

اذا كان $\frac{١}{٢}$ > س ⩾ ١ . من الواضح ان ق متناقص (ليس فعلا) على [٠ ، ١]. لاحظ ان ق «تقفز» عند س = $\frac{١}{٢}$ وان لِـ ق نهايات من جهة واحدة عند $\frac{١}{٢}$ ، اي ان ق ($\frac{١}{٢}$ −) = ١ وق ($\frac{١}{٢}$ +) = ٠ . ومع ذلك فانه لا يوجد لِـ ق نهاية عند $\frac{١}{٢}$.

ان وجود النهايات من جهة واحدة هو من خصائص الاقترانات الوتيرية. والنظرية التالية تعالج الاقترانات المتزايدة. وهناك نتيجة مشابهة في حالة الاقترانات المتناقصة.

النظرية ٣.

اذا كان ق : (أ ، ب) ⟵ R متزايدا على (أ ، ب) فان النهاية اليمنى والنهاية اليسرى ق (س+)، ق (س−) تكونان موجودتين لكل س ∈ (أ ، ب) ويكون ق (س−) ⩽ ق (س) ⩽ ق (س+).

البرهان.

خذ س ∈ (أ ، ب) ولنأخذ المجموعة غير الخالية سِ = { ق (ر) | أ > ر > س } .
اذا كان ص ∈ سِ فان ص = ق (ر) لعنصر ما ر ∈ (أ ، س). بما ان ق متزايدة فان ق (ر) ⩽ ق (س)، لهذا فان ص ⩽ ق (س) لكل ص ∈ سِ. ومن مسلمة الحاصر الاعلى نستنتج انه يوجد اصغر حاصر اعلى م لِـ س ، م ⩽ ق (س).

سوف نثبت ان م = ق (س−) حيث

ق (س −) = $\underset{ص \leftarrow س^-}{\text{نها}}$ ق (ص) . . . . (٤)

لاثبات ذلك خذ ∈ > ٠ فبما ان م هي اصغر حاصر اعلى لِـ سِ فانه يوجد ر. ∈ (أ ، س) بحيث ان م − ∈ > ق (ر.) ⩽ م.

لنأخذ δ = س − ر. > ٠. اذن س − δ > ص > س تعطي ق (ر.) ⩽

ق(ص)، لهذا فان م -ϵ < ق (ر) ≥ ق (ص) ≥ م < م + ϵ ، اي ان | ق (ص) - م | < ϵ ، مما يثبت (٤). وبطريقة مشابهة نثبت ان ق (س) ≥ ق (س+) حيث ق (س+) = ك.ح.د { ق (ر) | س < ر < ب } . وهكذا اثبتنا النظرية.

وهناك فكرة «تزايد الاقتران عند نقطة» وهذه سوف نستخدمها في النظرية ١٢ من البند ٣ من الفصل ٧. اما الآن فسوف نعطي تعريف التزايد الفعلي عند نقطة ما. ونحصل على تعريف التناقص الفعلي باجراء التغييرات المناسبة في المتباينات.

التزايد الفعلي عند نقطة.

افرض ان ق : (أ ، ب) ⟵ R وافرض ان حـ ∈ (أ ، ب). نقول ان ق متزايد فعلا عند حـ اذا وفقط اذا كان يوجد فترة ك (حـ ، نق) بحيث انه لكل س ∈ ك (حـ ، نق) يكون ق (س) < ق (حـ) اذا كان س < حـ وكان ق (س) > ق (حـ) اذا كان س > حـ.

ملاحظة.

يمكن للاقتران ان يكون متزايدا فعلا عند نقطة دون ان يكون متزايدا فعلا في اي فترة تحوي تلك النقطة. فعلى سبيل المثال عرف ق : (-١ ، ١) ⟵ R بـ ق (س) = س اذا كان س عددا نسبيا وق (س) = س^{٣} اذا كان س عددا غير نسبي. اذن ق (٠) = ٠ وق (س) < ٠ اذا كان س < ٠ ، ق (س) > ٠ اذا كان س > ٠ ، اذن ق متزايد فعلا عند الصفر ولكن اذا كانت (أ ، ب) فترة تحوي الصفر واخذنا حـ عددا نسبيا بحيث ان ٠ < حـ < أ ص { ١ ، ب }
فان حـ < حـ$^{\frac{١}{٣}}$. لنأخذ الآن س عددا غير نسبي بحيث ان حـ < س < حـ$^{\frac{١}{٣}}$. اذن س^{٣} < حـ، أي ان ق (س) < ق (حـ) مع ان حـ < س. اذن ق ليس متزايدا فعلا على (أ ، ب).

تمارين ٦ ـ ٢

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ عرف ق : R ⟵ R بـ ق (س) = $س^{٣}$ − ٣س + ١ . عين الفترات $ف_{١}$ ، $ف_{٢}$ ، $ف_{٣}$ حيث $ف_{١} \cup ف_{٢} \cup ف_{٣}$ = R وحيث ان ق متزايد على $ف_{١}$ و$ف_{٣}$ ومتناقص على $ف_{٢}$.

٢ ـ افرض ان ق : [أ ، ب] ⟵ متزايد فعلا على [أ ، ب]. اثبت ان الاقتران النظير $ق^{-١}$ موجود وهو ايضا متزايد فعلا في مجاله .

٣ ـ اعط مثالا لاقتران ق : [٠ ، ٢] ⟵ R بحيث يكون واحدا لواحد ولا يكون وتيريا .

٤ ـ اذا كان ق ، هـ اقترانين متزايدين على [٠ ، ١]. هل من الضروري ان تكون الاقترانات التالية متزايدة (أ) ق + هـ ، (ب) ق − هـ ، (حـ) ق هـ؟

٥ ـ اذا كان ق متزايدا على (أ ، ب) وكان أ < س < ص < ب فاثبت ان ق (س+) ⩽ ق (ص−).

٦ ـ لنفرض ان ق : [أ ، ∞) ⟵ متزايدة . اثبت ان (أ) اذا كان ق محصورا من اعلى فان ق (س) تقترب من نهاية ما عندما س ⟵ ∞ ، (ب) اذا كان ق غير محصور فان ق (س) ⟵ ∞ (س ⟵ ∞).

٧ ـ افرض ان ق : R ⟵ R اقتران له الخاصية الجمعية، اي ان ق (س + ص) = ق (س) + ق (ص) لكل س ، ص ∈ R . اذا كان ق متزايدا على R فاثبت ان ق (س) ⟵ ٠ (س ⟵ ٠).

٨ ـ افرض ان ق متناقص على [أ ، ب] وافرض ان{$س_{٠}$، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، . . . ، $س_{ن}$ } هي مجموعة نقط تحقق أ = $س_{٠}$ < $س_{١}$ < . . . < $س_{ن}$ = ب. عين عدداً م بحيث ان

$$\sum_{ر=١}^{ن} |ق (س_{ر}) - ق (س_{ر-١})| \leqslant م$$

٩ ـ افرض ان م ∈ R^{+} جد اقترانامتناقصاًق:(٠ ، ١) ⟵ R ومجموعة نقاط { $س_{٠}$ ، $س_{١}$ ، . . . ، $س_{ن}$ } حيث ٠ < $س_{٠}$ < $س_{١}$ < . . . < $س_{ن}$ < ١ بحيث ان

$$\sum_{ر=١}^{ن} |ق (س_{ر}) - ق (س_{ر-١})| > م .$$

٣ . الاقترانات المتصلة

ان مفهوم الاتصال من اهم مفاهيم التحليل والتبولوجيا واكثرها فائدة فان يكن عند القاريء افكار بدائية عن الموضوع فيستحسن ان نترك مثل هذه الافكار جانبا الى ان ندرس التعريف الرسمي لها بالتفصيل . فعلى سبيل المثال يقال احيانا ان الاقتران المتصل هو الاقتران الذي يمكن رسم مخططه دون رفع القلم عن الورقة . هذا اغراق في التحديد لانه يتطلب ان يكون مجال الاقتران فترة (مترابطة بمعنى ما)على اي حال فان التحليل لا يتعلق برسم المخططات ، مهما كانت هذه مفيدة أو مساعدة في دعم الحلول المنطقية أو الايحاء بها .

ان جزءا كبيرا من التعريف التالي مشترك مع تعريف نهاية الاقتران عند نقطة ، وعلى القاريء ان يلاحظ الفرق بعناية .

الاقتران المتصل

لنفرض ان سِ مجموعة جزئية غير خالية في ℂ ، وان ق : سِ ← ℂ . نعتبر ق متصلا عند أ ∋ سِ اذا وفقط اذا كان لكل ε > ٠ يوجد δ = δ (أ ، ε) > ٠ بحيث ان س ∋ سِ ، | س − أ | > δ تعطي | ق (س) − ق (أ) | > ε .

ونعتبر ق متصلا على سِ اذا وفقط اذا كان ق متصلا عند كل نقطة في سِ .

ويمكن تطبيق هذا التعريف على الاقترانات ذات القيم الحقيقية والمعرفة على مجموعات جزئية من R .

المثال ١٤ .

عرف ق : R ← R بـ ق (س) = س^{٢} . لنبرهن ان ق متصل على R . خذ اي أ ∋ R وافرض ان ε > ٠ . الآن | ق (س) − ق (أ) | = | (س − أ) (س + أ) | وكذلك | س + أ |

$\geqslant$ | س - أ | + ٢ | أ | . فاذا أخذنا δ = أص { ١ ، $\frac{\epsilon}{1 + 2|أ|}$ } فان | س - أ | $>$ δ تعطي | ق (س) - ق (أ) | $>$ ϵ .

اذن ق متصل على R .

المثال ١٥ .

ليكن ق : N ⟵ $\mathbb{C}$ اي اقتران . فيكون ق متصلا على N ، كما سنبرهن . وقد يبدو هذا غير محتمل من نظرة بديهية ولكنه يبين سعة تعريفنا المعتمد .

لنأخذ اي أ $\in$ N وأي $\epsilon > 0$ ولنأخذ δ = ١ . فاذا كان س $\in$ N ، | س - أ | $<$ ١ فان س = أ . وهذا يعطي ق (س) = ق (أ) ومنه | ق (س) - ق (أ) | $<$ ϵ . اذن ق متصل على أ . لاحظ انه تم اختيار δ بحيث لا تعتمد على ϵ او أ وهذه حالة نادرة جدا .

المثال ١٦ .

عرف ق : $\mathbb{C}$ ⟵ R بـ ق (ع) = | ع | . اذن ق متصل على $\mathbb{C}$ لانه اذا كان أ $\in$ $\mathbb{C}$ ، $\epsilon > 0$ فان | ع - أ | $<$ ϵ تعطي | ق (ع) - ق (أ) | $\leqslant$ | | ع | - | أ | | $\leqslant$ | ع - أ | $<$ ϵ . لاحظ اننا استخدمنا النظرية ٢٠ من الفصل ٢ .

والنتيجة التالية تعرف الاتصال بدلالة المجموعات المفتوحة وهي اساس تعريف الاتصال في الفضاءات التبولوجية . ولن نستخدم هذا التعريف في برهنة النظريات اللاحقة ويستطيع القاريء اذا رغب ان يحذفه .

النظرية ٤ .

يكون الاقتران ق : $\mathbb{C}$ ⟵ $\mathbb{C}$ اقترانا متصلا اذا وفقط اذا كان اصل الصورة لكل

مجموعة مفتوحة هو مجموعة مفتوحة ايضا .

البرهان .

لنفرض ان ق متصل على $\mathbb{C}$ كما عرفناه . ولنأخذ اي مجموعة مفتوحة ح $\subset \mathbb{C}$. فاذا كان ق$^{-1}$ (ح) $= \varnothing$ فان ق$^{-1}$ (ح) مفتوحة ، حسب النظرية ٦ الفصل ٣ . وإذا كان ق$^{-1}$ (ح) $\neq \varnothing$ خذ ع$_0$ $\in$ ق$^{-1}$ (ح)، اذن ق (ع$_0$) $\in$ ح . وبما ان ح مفتوحة فانه يوجد قر(ق (ع$_0$)، ϵ) $\subset$ ح . ومن اتصال ق فانه يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان ع $\in$ قر(ع$_0$ ، δ) تعطي ق (ع) $\in$ قر(ق (ع$_0$) ، ϵ) $\subset$ ح . من هذا ينتج ان قر(ع$_0$ ، δ) $\subset$ ق$^{-1}$ (ح)، واذن ق$^{-1}$ (ح) مفتوحة .

وبالعكس افرض ان ق$^{-1}$ (ح) مفتوحة لكل ح مفتوحة ، اذن ق$^{-1}$ (قر(ق (ع$_0$)، ϵ)) مفتوحة لكل ع$_0$ $\in \bar{\mathbb{C}}$ ولكل $\epsilon > ٠$ اذن يوجد

قر(ع$_0$ ، δ) $\subset$ ق$^{-1}$ (قر(ق (ع$_0$) ، ϵ)) . . . . . . (٥)

لهذا اذا كان $|$ع $-$ ع$_0|$ $< \delta$ فان ع $\in$ قر(ع$_0$ ، δ) ومنه ق (ع) $\in$ قر(ق (ع$_0$)، ϵ) من (٥)، وهذا يعطي $|$ق (ع) $-$ ق (ع$_0$)$|$ $< \epsilon$. اذن ق متصل على كل نقطة ع$_0$ $\in \mathbb{C}$.
وهذا يثبت النظرية .

النظرية ٥ .

افرض ان ق:[أ ، ب] $\rightarrow$ R . يكون ق متصلا على [أ ، ب] اذا وفقط اذا كان ق (س) $\rightarrow$ ق (حـ) (س $\rightarrow$ حـ) لكل حـ $\in$ [أ ، ب].

البرهان .

لنفرض ان ق متصل على حـ $\in$ [أ ، ب]. حـ نقطة تجمع لـ[أ ، ب]،واذا كان $\epsilon > ٠$ فانه يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان س $\in$ [أ ، ب] و$|$س $-$ حـ$|$ $< \delta$ تعطي $|$ق (س) $-$ ق

|ق (س) - ق (حـ)| < ∈ . اذن س ∋ [أ ، ب] و ٠ < | س - حـ | < δ تعطي | ق (س) - ق (حـ)
< ∈ ، لهذا فان ق (س) ← ق (حـ) (س ← حـ) .

وبالعكس، افرض ان ق (س) ← ق (حـ) (س ← حـ) لكل حـ ∋ [أ ، ب]. فاذا كان ∈ > ٠ فانه يوجد δ > ٠ بحيث ان س ∋ [أ ، ب]، ٠ < | س - حـ | < δ تعطي | ق (س) - ق (حـ) | < ∈ . ولكن س = حـ تعطي | س - حـ | = | ق (س) - ق (حـ) | = ٠ . اذن س ∋ [أ ، ب] و | س - حـ | < δ تعطي | ق (س) - ق (حـ) | < ∈ اذن ق متصل على حـ . وهذا يتمم البرهان.

سوف ندرس الآن البناء الجبري للاقترانات المتصلة. افرض ان سي مجموعة غير خالية جزئية من ℂ وَق ، هـ اي اقترانين من سي الى ℂ . تعرف الاقترانات ق + هـ، أ ق، ق هـ، | ق | ، $\frac{١}{ق}$ على سه كما يلي (تتحقق جميع المعادلات لكل س ∋ س):

(ق + هـ) (س) = ق (س) + هـ (س)

(أ ق) (س) = أ ق (س) لكل أ ∋ ℂ .

(ق هـ) (س) = ق (س) هـ (س)

| ق | (س) = | ق (س) |

$\frac{١}{ق}$ (س) = $\frac{١}{ق (س)}$ على شرط ان ق (س) ≠ ٠ .

والنتيجة التالية تعالج اتصال توافيق بسيطة لاقترانات متصلة.

النظرية ٦.

افرض ان سه مجموعة غير خالية، جزئية من ℂ وافرض ان ق ، هـ اقترانان متصلان على سه . اذن لأي ب ، حـ ∋ ℂ يكون

(١) ب ق + حـ هـ متصل على سي .

(٢) | ق | متصل على سه .

(٣) $\frac{1}{ق}$ متصل على س بشرط ان ق (س) ≠ ٠ لكل س ∋ سه .

(٤) الاقـتران المتصـل لاي اقـتران متصل هو اقتران متصل اي انه اذا كان هـ متصلا على س وكان ق متصلا على هـ (سي) فان ق ० هـ يكون متصلا على سي .

البرهان .

سوف نبرهن (١) ، (٤) ونترك (٢) ، (٣) كتمارين . لنأخذ اي أ ∋ سي و $\in$ > ٠ . بما ان ق متصل على أ فانه يوجد δ_1 بحيث ان س ∋ سي و | س - أ | < δ_1 تعطي | ق (س) - ق (أ) | < $\frac{\in}{٢ (١ + |ب|)}$. وبشكل مشابه فان اتصال هـ على أ يعطي | هـ (س) - هـ (أ) | < $\frac{\in}{٢ (١ + |حـ|)}$ لكل س ∋ سي و | سي - أ | < δ_2 لعنصر ما δ_2 > ٠ . فاذا اخذنا δ = أ صَ { δ_1 ، δ_2 } فان س ∋ سي و | س - أ | < δ تعطي؛

| (ب ق - حـ هـ) (س) - (ب ق - حـ هـ) (أ) | ⩽ | ب ق (س) - ب ق (أ) | + | حـ ق (س) - حـ ق (أ) | ⩽ $\frac{\in |ب|}{٢ (١ + |ب|)}$ + $\frac{\in |حـ|}{٢ (١ + |حـ|)}$ < $\in$ ، وهذا يثبت اتصال ب ق + حـ هـ عند أ . ولاثبات اتصال ق هـ عند أ نكتب:

(ق هـ) (س) - (ق هـ) (أ) = ق (س) { هـ (س) - هـ (أ) }+ هـ (أ) { ق (س) - ق (أ)}

= (ق (س) - ق (أ) + ق (أ)){ هـ (س) - هـ (أ) } + هـ (أ) { ق (س) - ق (أ) } . . (٦)

الآن | ق (س) - ق (أ) | < ١ اذا كان | س - أ | < δ_1 وكذلك | ق (س) - ق (أ) | <

$\frac{\epsilon}{2(1+|هـ(أ)|)}$ اذا كان | س − أ | > $\delta_{\text{٢}}$. كذلك | هـ (س) − هـ (أ) | >
$\frac{\epsilon}{2(1+|ق(أ)|)}$ اذا كان | س − أ | > $\delta_{\text{٣}}$. لهذا اذا كان س ∋ سِ و | س − أ | > δ =
أصغر { δ_1 ، δ_2 ، δ_3 } فان (٦) تعطي | (ق هـ) (س) − (ق هـ) (أ) | > ∈ . اذن ق هـ
متصل عند أ مما يثبت (١).

ولاثبات (٤) خذ أ ∋ سِ ، ∈ > ٠ . الآن هـ (أ) ∋ هـ (سِ) وَق متصل على
هـ(أ)، اذن يوجد δ_1 بحيث ان ص ∋ هـ (سِ) وَ| ص − هـ (أ) | > δ_1 تعطي | ق (ص) −
ق (هـ (أ)) | > ∈ .

ولكن هـ متصل على أ . اذن يوجد δ = δ (δ_1) > ٠ بحيث ان س ∋ سِ وَ| س −
أ | > δ تعطي | هـ (س) − هـ (أ) | > δ_1 . اذن ص = هـ (س) ∋ هـ (سِ) وَ| ص − هـ(أ) |
> δ_1 وهذا يعطي | ق (هـ (س)) − ق (هـ (أ)) | = | (ق ∘ هـ) (س) − (ق ∘ هـ) (أ)|
> ∈ ، اذن ق ∘ هـ متصل على أ .

نتيجة .

اذا كانت م (سِ) هي مجموعة جميع الاقترانات المتصلة ذات القيم المركبة على سِ فان م (سِ) تكون جبرية تبديلية مركبة ذات عنصر محايد .

البرهان .

اذا كان ق ، هـ ∋ م (سِ) وب ، حـ ∋ ℂ فان النظرية ٦ (أ) تعطي ان ب ق + حـ هـ ∋ م (سِ)، وهكذا فان عمليتي الجمع والضرب العدديتين هما عمليتان ثنائيتان على م (سِ) .

واذا كان ل ∋ م (سِ) فان لكل س ∋ سِ ، حسب تعريف ق + هـ وخاصية التجميع لعملية الجمع في ℂ ينتج ان:

(ق + (هـ + ل)) (س) = ق (س) + (هـ + ل) (س)

= ق (س) + (هـ (س) + ل (س)) = (ق (س) + هـ (س)) + ل (س)

= (ق + هـ) (س) + ل (س) = ((ق + هـ) + ل) (س).

اذن ق + (هـ + ل) = (ق + هـ) + ل اي ان عملية الجمع على م (س) تجميعية. الآن (ق + هـ) (س) = ق (س) + هـ (س) = هـ (س) + ق (س) = (هـ + ق) (س)

واذن ق + هـ = هـ + ق اي ان عملية الجمع تبديلية. والصفر في (م (س) ، +) هو الاقتران المتصل θ المعرف بان θ (س) = ٠ لكل س ∈ س لأن (ق + θ) (س) =

ق (س) + θ (س) = ق (س) لكل س ∈ س وإذن ق + θ = ق

ونظير ق هو بالطبع -ق . وهكذا اثبتنا ان (م (س)، +) هي زمرة تبديلية.

وبنفس الطريقة نتأكد من ان م (س) تحقق الشروط الباقية للجبريات التبديلية. فعلى سبيل المثال، اذا كان ق ، هـ ∈ م (س) فان ق هـ ∈ م (س) من النظرية ٦. لهذا فان عملية الضرب هي عملية ثنائية على م (س).

والعنصر المحايد في م (س) هو الاقتران المتصل مـ المعرف بـ مـ (س) = ١ لكل س ∈ س لان (مـ ق) (س) = مـ (س) ق (س) = ق (س) لكل س ∈ س لهذا فان مـ ق = ق .

وهذا يثبت النتيجة.

المثال ١٧ .

كل حدودية ك (ع) = أ. + أ$_1$ ع + . . . + أ$_ن$ ع^ن تعرف اقترانا متصلا ك : $\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$.

لاثبات ذلك عرف ق. (ع) = أ. ، ق$_1$ (ع) = ع لكل ع ∈ $\mathbb{C}$ واضح ان ق. ، ق$_1$ هما اقترانان متصلان على $\mathbb{C}$ ، اذن ق. + أ$_1$ ق$_1$ هو اقتران متصل على $\mathbb{C}$ من النظرية ٦. الآن ق. + أ$_1$ ق$_1$، أ$_2$ ق$_1^2$ هما إقترانان متصلان على $\mathbb{C}$. اذن ق. + أ$_1$ ق$_1$ + أ$_2$ ق$_1^2$ هو اقتران متصل على $\mathbb{C}$ ، وبشكل عام ترى ا ن ك متصل على $\mathbb{C}$.

من الواضح ايضا ان الحدوديات الحقيقية، اي التي يكون بها أ. ، . . . ، أ$_ن$ وَس أعدادا حقيقية، هي ايضا متصلة على R .

كذلك من النظرية ٦، نرى ان اي اقتران نسبي $\frac{ك}{ل}$ ، حيث ك ، ل حدوديتان، هو ايضا اقتران متصل على كل نقطة ع ∋ ℂ ، بشرط ان ل (ع) ≠ ٠. على سبيل المثال $\frac{١ - ع}{١ + ع^٢}$ يعرف اقترانا متصلا على ℂ ، باستثناء ع = ت ، ع = -ت. لاحظ ان $\frac{١ - س}{١ + س^٢}$ يعرف اقترانا متصلا على R لان ١ + س^٢ ≠ ٠ لكل س ∋ R .

المثال ١٨.

اذا كان ل : R ← R معرفا بـ ل (س) = $\left|\frac{س^٣ - ١}{١ + س^٢}\right|$ ، فان ل يكون متصلا على R . لاثبات ذلك نأخذ ق (س) = | س | و هـ (س) = $\frac{س^٣ - ١}{١ + س^٢}$. من المثال ١٧ فان الاقتران النسبي هـ متصل على R . كذلك ق متصل على R . لهذا فانه متصل على هـ (R) ⊂ R . اذن ومن النظرية ٦، نستنتج ان ل = ق ∘ هـ هو اقتران متصل على R .

ان التعريف العام للاتصال يسمح لـ سِ ان تكون اي مجموعة غير خالية جزئية من ℂ . ولكن اذا حددنا سِ بحيث تكون مجموعة محصورة ومغلقة فاننا نحصل على نتيجة هامة بالنسبة للاقترانات المتصلة التي تأخذ قيما حقيقية. قبل اثبات هذه النتيجة ندون ملاحظتين.

أولا، القول ان ق : سِ ← R (أو ℂ) محصور على سِ يعني ان ق (سِ) مجموعة محصورة اي انه يوجد م > ٠ بحيث ان | ق (س) | ≤ م لكل س ∋ سِ.

ثانيا، القول ان ق : سِ ← R يأخذ قيما حاصرة يعني انه يوجد س. ، ص. ∋ سِ بحيث ان ق (س.) = ص.ح.ع { ق (س) | س ∋ سِ } وق (ص.) = ك.ح.د{ ق (س) | س ∋ سِ } . اذن اذا كان ق يأخذ قيما حاصرة، فانه يوجد قيم عظمى وصغرى له. وللاختصار سنكتب ص.ح.ع (ق) وك.ح.د (ق) عندما يكون واضحا ان ق معرف على مجموعة ما.

النظرية ٧.

لنفرض ان سِ مجموعة جزئية مغلقة ومحصورة في $\mathbb{C}$ وافرض ان ق : سِ ← R متصل على سِ . إذن ق محصور على سِ ويأخذ قيماً حاصرة .

البرهان.

لنفرض ان امكن ان ق غير محصور على سِ. لنأخذ اي ن $\in$ N . اذا كان |ق (س)| $\leqslant$ ن لكل س $\in$ سِ يكون ق محصورا على سِ. اذن يوجد س ن $\in$ سِ بحيث ان |ق (س ن) | > ن . اذن يوجد متتالية (س ن) في سِ وهي محصورة لان سِ محصورة.

ومن النظرية ٨، الفصل ٤، يوجد متتالية جزئية س ن ر ← س (ر ← ∞). ومن النظرية ٩، الفصل ٣، ينتج ان س $\in$ $\bar{\text{سِ}}$ ، ولكن سِ مغلقة اذن سِ = $\bar{\text{سِ}}$ ومنه س $\in$ سِ

ق متصل على س $\in$ سِ ، فبأخذ ϵ = ١ فانه يوجد δ > ٠ بحيث ان ص $\in$ سِ وَ |ص - س| < δ تعطي |ق (ص) - ق (س)| < ١. ولكن |س ن ر - س| < δ لكل ر $\geqslant$ ر١ ، لأن س ن ر ← س ، اذن |ق (س ن ر) - ق (س)| < ١ لكل ر $\geqslant$ ر١ . اذن

ن ر < |ق (س ن ر)| < ١ + |ق (س)| لكل ر $\geqslant$ ر١ . . .   (٧)

من (٧) نحصل على ان ١ < $\frac{\text{١ + |ق (س)|}}{\text{ن ر}}$ لكل ر $\geqslant$ ر١. وعندما ر ← ∞ نحصل على ١ $\leqslant$ ٠ . وهذا التناقض يبين ان ق يجب ان يكون محصورا على سِ.

وبما ان ق محصور فانه يوجد م = ص.ح.ع ق (س) من مسلمة الحد الاعلى. اذن ق (س) $\leqslant$ م لكل س $\in$ سِ. افرض، ان امكن، ان ق (س) < م لكل س $\in$ سِ. اذن م - ق (س) > ٠ على سِ وَ م - ق متصل على سِ فمن النظرية ٦ (حـ) نحصل على أن $\frac{\text{١}}{\text{م - ق}}$ متصل على سِ ومن الجزء الأول من نظريتنا الحالية، فإنه يوجد م* > ٠، بحيث ان ٠ < $\frac{\text{١}}{\text{م - ق (س)}}$ $\leqslant$ م* لكل س $\in$ سِ، ومن هذا نحصل

على ق (س) $\geqslant$ م − $\frac{1}{م}$ لكل س $\in$ سى. ولكن هذا يناقض ان م هو اصغر حاصر اعلى لـ ق (سى).

اذن من الخطأ ان نعتبر ان ق (س) $<$ م لكل س $\in$ سى، اذن يوجد س. $\in$ سى بحيث ان ق (س.) = م.

وبنفس الطريقة يوجد ص. $\in$ سى بحيث ان ق (ص.) = لكحد ق (س).

فقد تم اثبات النظرية.

ومن الواضح ان نتيجة النظرية ٧ صحيحة للمجموعات الجزئية المغلقة المحصورة في R.

وبشكل خاص اذا كان ق : [أ ، ب] ⟵ R حيث [أ ، ب] فترة مغلقة ومحصورة في R فان ق يكون محصورا ويأخذ قيمةُ الحاصرة في [أ ، ب].

المثال ١٩.

اذا حذفنا كلمة محصورة أوكلمة مغلقة من نص النظرية ٧ فقد تصبح النتيجة خطأ. وعلى سبيل المثال، $\bar{\mathbb{C}}$ مغلقة وغير محصورة وق : $\mathbb{C}$ ⟵ R المعرف بـ ق (ع) = | ع | متصل على $\mathbb{C}$ ولكن غير محصور على $\bar{\mathbb{C}}$. كذلك الفترة المفتوحة (٠ ، ١) محصورة في $\mathbb{C}$ ولكن غير مغلقة. والاقتران ق : (٠ ، ١) ⟵ R المعرف بـ ق (س) = $\frac{1}{س}$ متصل على (٠ ، ١) ولكن غير محصور على (٠ ، ١).

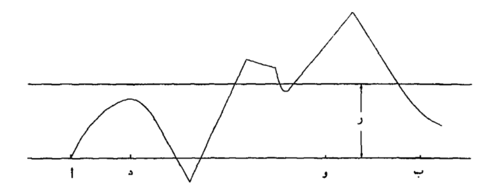
والنظرية التالية عليها مسحة بديهية وتعبر عن فكرة (بقاء القلم على الورقة) المذكورة في اول البند بالنسبة للاقتران المتصل. وهي مثل نظرية ٧ تعتمد على كون ق متصلا على نوع معين من المجموعات؛ في هذه الحالة على فترة مغلقة في R .

النظرية ٨ [نظرية القيم الوسطى للاقترانات المتصلة].

اذا كان ق : [أ ، ب] ⟵ R متصلا على [أ ، ب] ، فان ق تأخذ كل قيمة بين اي قيمتين لها.

البرهان.

علينا ان نثبت انه اذا كان د، و في [أ ، ب] وكان ر عددا بين ق (د) وَق (و) فانه يوجد حـ ∈ [أ ، ب] بحيث ان ق (حـ) = ر. والشكل التالي يوضح احد الاوضاع الممكنة



في هذا المثال يوجد في الحقيقة اربع نقط حـ بحيث ان ق (حـ) = ر، وثلاث منها في [د ، و].

لبرهنة ذلك سنفرض ان د < و، ق (د) < ق (و) وَق (د) < ر < ق (و). وبطريقة مماثلة تعالج الحالات الأخرى مثل د > و وَق (و) < ق (د).

لنأخذ سه = { س ∈ [د ، و] | ق (س) ≥ ر }. اذن ق (د) < ر تعطي د ∈ سه. لهذا فان سه ≠ ∅ وسه محصورة من اعلى بـ و. اذن من مسلمة الحاصر الاعلى نستنتج انه يوجد ص.ح.ع سه = حـ ، لهذا فان د ≤ حـ ≤ و.

نريد ان نثبت ان ق (حـ) = ر، لاثبات ذلك افرض ان امكن ان ق (حـ) ≠ ر. اذا كان ق (حـ) < ر فان حـ ≠ و. من اتصال ق على حـ وباخذ ε = ر − ق (حـ) فانه يوجد δ > ٠ بحيث ان | ق (س) − ق (حـ) | < ε عندما يكون س ∈ (حـ ، حـ + δ) ⊂ [د ، و]. اذن ق (س) < ر لكل س ∈ (حـ ، حـ + δ). وباخذ س = حـ + $\frac{\delta}{2}$ نحصل على ق (س) < ر، اذن س ∈ سه ومنه س ≤ حـ = ص.ح.ع سه مما يناقض δ > ٠.

واذا كان ق (حـ) < ر فان حـ ≠ د. ومن اتصال ق عند حـ فانه يوجد δ > ٠ بحيث ان:

ق (س) $>$ ر لكل س $\in$ (حـ - δ ، حـ) $\subset$ [د ، و] . . . . (٨)

ومن تعريف اصغر حاصر علوي فانه يوجد ص $\in$ سى بحيث ان حـ - δ $<$ ص $\leqslant$ حـ.
اذن ص $\in$ سى تعطي ق (ص) $\leqslant$ ر. ولكن من (٨) حـ - δ $<$ ص $\leqslant$ حـ تعطي ان ق (ص) $>$ ر ، اذن ر $<$ ق (ص) $\leqslant$ ر، وهذا تناقض. اذن ق (حـ) = ر وفي الحقيقة، لقد أثبتنا ان د $<$ حـ $<$ و. وهذا يثبت النظرية.

تمكننا هذه النظرية من اعطاء برهان سهل جدا لوجود الجذر النوني (راجع النظرية ٢ ، البند ٣).

المثال ٢٠

لكل ن $\in$ N وأ $>$ ٠ يوجد ص $>$ ٠ وحيدة بحيث ان ص^{ن} = أ. لاثبات ذلك خذ الاقتران ق (س) = س^{ن}. الآن ق (١ + أ) = (١ + أ)^{ن} $\leqslant$ ١ + ن أ $>$ أ. لهذا فان ق (٠) $<$ أ $<$ ق (١ + أ). ولكن ق متصل على [٠ ، ١ + أ]، لهذا، وباستخدام النظرية ٨، فانه يوجد ص $\in$ (٠ ، ١ + أ) بحيث ان ق (ص) = أ، اي ان ص^{ن} = أ. وبمثل ما سبق يتم اثبات ان ص وحيدة.

المثال ٢١

اذا استبدلنا [أ ، ب] في النظرية ٨ بمجموعة اخرى فان الاستنتاج قد يكون خطأ. على سبيل المثال، اذا كانت سى هي اتحاد [٠ ، ١] و[٢ ، ٣] وق (س) = س، فان ق متصل على سى. ق (١) $<$ $\frac{٣}{٢}$ $<$ ق (٢) ولكن ق (س) $\neq$ $\frac{٣}{٢}$ لكل س $\in$ سى.

سوف ندرس الآن طريقة تفيد احيانا في التحليل العددي.

التنصيف المكرر

نظرية القيم الوسطى للاقترانات المتصلة هي الاساس في ايجاد جذور الاقترانات الحقيقية بالطرق العددية. على سبيل المثال، اذا كان ق اقترانا متصلا، وكان ق (أ) $<$ ٠ $<$

ق (ب)، فانه يوجد حـ ∈ (أ ، ب) بحيث ان ق (حـ) = ٠، اي انه يوجد صفر للإقتران بين أ وَب. اي ان حـ هي جذر للمعادلة ق (س) = ٠ . ومع اننا نعلم انه يوجد حـ حيث ق (حـ) = ٠، بين أ وَب ، الا اننا لا نعلم قيمته العددية. لايجاد قيمة تقريبية لِـ حـ فاننا ننصف [أ ، ب] وندرس قيم ق على نقطة المنتصف د = $\frac{أ + ب}{٢}$. واذا كان ق (د) = ٠، وهذا ممكن، ولكن مستبعد في الحالات العملية، فاننا نكون قد وجدنا صفر الاقتران د. واذا كان حـ ≠ د فانه اما ان يكون ق (د) > ٠ عندها وبما ان ق (أ) < ٠ فان نظرية القيم الوسطى تنص على انه يوجد صفر في (أ ، د). واما اذا كان ق (د) < ٠ فانه يوجد صفر في (د ، ب). لهذا فقد عرفنا ان الصفر موجود في احد نصفي الفترة [أ ، ب]. بتنصيف الفترة التي وجدنا بها الصفر، وتكرار ذلك، يمكن حساب قيمة الصفر لاي درجة من الدقة. ومع ان هذه الطريقة طويلة في العادة، لكن بساطتها تجعل بالامكان استخدامها في اجهزة الحاسب الالكتروني.

عمليا، وقبل البدء في العمليات الحسابية، يكون من الافضل رسم مخطط دقيق للاقتران ق (س) = ص على فترة ما ثم نختار [أ ، ب] بحيث يكون الصفر فيها وحيدا، ان امكن ذلك.

وقبل اعطاء مثال عددي، سوف نبرهن نظرية تتعلق باصفار الحدوديات. وهي تتعلق باصفار الحدوديات ذات القيم المركبة، لهذا فهي تصح على الحدوديات الحقيقية كحالة خاصة. ويجب ان نتذكر انه يمكن للحدودية الحقيقية ان يكون لها اصفار مركبة مثل $س^٣ - س^٢ + س - ١$ فاصفارها هي ١ ، ت ، −ت.

النظرية ٩.

افرض ان ع ، $أ_١$ ، . . . ، $أ_ن$ اعداد مركبة. وافرض ان ك (ع) = $ع^ن + أ_١ ع^{ن-١} + . . . + أ_ن$ = ٠، اي ان ع هو صفر للحدودية ك : $\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}$. اذن $|ع| \leqslant ١ + م$ حيث م = أكـ $\{|أ_١| ، . . . ، |أ_ن|\}$.

البرهان.

يكفي ان نثبت ان $|\text{ع}| > 1 + \text{م}$ تعطي $|\text{ك}(\text{ع})| > 0$. فمن المتباينة المثلثية نحصل على

$$|\text{ك}(\text{ع})| \geqslant |\text{ع}|^{\text{ن}} - |\text{أ}_1|\,|\text{ع}|^{\text{ن}-1} - \ldots - |\text{أ}_{\text{ن}}|$$

$$\geqslant |\text{ع}|^{\text{ن}} - \text{م}\left(|\text{ع}|^{\text{ن}-1} + \ldots + 1\right)$$

$$= |\text{ع}|^{\text{ن}} - \text{م}\,\frac{|\text{ع}|^{\text{ن}} - 1}{|\text{ع}| - 1}$$

لكن $|\text{ع}| > 1 + \text{م}$ تعطي ان

$$(|\text{ع}| - 1)\,|\text{ع}|^{\text{ن}} - \text{م}\left(|\text{ع}|^{\text{ن}} - 1\right) > \text{م}\,|\text{ع}|^{\text{ن}} - \text{م}\left(|\text{ع}|^{\text{ن}} - 1\right) = \text{م} \geqslant 0$$ ، اذن

$|\text{ك}(\text{ع})| > 0$ مما يثبت النظرية.

المثال ٢٢.

استخدم طريقة التنصيف المكرر لايجاد جذور $\text{ك}(\text{س}) = \text{س}^3 - \text{س} + 1 = 0$ لثلاث منازل عشرية.

من النظرية ٩ نرى انه اذا كان س جذرا للمعادلة فان $|\text{س}| \leqslant 2$. اذن تقع الجذور في $[-2 ، 2]$. $\text{ك}(-2) = -5$، $\text{ك}(-1) = 1$، بما ان ك متصل، اذن يوجد جذر حـ في $(-2 ، -1)$. ومن السهل اثبات ان حـ وحيد وان $\text{ك}(\text{س}) > 0$ لكل $\text{س} \geqslant -1$، اذن حـ هو الجذر الحقيقي الوحيد. وهناك جذران آخران مركبان (انظر التمرين ٦ ـ ٣). وبتطبيق التنصيف واستخدام ثلاث منازل عشرية في التقريب نحصل على ما يلي (تركنا بعض الخطوات المتوسطة):

س :	٢-	١-	١,٥٠٠-	١,٢٥٠-	١,٣٢٤-	١,٣٢٦-	١,٣٢٥-
ق (س) :	٥-	١	٠,٨٧٥-	٠,٢٩٧	٠,٠٠٣	٠,٠٠٥-	٠,٠٠١-

اذن -١,٣٢٥ > حـ > -١,٣٢٤، اذن -١,٣٢٤ هو الجذر الحقيقي مقربا لثلاث منازل عشرية.

ويمكن استخدام نظرية القيم الوسطى في:

الاقتران العكسي

لنأخذ مثالا بسيطا لتوضيح الفكرة. افرض ان ٠ ⩽ أ > ب وَص : [أ ، ب] ⟵ R معطى بـ ص (س) = س^{٢}. اذن ص متزايد فعلا على [أ ، ب]، ومتصل. كذلك لاي ص ∋ [ص (أ) ، ص (ب)] يوجد س وحيدة في [أ ، ب] بحيث ان ص = س^{٢} أوس = $\sqrt{ص}$.
من الواضح ان الاقتران هـ المعرف بـ هـ (ص) = $\sqrt{ص}$ هو متزايد فعلا. والسؤال هنا هو: هل هـ متصل؟ اي هل الاقتران النظير متصل؟ في هذه الحالة من السهل اثبات ان هـ متصل على [أ^{٢} ، ب^{٢}] إثباتاً مباشرا.

والنظرية التالية تعالج الحالة العامة.

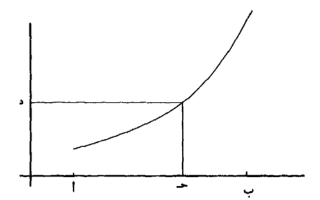
النظرية ١٠

افرض ان ق : [أ ، ب] ⟵ R متزايد فعلا ومتصل على [أ ، ب]. اذن يوجد لِـ ق اقتران عكسي ق$^{-١}$: [ق (أ) ، ق (ب)] ⟵ R بحيث ان ق$^{-١}$ متزايد فعلا ومتصل على [ق (أ) ، ق (ب)].

وهناك نتيجة مشابهة بالنسبة للاقترانات المتناقصة فعلا.

البرهان.

الرسم التوضيحي التالي يساعد في فهم الفكرة



بما أن ق متزايد فعلا فانه تبايني (واحد لواحد). واذا كان ق (أ) $\geqslant$ د $\geqslant$ ق (ب)، فانه يوجد حـ $\in$ [أ ، ب] بحيث ان ق (حـ) = د من نظرية القيم الوسطى. اذن ق شامل، وبما انه تبايني، اذن هناك إقتران ق$^{-1}$: [ق (أ) ، ق (ب)] $\longrightarrow$ R .

ولتبسيط الرموز سوف نكتب هـ = ق$^{-1}$. الآن ق (أ) $\geqslant$ ص$_1$ $<$ ص$_2$ $\geqslant$ ق (ب) تعطي هـ (ص$_1$) $<$ هـ (ص$_2$) والا كان هـ (ص$_1$) $\leqslant$ هـ (ص$_2$) وهذه تعطي:

ق (هـ (ص$_1$)) $\leqslant$ ق (هـ (ص$_2$))، اي ان ص$_1$ $\leqslant$ ص$_2$ مما يناقض ص$_1$ $<$ ص$_2$.

اذن هـ متزايد فعلاً.

سوف نثبت ان هـ متصل عند د $\in$ (ق (أ) ، ق (ب)): يوجد حـ $\in$ (أ ، ب) بحيث ان ق (حـ) = د . خذ $\in$ $>$ ٠ بحيث ان أ $<$ حـ - $\in$ $<$ حـ + $\in$ $<$ ب. اذن ق (جـ - $\in$) $<$ د $<$ ق (حـ + $\in$) ونختار δ $>$ ٠ اصغر العددين ق (حـ + $\in$) - د وَد - ق (جـ - $\in$)

اذن ص $\in$ [ق (أ) ، ق (ب)] وَ |ص - د| $<$ δ تعطي ص - ق (د) $<$ ق (حـ + $\in$) - د، اي ان ص $<$ ق (حـ + د) وان هـ (ص) $<$ حـ + $\in$ = هـ (د) + $\in$. وبشكل مشابه ق (حـ - $\in$) $<$ ص. لهذا فان هـ (د) - $\in$ $<$ هـ (ص). اذن |هـ (ص) - هـ (د)| $<$ $\in$. لهذا فان هـ متصل على د.

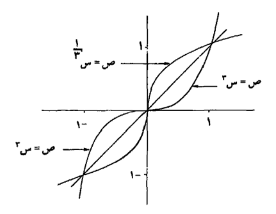
ولا يختلف البرهان اذا كانت د هي احدى نقطتي النهاية ق (أ) أو ق (ب).

وهناك نقطة يجدر ذكرها هنا: وهي اننا اخترنا $\in$ $>$ ٠ بحيث ان $\in$ $<$ ب - حـ وَ $\in$

> حـ - أ، ولم نأخذ اي $\in$ > ٠ كما هو مطلوب في تعريف الاتصال. ولكن اذا اخذنا و = أصغر { ب - حـ ، حـ - أ } واذا كان $\in \leqslant$ و نستبدل $\in$ السابقة بـ $\frac{و}{٢}$. اذن يوجد $\delta = \delta$ ($\frac{و}{٢}$) بحيث ان | ص - د | > δ تعطي | هـ (ص) - هـ (د) | > $\frac{و}{٢}$ > و $\leqslant \in$ ، اذن هـ متصل عند د. وهذا ينهي برهان النظرية.

المثال ٢٣.

لنأخذ ق : R ← R معرفا بـ ق (س) = س^{٣}. لقد اثبتنا في المثال ١٢ ان ق متزايد فعلا ولذلك، وبما ان ق حدودية، اذن هو متصل على R . فلتطبيق النظرية ١٠ خذ اي فترة [أ ، ب] في R . عند النظر الى تحديد ق على [أ ، ب] فانه يوجد ق$^{-١}$: [أ^{٣} ، ب^{٣}] ← R بحيث ان ق$^{-١}$ متزايد فعلا ومتصل. نكتب عادة ق$^{-١}$ (س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ وبما ان [أ ، ب] كانت اي فترة فان ق$^{-١}$ متزايد فعلا ومتصل على R . والشكل ادناه يمثل مخطط ص = س^{٣} ومخطط ص = س$^{\frac{١}{٣}}$، لاحظ ان مخطط ص = س$^{\frac{١}{٣}}$ هو صورة ص = س^{٣} على المستقيم ص = س.



في النظرية ١٠ كان الاقتران ق اقتران تقابل متصلا على مجاله. ومن النظرية استنتجنا

ان $ق^{-1}$ هو تقابل ومتصل ايضا على مجاله . وهذا يمهد للتعريف التالي الهام في التحليل المتقدم والتبـولـوجيـا . وسـوف يقتصر اهتمامنا على الاقترانات بين مجموعات جزئية من $\mathbb{C}$.

الاقتران التبولوجي. افرض ان سه ، صه مجموعتان غير خاليتين جزئيتان من $\mathbb{C}$. يسمى الاقتران ق : سه ← صه اقـترانـا تبـولوجيا اذا وفقط اذا كان ق تقابلا ومتصلا على سه وكان $ق^{-1}$ متصلا على صه . واذا اعطينـا مجمـوعتـين سه ، صه وامكن ايجاد اقتران تبولوجي بينهما فاننا نقول ان سه ،صه متكافئتان تبولوجيا .

المثال ٢٤ .

في $\mathbb{R}$: اي فترتـين جزئيتـين مفتـوحتين تكونان متكافئتين تبولوجيا . لاثبات ذلك لنأخذ فترتـين (أ ، ب) ، (حـ ، د)، ولـنـعـرف ق : (أ ، ب) ← (حـ ، د) بـ ق (س) = حـ +

$\frac{(د - جـ)\ (س - أ)}{ب - أ}$. من السهل اثبات ان ق هو اقتران تبولوجي .

المثال ٢٥ .

في $\mathbb{R}$ لا يمكن لفـترة مغلقـة ان تكـافىء تبـولوجيا فترة مفتوحة . لاثبات ذلك افرض انه يوجـد اقـتران تبـولـوجي ق بين سه = [أ ، ب] وصه = (حـ ، د) . اذن ق (سه) = صه فترة مفتوحة ولكن اذا كان ص ∈ $\bar{ق}$ (سه) فإنه يوجد متتالية (س $_{ن}$) ∈ سه بحيث ان ق (س $_{ن}$) ← ص . وبـما ان سه محصـورة ومغلقـة فانـه يوجد متتالية جزئية س $_{ن_ر}$ ← س ∈ سه . وبما ان ق

متصل فان ق (س $_{ن_ر}$) ← ق (س)، ولكن ق (س $_{ن_ر}$) ← ص، اذن ص = ق (س) ∈ ق (سه). اذن ق (سه) مغلقة مما يناقض ق (سه) فترة مفتوحة.

تتعلق النظرية الاخيرة في هذا البند بنوع معين من الاقترانات، يسمى اقتران التقلص. والنظرية هامة لذاتها وهي مفيدة ايضا في التحليل العددي، كما سنرى عندما ندرس طريقة نيوتن في ايجاد الجذور.

النظرية ١١. [قاعدة النقطة الثابتة]

افرض ان ق هو اقتران تقلص على [أ ، ب]، اي افرض ان ق : [أ ، ب] ← [أ ، ب] وانه يوجد عدد ثابت حـ، ٠ < حـ < ١ بحيث ان |ق (س) - ق (ص)| < حـ | س - ص | لكل س ، ص ∈ [أ ، ب]. اذن ق متصل على [أ ، ب] ويوجد له نقطة ثابتة وحيدة. اي انه يوجد حل وحيد للمعادلة ق (س) = س في [أ ، ب]، فلنسمه م.

وكذلك اذا كانت س. نقطة في [أ ، ب] فاننا نعرف س $_{ن+١}$ = ق (س $_ن$) لكل ن = ٠ ، ١ ، . . . . اذن س $_ن$ ← م (ن ← ∞)، وَ

$$|س_ن - م| \leqslant \frac{حـ^ن |س_١ - س_٠|}{١ - حـ}، \text{ لكل } ن \geqslant ١.$$

البرهان.

افرض ان ∊ > ٠ وخذ δ = $\frac{∊}{حـ}$. اذن س ، ص ∈ [أ ، ب] وَ |س - ص| < δ تعطي |ق (س) - ق (ص)| ⩽ حـ |س - ص| < ∊ واذن ق متصل على [أ ، ب].

لنأخذ اي س. ∈ [أ ، ب] وعرف س$_١$ = ق (س.)، س$_٢$ = ق (س$_١$)، . . . . اذن أ ⩽ س $_ن$ ⩽ ب لكل ن ⩾ ٠.

سوف نثبت الآن ان (س ن) هي متتالية كوشية: خذ $ن \geqslant ١$ ، $ر \geqslant ١$ ، اذن

$$|س_{ن+ر} - س_ن| = |ق(س_{ن+ر-١}) - ق(س_{ن-١})|$$

$$\leqslant حـ |س_{ن+ر-١} - س_{ن-١}|$$
$$\leqslant حـ^٢ |س_{ن+ر-٢} - س_{ن-٢}| \leqslant \ldots$$
$$\leqslant حـ^ن |س_ر - س_٠|$$
$$\leqslant حـ^ن (|س_ر - س_{ر-١}| + |س_{ر-١} - س_٠|)$$
$$\leqslant حـ^ن (|س_ر - س_{ر-١}| + |س_{ر-١} - س_{ر-٢}| + \ldots + |س_١ - س_٠|)$$
$$\leqslant حـ^ن (|س_١ - س_٠|)(١ + حـ + حـ^٢ + \ldots)$$
$$= \frac{حـ^ن |س_١ - س_٠|}{١ - حـ} \ldots\ldots \qquad (٩)$$

وذلك لان $٠ < حـ < ١$. ولكن $٠ < حـ < ١$ تعطي ان $حـ^ن \leftarrow ٠$ $(ن \leftarrow \infty)$ اذن (٩) تعطي ان (س ن) هي متتالية كوشية. ومن تمام R ينتج ان $س_ن \leftarrow م$ $(ن \leftarrow \infty)$، وبما ان $أ \leqslant س_ن \leqslant ب$ فان $أ \leqslant م \leqslant ب$.

لكن $س_{ن+١} \leftarrow م$ $(ن \leftarrow \infty)$ وبما ان ق متصل فانه ينتج من $س_{ن+١} = ق(س_ن)$ ان نها $س_{ن+١} = م = ق(م)$، اذن م هي نقطة ثابتة لـِق.

الآن م وحيدة لانه اذا وجد $م^* = ق(م^*)$ فان $|م - م^*| = |ق(م) - ق(م^*)| \leqslant حـ |م - م^*|$ وبما ان $٠ < حـ < ١$ فان $|م - م^*| = ٠$ ومنه $م = م^*$.

اخيراً تنتج من (٩) ان $|س_{ن+ر} - س_ن| \leqslant حـ^ن |س_١ - س_٠| (١ - حـ)^{-١}$، لهذا فانه اذا ثبّتنا $ن \geqslant ١$، وتركنا $ر \leftarrow \infty$ ، نحصل على $|م - س_ن| \leqslant حـ^ن |س_١ - س_٠| (١ - حـ)^{-١}$ لان $س_{ن+ر} \leftarrow م$ $(ر \leftarrow \infty)$. وهذا يثبت النظرية.

تمارين ٦ - ٣

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - اثبت ان ق : سه ← $\mathbb{C}$ متصل عند أ ∈ سه اذا وفقط اذا كان ق (س ن) ← ق (أ) (ن ← ∞) لجميع المتتاليات (س ن) في سه التي تحقق س ن ← أ (ن ← ∞).

٢ - جد جميع النقاط في [٠ ، ٢) التي تكون عندها الاقترانات التالية متصلة (١) ق (س) = [س]، (٢) هـ (س) = | س - ١ | ، (٣) ل (س) = (س - ١) [س]. وضح بالرسم.

٣ - افرض ان ق : $\mathbb{R}$ ← $\mathbb{R}$ متصل على $\mathbb{R}$. وَق (أ) = ٠ لكل عدد نسبي أ، اثبت ان ق (س) = ٠ لكل س ∈ $\mathbb{R}$.

٤ - عرف ق : $\mathbb{R}$ ← $\mathbb{R}$ بـ ق (س) = س اذا كان س عددا غير نسبي،وَق (س) = ٠ اذا كان س عددا نسبيا. اثبت ان ق متصل عند ٠ فقط.

٥ - افرض ان ق : $\mathbb{R}$ ← $\mathbb{R}$ متصل عند ٠ ويحقق ق (س + ص) = ق (س) + ق (ص) لكل س ، ص ∈ $\mathbb{R}$. اثبت ان ق متصل على $\mathbb{R}$ وان ق (س) = أ س لكل س ∈ $\mathbb{R}$ حيث أ = ق (١).

اعط مثالا لاقتران ق : $\mathbb{C}$ ← $\mathbb{C}$ بحيث يكون ق متصلا ويحقق ق (ع + ع*) = ق (ع) + ق (ع*) لكل ع ، ع* ∈ $\mathbb{C}$ ولكن ق ليس على صورة أ ع.

٦ - اكتب ق (ع) = | ع |٢ + | ع |٢ (١ + | ع |٢)$^{-1}$ + | ع |٢ (١ + | ع |٢)$^{-2}$ + . . . اثبت ان هذه المتسلسلة تقاربية لكل ع ∈ $\mathbb{C}$. ما هي نقاط $\mathbb{C}$ التي يكون عندها ق متصلا.

٧ - عرف هـ : [١ ، ∞) ← $\mathbb{R}$ بِـ هـ (س) = س - ١ اذا كان ١ ⩽ س ⩽ ٢، هـ (س) = ٣ - س اذا كان ٢ < س ⩽ ٣ وَهـ (س + ٢) = هـ (س) لكل س ⩾ ١. ان مخطط هـ يشبه صورة اسنان المنشار. اثبت أن هـ متصل على [١ ، ∞).

عرف ق: [٠ ، ١] ← $\mathbb{R}$ بـ ق (٠) = ٠، ق (س) = س هـ ($\frac{1}{س}$) لكل س ∈ (٠ ، ١]. ارسم مخطط ص = ق (س) وابحث إتصال ق على الفترة [٠ ، ١].

٨ ـ افرض ان سہ مجموعة جزئية من ℂ غير خالية وثابتة لكل س ∈ ℂ عرّف

مـ (س ، سہ) = ك.ح.د { | س − أ | | أ ∈ سہ }

نسمي مـ (س ، سہ) المسافة بين النقطة س والمجموعة سہ. اثبت ان مـ : ℂ ⟵ R هو اقتران متصل على ℂ .

٩ ـ افرض ان ق : [أ ، ب] ⟵ [أ ، ب] متصل على [أ ، ب]. وبتطبيق نظرية القيم الوسطى على اقتران ملائم اثبت انه يوجد حـ ∈ [أ ، ب] بحيث ان ق (حـ) = حـ. ومن هذا نستنتج انه اذا كان هـ: [٠ ، ∞) ⟵ [٠ ، ∞) متصلا ومحصورا على [٠ ، ∞) فانه يوجد د ∈ [٠ ، ∞) بحيث ∋ ان هـ (د) = د.

اعط مثالا لاقتران ل : [٠ ، ∞) ⟵ [٠ ، ∞) حيث يكون متصلا على [٠ ، ∞) ويكون ل (س) ≠ س لكل س ∈ [٠ ، ∞).

١٠ ـ في المثال ٢٢ بينا ان س^{٣} − س + ١ = ٠ له جذر حقيقي واحد. بكتابة س = أ + ب، اثبت ان المعادلة تتحقق اذا كان أ^{٣} + ب^{٣} = −١ و ٣ أ ب = ١ . ومنه بين انه اذا كان أ ، ب ∈ R وَ

$$٢أ^{٣} = -١ + (١ - \frac{٤}{٢٧})^{\frac{١}{٢}} ، ٢ب^{٣} = -١ - (١ - \frac{٤}{٢٧})^{\frac{١}{٢}}$$

فان أ + ب، حـ أ + حـ^{٢}ب ، حـ^{٢}أ + حـ ب هي حلول س^{٣} − س + ١ = ٠ حيث ٢ حـ = −١ + ت $\sqrt{٣}$

١١ ـ اعط مثالا لاقتران متصل ومتزايد فعلا على [٠ ، ١] ∪ [٢ ، ٣] بحيث ان عكسه ليس متصلا.

١٢ ـ افرض ان ق : [أ ، ب] ⟵ R متصل على [أ ، ب] بحيث ان ق (س) > ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]. اثبت انه يوجد عدد ثابت موجب حـ بحيث ان ق (س) ≥ حـ لكل س ∈ [أ ، ب].

اعط امثلة لتبين ان الاستنتاج يكون خطأ اذا استبدلنا [أ ، ب] بـ (٠ ، ١] أو [٠ ، ∞).

١٣ ـ افرض ان ق : [أ ، ب] ⟵ R متصل وتبايني. افرض ان ق (أ) < ق (ب). استخدم نظرية القيم الوسطى لاثبات ان ق متزايد فعلا.

١٤ ـ افرض ان ق : [أ ، ب] ⟵ R متصل على [أ ، ب]. عرّف هـ (س) = ص ح ع { ق (ر) | أ ⩽ ر ⩽ س } . اثبت ان هـ (أ) = ق (أ)، هـ متزايد، هـ متصل عند أ.

١٥ ـ اثبت ان R يكافيء تبولوجيا الفترة المفتوحة (−١ ، ١).

١٦ ـ افرض ان ق : [٠ ، ∞) ⟵ R متصل على [٠ ، ∞) ويحقق ٠ ⩽ ق (س) ⩽ س لكل س ⩾ ٠. اذا كان $أ_1$ ⩾ ٠، $أ_{ن+1}$ = ق ($أ_ن$) لكل ن ⩾ ١. فاثبت ان $أ_ن$ ⟵ نهاية ما، سمّها م. واثبت ان ق (أ) = م.

اذا فرضنا بالاضافة لذلك ان ٠ ⩽ ق (س) < س لكل س > ٠ فاثبت ان م = ٠

١٧ ـ اكتب ق (س) = $س^2$ − س + ١. اثبت ان ق : [٠ ، ١] ⟵ [٠ ، ١] وانه يوجد نقطة ثابتة وحيدة لِـ ق في [٠ ، ١] ولكن ق ليس اقتران تقلص.

٤ . الاتصال المنتظم

ان افكار هذا البند اكثر نضجا مما رأيناه في البنود السابقة. فيكفي للعديد من القراء ان يتعرفوا على التعريف الاساسي للاتصال المنظم وعلى حصيلة النظرية ١٢ ونتيجتها.

اذا نظرنا الى تعريف الاقتران المتصل نجد ان ق : سه ⟵ ℂ يكون متصلا على سه اذا وفقط اذا كان لكل ∈ > ٠ ولكل ص ∋ سه يوجد δ = δ (∈ ، ص) > ٠ بحيث ان س ∋ سه وَ |س − ص| < δ تعطي |ق (س) − ق (ص)| < ∈. وبصورة عامة فان δ تعتمد على ∈ ، ص. لكن هناك حالات من الممكن فيها ايجاد δ بحيث تعتمد على ∈ فقط، وليس على ص.

المثال ٢٦ .

عرّف ق : [٠ ، ١] ← R بـ ق (س) = س^{٢} . سوف نثبت انه لكل $\in$ > ٠ يوجد δ = δ ($\in$) > ٠ بحيث ان س ، ص ∋ سه وَ | س - ص | < δ تعطي | ق (س) - ق (ص) | < $\in$.

واضح انه بالامكان اخذ δ = $\frac{\in}{٢}$ لان | س^{٢} - ص^{٢} | = | س - ص | (س + ص) وَ س + ص ⩽ ٢ .

فان كان بالامكان ايجاد δ بحيث تعتمد على $\in$ فقط فان δ تصلح لجميع س ∋ سه وبانتظام . في هذه الحالة نقول ان ق متصل بانتظام على سه . واليك التعريف الدقيق .

الاقتران المنتظم الاتصال. افرض ان ق : سه ← C . نقول ان ق منتظم الاتصال اذا وفقط اذا كان لكل $\in$ > ٠ يوجد δ = δ ($\in$) تعتمد على $\in$ فقط بحيث ان لكل س ، ص ∋ سه ، | س - ص | < δ تعطي | ق (س) - ق (ص) | < $\in$.

من الواضح انه اذا كان ق منتظم الاتصال فان ق متصل . والعكس غير صحيح ، كما سنرى في المثال التالي .

المثال ٢٧ .

عرف ق : (٠ ، ١) ← R بـ ق (س) = $\frac{١}{س}$. اذن ق متصل على (٠ ، ١) كما عرفنا سابقا ، ولكن ق ليس منتظم الاتصال على سه . لاثبات ذلك افرض ان امكن ان ق منتظم الاتصال على سه . خذ $\in$ = ١ ، اذن يوجد δ = δ (١) > ٠ بحيث ان س ، ص ∋ (٠ ، ١) وَ | س - ص | < δ تعطي | $\frac{١}{س}$ - $\frac{١}{ص}$ | < $\in$. خذ س = $\frac{\delta}{١ + \delta}$ ، ص = $\frac{س}{٢}$.

اذن س ، ص $\in$ (٠ ، ١)، | س - ص | > $\frac{}{٢}$ > δ ، اذن | $\frac{١}{س}$ - $\frac{١}{ص}$ | =

$\frac{١}{δ}$ + δ > ١ مما يناقض $\frac{١ + δ}{δ}$ > ١ . اذن لا يمكن لـ ق ان يكون منتظم الاتصال.

والنتيجة الهامة التالية تبين ان الاتصال يكون اتصالا منتظما اذا كانت سه مغلقة ومحصورة.

النظرية ١٢.

اذا كان ق : سه ← $\mathbb{C}$ متصلا على مجموعة مغلقة ومحصورة وغير خالية في $\mathbb{C}$ فان ق منتظم الاتصال.

البرهان.

افرض ان ق غير منتظم الاتصال. اذن يوجد ϵ > ٠ بحيث انه لكل δ > ٠ يوجد س ، ص في سه بحيث ان | س - ص | > δ ولكن | ق (س) - ق (ص) | ≥ ϵ.

باخذ δ = ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ... فاننا نجد س ن ، ص ن $\in$ سه، | س ن - ص ن | > $\frac{١}{ن}$ وَ | ق (س ن) - ق (ص ن) | ≥ ϵ . بما ان سه محصورة فان (س ن) محصورة، ولهذا فانه يوجد متتالية جزئية تقاربية س ن ر ← س. من | س ن - ص ن | > $\frac{١}{ن}$ نرى ان ص ن ر ← س. وبما ان سه مغلقة، فان س $\in$ سه ومن اتصال ق على سه ينتج ان | ق (س ن) - ق (ص ن) | ← | ق (س) - ق (س) | = ٠ . لكن هذا يناقض | ق (س ن ر) - ق (ص ن ر) | ≥ ϵ، اذن ق منتظم الاتصال على سه مما يثبت النظرية.

نتيجة.

اذا كان ق : [أ ، ب] ← R متصلا فان ق يكون منتظم الاتصال.

البرهان.

[أ ، ب] مجموعة محصورة ومغلقة في $\mathbb{R}$.

والنظـريـة الاخيرة على الاقترانات المتصلة نظرية معروفة وهامة وقد اثبتها فاير شتراس وهي تبــين انــه يمكن تقـريب اي اقـتران متصـل على [٠ ، ١] تقـريبـا منتظـما باستخـدام حدوديات. وهذه الحدوديات التي نستعملها عرفها الرياضي الروسي برنشتين، والبرهان الذي سنقدمه ليس هو برهان فايرشتراس الاصلي. ففي برهاننا سوف نستعمل بعض نتائج التفاضل التي من المحتمل ان يكون الطالب ملما بها.

النظرية ١٣ [نظرية فاير شتراس للتقريب].

افرض ان ق : [٠ ، ١] ⟵ $\mathbb{R}$ هو اقتران متصل على [٠ ، ١]. اذن يوجد متتالية من الحـدوديـات (ب $_{ن}$ (س)) تعتمـد على ق (وهذه هي حدوديات برنشتين)، وتحقق انه لكل ϵ > ٠ يوجد ن. = ن. (ϵ) $\in$ N ، بحيث ان

$$|ق(س) - ب_{ن}(س)| < \epsilon \text{ لكل } ن \geqslant ن_{.} \text{ لكل } س \in [٠ ، ١].$$

البرهان.

اولا نحتاج الى المتطابقة :

$$\frac{س(١ - س)}{ن} = \sum \binom{ن}{ر} س^{ر}(١ - س)^{ن-ر}(س - \frac{ر}{ن})^{٢} ، \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (١٠)$$

التي هي صحيحة لكل س $\in$ $\mathbb{R}$ لكل ن $\in$ N . وكالعادة فان $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!}$

فلاثبات (١٠) خذ ما يلي:

$$١ = (س + (١ - س))^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} س^{ر}(١ - س)^{ن-ر} \quad . \; . \; . \; . \quad (١١)$$

وهذا ينتج من نظرية ذات الحدين. خذ مشتقة الطرفين ثم اضرب بـ س (١ - س) تحصل على

$$\cdot = \sum_{ر=\cdot}^{ن} س\ (١ - س)\ هـ\ (س) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (١٢)$$

حيث هـ تعتمد على ر ، ن وَس. خذ مشتقة طرفي (١٢) واضرب بـ س (١ - س) وبسط المعادلة تحصل على

$$\cdot = -ن\ س\ (١ - س) + \sum_{ر=\cdot}^{ن} \binom{ن}{ر} س^{ر} (١ - س)^{ن-ر} (ر - ن\ س)^{٢} \; . \; . \; . \; . \quad (١٣)$$

وبقسمة طرفي (١٣) على $ن^{٢}$ نحصل على (١٠).

الآن نعرف حدودية برنشتين $ب_{ن}$ كما يلي:

$$ب_{ن}(س) = \sum_{ر=\cdot}^{ن} \binom{ن}{ر} ق\left(\frac{ر}{ن}\right) س^{ر} (١ - س)^{ن-ر}$$

اذن، من (١١)

$$ب_{ن}(س) - ق\ (س) = \sum_{ر=\cdot}^{ن} \binom{ن}{ر} \left\{ق\left(\frac{ر}{ن}\right) - ق\ (س)\right\} س^{ر} (١ - س)^{ن-ر} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (١٤)$$

الآن لنأخذ اي $\epsilon > \cdot$ ، وبما ان ق منتظم الاتصال على [٠ ، ١] فانه يوجد $\delta > \cdot$ بحيث ان س ، ص في [٠ ، ١] وَ $|س - ص| < \delta$ تعطي $|ق\ (س) - ق\ (ص)| < \frac{\epsilon}{٤}$.

بما ان ق متصل على [٠ ، ١] فانه يوجد عدد ثابت م بحيث ان $|ق\ (س)| <$ م لكل

س $\in$ [٠ ، ١] من النظرية ٧. نختار $ن_{\circ} > \frac{م}{٤ \delta^{٢}}$ ، $ن_{\circ} \in N$ ، خذ $ن \geq ن_{\circ}$. سنرى بعد قليل سبب هذا الاختيار لـ $ن_{\circ}$.

خذ س ∈ [٠ ، ١] و $٠ \leqslant ر \leqslant ن$. يمكن ان تكون ر بحيث ان $\left| س - \frac{ر}{ن} \right| < \delta$.

في هذه الحالة نحصل على $\left| ق(س) - ق\left(\frac{ر}{ن}\right) \right| < \frac{\epsilon}{٤}$. اذن وبالجمع لكل ر تحقق

$\left| س - \frac{ر}{ن} \right| < \delta$ نحصل من (١١) على

$$\sum \binom{ن}{ر} \left| ق\left(\frac{ر}{ن}\right) - ق(س) \right| س^{ر}(١ - س)^{ن-ر} \leqslant \frac{\epsilon}{٤} \quad \text{. . . . . (١٥)}$$

ولكن لكل ر بحيث ان $\left| س - \frac{ر}{ن} \right| \geqslant \delta$ نجمع ونحصل على

$$\sum \binom{ن}{ر} \left\{ \left| ق\left(\frac{ر}{ن}\right) \right| + \left| ق(س) \right| \right\} س^{ر}(١ - س)^{ن-ر}$$

$$\leqslant ٢م \sum \binom{ن}{ر} \left(س - \frac{ر}{ن}\right)^{٢} \left(س - \frac{ر}{٢}\right)^{-٢} س^{ر}(١ - س)^{ن-ر}$$

$$\leqslant ٢م\,\delta^{-٢} \sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} س^{ر}(١ - س)^{ن-ر}\left(س - \frac{ر}{ن}\right)^{٢}$$

$$= ٢م\,\delta^{-٢}\, س(١ - س)\, ن^{-١} \quad \text{من (١٠)}$$

$$\leqslant ٢\epsilon(١ - س) \quad \text{لان} \quad ن > \frac{م}{\epsilon\,\delta^{٢}}$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{٢} \quad \text{لان} \quad س(١ - س) \leqslant \frac{١}{٤} \quad \text{. . . . . (١٦)}$$

ولأن $٤س(١ - س) - ١ = -(٢س - ١)^{٢} \leqslant ٠$.

ينتج من (١٤) ، (١٥) ، (١٦) أن

$$\left| ب_{ن}(س) - ق(س) \right| \leqslant \frac{٣\epsilon}{٤} < \epsilon.$$

لاي س ∈ [٠ ، ١] ولكل $ن \leqslant ن_{٠}$. وبذا يتم برهان النظرية.

تمارين ٦ ـ ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحلول بعض من هذه التمارين)

١ ـ عرف ق : (١ ، ∞) ← R بـ ق (س) = $\frac{1}{س}$. اثبت ان ق منتظم الاتصال على (١ ، ∞).

٢ ـ عرف ق : [٠ ، ١] ← R بـ ق (س) = $\sqrt{س}$. بما ان ق متصل على [٠ ، ١] فاننا نعرف من النظرية ١٢ أن ق منتظم الاتصال . اذن يوجد. δ = δ (ε) > ٠ تعمل بانتظام لكل س ∋ [٠ ، ١]. وقيمة δ غير معروفة بشكل عام . ولكن في حالتنا هذه اثبت ان δ = $\frac{\epsilon^2}{9}$ تصلح للعمل بانتظام على [٠ ، ١].

٣ ـ اثبت ان ق : [٠ ، ∞) ← R والمعرف بـ ق (س) = $\sqrt{س}$ هو منتظم الاتصال على [٠ ، ∞).

٤ ـ افرض ان ق : [٠ ، ∞) ← R متصل على [٠ ، ∞). وأن ق (س) ← أ (س ← ∞) اثبت ان ق منتظم الاتصال على [٠ ، ∞).

اعط مثالاً لتبين ان الاستنتاج يكون خطأ اذا حذفنا ق (س) ← أ (س ← ∞).

٥ ـ يسمى الاقتران ق : R ← R دوريا اذا وفقط اذا وجد عدد ثابت د > ٠ بحيث ان ق (س + د) = ق (س) لكل س ∋ R . ونسمي د دورة الاقتران. اثبت ان الاقتران المتصل الدوري هو منتظم الاتصال على R .

٦ ـ عرف ق : [٠ ، ١] ← R بـ ق (س) = | س - $\frac{1}{2}$ | . عين حدوديات برنشتين لِـ ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥. وضح بالرسم كيف تقرب ق على [٠ ، ١].

٧ ـ (على فرض المعرفة بمبادىء التكامل). افرض ان ق : [٠ ، ١] ← R متصل على [٠ ،١]

استخدم نظرية فاير شتراس للتقريب لاثبات انه اذا كان $\int_{0}^{1}$ ق (س) س^{ن} د س = ٠ لِـ ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . فان $\int_{0}^{1}$ ق^{2} (س) د س = ٠ . استنتج ان ق (س) = ٠ لكل س ∋ [٠ ، ١].

الفصل السابع

الاقترانات القابلة للتفاضل

١ . مشتقة الاقتران عند نقطة

في بداية الفصل السادس مهدنا لدراسة النهايات بان نظرنا نظرة هندسية الى مسألة المماسات ، وساقنا البحث الى دراسة كسور من النوع $\frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ وتدعى عادة كسور نيوتن . سنرمز لهذا الكسر بالرمز ك (س ، أ) وعندما س ← أ نحصل على ميل المماس عند (أ ، ق (أ))

للمنحنى ص = ق (س) بشرط ان تكون نها $\frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ (س ← أ) موجودة .

ويساعد التفكير الهندسي على معرفة سلوك الاقترانات الحقيقية المعرفة على مجموعات جزئية من R .

والآن سنسلك طريقا آخر، ونأخذ اقترانات معرفة على مجموعات جزئية من $\mathbb{C}$ وتأخذ قيما في $\mathbb{C}$. وهذا يتضمن الاقترانات الحقيقية المعرفة على مجموعات جزئية من R مع استبدال مقياس الاعداد المركبة بالقيمة المطلقة.

مشتقة الاقتران عند نقطة: لنفرض ان سه مجموعة جزئية غير خالية في $\mathbb{C}$ ، وافرض ان أ $\in$ سه بحيث ان أ نقطة تراكم لِـ سه. افرض ان ق : سه $\leftarrow$ $\mathbb{C}$. نقول انه يوجد مشتقة لِـ ق عند أ اذا وفقط اذا كان يوجد عدد م $\in$ $\mathbb{C}$ بحيث ان

$$\text{ك (س ، أ)} = \frac{\text{ق (س)} - \text{ق (أ)}}{\text{س} - \text{أ}} \leftarrow \text{م (س} \leftarrow \text{أ)}$$

نسمي م مشتقة ق عند أ، ونكتب قَ (أ) = م . واذا كان لِـ ق مشتقة عند أ فاننا نقول ان ق قابل للتفاضل (أو الاشتقاق) عند أ . واذا كانت كل نقطة في سه هي نقطة تراكم لِـ سه فاننا نقول ان ق قابل للتفاضل (أو الاشتقاق) على سه اذا وفقط اذا كان ق قابلا للتفاضل عند كل نقطة في سه.

ومن الواضح اننا نحتاج الى أ $\in$ سه كي نتمكن من حساب ق (أ) . كذلك نحتاج الى س $\in$ سه ، س $\neq$ أ لكي نحسب كسر نيوتن. ولأخذ النهاية عندما س $\leftarrow$ أ فانه من الضروري، حسب تعريف النهاية، ان تكون أ نقطة تراكم لـ سه .

واحيانا يكون من الافضل كتابة س = أ + و في كسر نيوتن، واذن يكون لِـ ق مشتقة، قَ (أ)، اذا وفقط اذا كان

$$\frac{\text{ق (أ + و)} - \text{ق (أ)}}{\text{و}} \leftarrow \text{قَ (أ) (و} \leftarrow \text{٠)} .$$

واذا كانت كل نقطة في سه هي نقطة تراكم لِـ سه وكان ق ثابتا على سه ، اي ان ق (س) = ق (أ) لكل س $\in$ سه فان قَ (أ) = ٠ لكل أ $\in$ سه.

المثال ١ .

عرف ق : $\mathbb{C}$ $\leftarrow$ $\mathbb{C}$ بـ ق (ع) = ع^{ن} حيث ن $\in$ N .

اذن قَ (ع) = ن ع $^{ن-1}$ لكل ع ∈ ℂ . ولاثبات ذلك نأخذ هـ (ع ، و) = $\frac{\text{ق (ع + و) - ق (ع)}}{\text{و}}$ ، و ≠ ٠ . فمن نظرية ذات الحدين نستنتج ان

(ع + و)^{ن} - ع ^{ن} = ع ^{ن} + ن ع $^{ن-1}$و + . . . + و^{ن} - ع ^{ن} = و(ن ع $^{ن-1}$ + . . . +و$^{ن-1}$).

اذن هـ (ع ، و) = ن ع $^{ن-1}$ + . . . + و$^{ن-1}$ ⟵ ن ع $^{ن-1}$ (و⟵ ٠)، وهـذا يثبت النتيجـة .

وهذه النتيجة صحيحة للعدد الحقيقي س ايضا .

والنظـريـة الاولى التـاليـة تعبر عن قابلية التفاضل بطريقة مختلفة قليلا ، وهي مفيدة في الحالات العملية ، وهامة لأمكانية تعميمها في مستويات اعلى (مثل تحليل الاقترانات عديدة المتغيرات ، والتحليل الدالي) .

النظرية ١ .

يكون ق : سه ⟵ ℂ قابلا للتفاضل عند أ ∈ سه اذا وفقط إذا وُجد م ∈ ℂ بحيث أنه لكل ϵ > ٠ ، يوجد δ = δ_1 (أ ، ϵ) > ٠ بالخاصية التالية :

س∈ سه، | س - أ | < δ ⟸ | ق (س) - ق (أ) - م (س - أ)| ≤ ϵ | س - أ | . . . (١)

البرهان .

افـرض ان ق قابـل للتفـاضل عند أ ومشتقته قَ (أ) . اذن لكل ϵ > ٠ يوجد δ. > ٠ بحيث ان س ∈سهوَ ٠ < | س - أ | < δ تعطي | ك (س ، أ) - قَ (أ) | < ϵ ، حيث ك (س ، أ) هوكسـر نيـوتن . وبـاخـذ (س - أ)كمقـام مشترك نحصل على (١) ، حيث م = قَ (أ) ، في حالة ٠ < | س - أ | < δ. اما اذا كان | س - أ | = ٠ فان س = أ ويكون كل من طرفي (١) صفـراً

وبـالعكس ، افرض انـه يوجـد م ∈ ℂ بحيث ان (١) تتحقق . افـرض ان ϵ > ٠

وهكذا $\frac{\epsilon}{2} > 0$. اذن يوجد $\delta = \delta$ (أ ، $\frac{\epsilon}{2}$) بحيث ان س ∈ سه و|س - أ| < δ تعطي |ق (س) - ق (أ) - م (س - أ)| ⩽ $\frac{\epsilon}{2}$ |س - أ| . اذن اذا كان 0 < |س - أ| < δ ، فبالقسمة على |س - أ| نحصل على |ك (س ، أ) - م| ⩽ $\frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ ، وهذا يتضمن ان لـ ق مشتقة م = قَ (أ) . وهذا يثبت النظرية .

واذا كان ق قابلا للتفاضل عند أ وكتبنا

ل (س) = ق (أ) + (س - أ) قَ (أ)

فاننا نحصل على اقتران ل : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. فاذا كان ق اقترانا حقيقيا معرفا على مجموعة جزئية من R ، فان مخطط ل هو خط مستقيم ميله قَ (أ) ، ويمر بالنقطة (أ ، ق (أ)) . وهنا نعرف ل على انه مماس ق عند (أ ، ق (أ)) . اما في حالة $\mathbb{C}$ فان المعنى الهندسي لـ ل يصبح أقل وضوحا ولن ندرسه .

ينتج من (١) ان |ق (س) - ل (س)| ⩽ ∈ |س - أ| عندما يكون |س - أ| < δ اذن يمكن استخدام المماس لتقريب ق قرب أ . •

وعند دراسة طرق التفاضل والعمليات الجبرية للمشتقات نرى احيانا انه من المفيد ان نستخدم رموزا للمشتقة غير قَ (أ) مثل $\frac{دق}{دس}$ ، دق . فعلى سبيل المثال ، اذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للتفاضل عند أ فاننا نثبت في النظرية (٢) ان ق + هـ قابل للتفاضل عند أ وان

(ق + هـ)َ (أ) = قَ (أ) + هَـ (أ)

وهناك طرق اخرى لكتابة هذا مثل

$$\frac{د}{دس} (ق + هـ) = \frac{دق}{دس} + \frac{دهـ}{دس} \text{ عند س = أ. أو}$$

د (ق + هـ) = دق + دهـ عند س = أ .

المثال ٢ .

اذا كان ق قابلا للاشتقاق عند أ فان ق يكون متصلا عند أ . والعكس غير صحيح . ولاثبات ذلك . من النظرية ١ نحصل على

| ق (س) - ق (أ) | ⩽ (| م | + ε) | س - أ | . . . . (٢)

اذا كان | س - أ | > δ. ، وكان ق قابلا للتفاضل عند أ . اذن ، بجعل | س - أ | > أ͞ص { δ ، $\frac{\epsilon}{\epsilon + |م|}$ } نحصل على | ق (س) - ق (أ) | > ε . اذن ق متصل عند أ .

باخذ المثال ق (س) = | س | على R . نرى ان ق متصل عند الصفر ولكنه غير قابل للتفاضل عند الصفر .

وسيكون اهتمامنا الرئيسي في هذا الفصل هو دراسة الاقترانات الحقيقية القابلة للتفاضل ، والمعرفة على R أو على فترة مفتوحة في R . وهذا التحديد يجعل موضوع التفاضل اسهل ويمكننا من اعطاء نتائج هامة مثل نظرية القيمة المتوسطة ونظرية تايلور .

وهناك بعض الفروق الهامة بين خواص التفاضل للاقترانات الحقيقية في متغير حقيقي ، والاقترانات المركبة في متغير مركب ، والاخيرة تشكل موضوعا قائماً بذاته .

والمثال التالي يوضح احد هذه الفروق .

المثال ٣ .

لنأخذ اقتران القيمة المطلقة على R ثم اقتران مقياس الاعداد المركبة .

في الحالة الاولى يكون ق (س) = | س | لكل س ∋ R ، اقترانا قابلا للتفاضل على R الا عند الصفر ، ومن السهل اثبات ذلك .

وفي الحالة الثانية يكون ق (ع) = | ع | لكل ع ∋ ℂ غير قابل للاشتقاق عند اي نقطة في ℂ ، بخلاف الوضع في R . ولاثبات ذلك خذ ع ، و ∋ ℂ ، وخذ هـ (ع ، و) =

$\frac{|ع + و| - |ع|}{و}$. فاذا كان ع = ٠ نأخــذ و > ٠ ، و < ٠ ، و∋ R ونــرى ان

$\frac{|و|}{و}$ لا نهاية لها عندما و ← ٠

واذا كان ع ≠ ٠ نكتب هـ (ع ، و) =

$$\frac{|ع + و|^{٢} - |ع|^{٢}}{و(|ع + و| + |ع|)} = \frac{وعَ + ع وَ + وَ و}{و(|ع + و| + |ع|)} \quad . . . \quad (٣)$$

فمن الواضح انه اذا كان لِـ هـ (ع ، و) نهاية عند و ← ٠ فان $\frac{وَ}{و}$ ← نهاية ما م (و ← ٠).

اذن يوجــد δ > ٠ بحــيــث ان $|\frac{وَ}{و} - م| < ١$ اذا كان ٠ < |و| < δ . باخــذ و = $\frac{δ}{٢}$، ثم و = $\frac{δ}{٢}$ ت نحصل على |١ - م| < ١، |-١ - م| < ١ واذن ٢ = |١ - م -(-١ - م)| < ٢ وهذا تناقض. اذن ق غير قابل للتفاضل عند اي نقطة في C .

النظرية ٢ .

اذا كان ق ، هـ قابلين للتفاضل عند أ ∋ سه. وكان ب ، حـ ∋ C كان ب ق + حـ هـ ، ق هـ قابلين للتفـاضـل عنـد أ. كذلـك اذا كان هـ (س) ≠ ٠ لكل س ∋ سه فان $\frac{ق}{هـ}$ قابل للتفاضل عند أ وكذلك:

(١) (ب ق + حـ هـ)َ (أ) = ب قَ (أ) + حـ هَـ (أ)

(٢) (ق هـ)َ (أ) = ق (أ) هَـ (أ) + قَ (أ) هـ (أ)

$$(٣) \quad \left(\frac{ق}{هـ}\right)^{'} (أ) = \frac{هـ(أ) قَ(أ) - ق(أ) هَـ(أ)}{\{هـ(أ)\}^{٢}}$$

البرهان.

سنذكر برهاني (١) و(٣). وبرهان (٢) شبيــه بهما. افرض ان $\epsilon > 0$ وخذ ي > | ب | + | حـ |. فمن النظرية ١ نستنتج انه يوجد δ_1 ، δ_2 بحيث ان س $\in$ سہ و | س − أ | < δ_1 ، | س − أ | < δ_2 تعطي

| ق (س) − ق (أ) − (س − أ) قَ (أ) | $\leqslant \frac{\epsilon}{ي}$ | س − أ | ،

| هـ (س) − هـ (أ) − (س − أ) هَـ (أ) | $\leqslant \frac{\epsilon}{ي}$ | س − أ | .

وباخذ ل (س) = ب ق (س) + حـ هـ (س) ينتج ان

| ل (س) − ل (أ) − (س − أ) { ب قَ (أ) + حـ هَـ (أ) } | $\leqslant \epsilon$ | س − أ | اذا كان س $\in$ سہ ، | س − أ | < أ ص (δ_1 ، δ_2). اذن ل قابل للتفاضل فقد تحقق (١).

ولاثبـــات (٣) اكتب و(سہ) = $\frac{ق (س)}{هـ (س)}$. افـــرض ان ك (س ، أ)، ح (سہ ، أ)، م (س ، أ) هي كسور نيوتن لِـ ق، هـ، وعند أ على الترتيب. اذن

$$م (س ، أ) = \frac{ك(س ، أ) هـ(أ) - ح (س ، أ) ق (أ)}{هـ (س) هـ (أ)} \quad \ldots\ldots \qquad (٤)$$

ولكن عندما س ← أ فان ك (س ، أ) ← قَ (أ) وكذلك ح (س ، أ) ← هَـ (أ). وكذلك من المثال ٢ فان هـ متصل عند أ ومنه هـ (س) ← هـ (أ) عندما س ← أ. ينتج من النظرية ٢ في الفصل السادس، ومن (٤) ان و(س ، أ) ← الطرف الايسر لِـ (٣)، عندما س ← أ، اي ان وَ(أ) تساوي الطرف الايسر من (٣). وهذا يثبت النظرية.

المثال ٤.

جد مشتقة و(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{١ + س^{٢}}$ حيث س $\in$ R : لايجاد المشتقة نفرض ان

ق (س) = $س^3 - 1$ ، هـ (س) = $1 + س^2$ في النظرية ٢ ، الجزء (٣) . اذن لكل س $\in$ R نحصل على قَ (س) = ٣ $س^2$ ، هَـ (س) = ٢ س، من المثال ١ والنظرية ٢ ، الجزء (١) . اذن

$$وَ (س) = \frac{(1 + س^2)\ 3س^2 - (س^3 - 1)\ 2س}{(1 + س^2)^2}$$

$$= \frac{س\ (2 + 3س + س^3)}{(1 + س^2)^2}$$

المثال ٥ .

افرض ان ق : R ← R قابل للتفاضل عند كل نقطة في R ، اي ان قَ(س) موجودة لكل س $\in$ R . سنجد مشتقة ل (س) = س قَ (س) على فرض ان قَ قابل للتفاضل على R . اي اننا نفرض ان ق قابل للتفاضل مرتين على R . من النظرية ٢ ، لكل س $\in$ R

لَ (س) = س قً (س) + قَ (س)

حيث قً ترمز لمشتقة قَ.

المثال ٦ .

اذا كانت ك : $\mathbb{C}$ ← $\mathbb{C}$ حدودية درجتها ن . فان ، قَ ، (قَ)َ = قً ، . . . قابلة للتفاضل على $\mathbb{C}$. ذلك لانه اذا كان ك (ع) = $أ_0 + أ_1ع + \ldots + أ_ن ع^ن$ فانه من نظرية ٢ نحصل على قَ (ع) = $أ_1 + 2\ أ_2 ع + \ldots + ن\ أ_ن ع^{ن-1}$ ، قً (ع) = $2\ أ_2 + 6\ أ_3 ع + \ldots + ن\ (ن - 1)\ أ_ن ع^{ن-2}$. وعند الرتبة النونية نحصل على $ق^{(ن)}$ (ع) = ن! $أ_ن$. ولكل ر > ن نحصل على $ق^{(ر)}$ (ع) = ٠ لكل ع $\in$ $\mathbb{C}$ $ق^{(ن)}$ يرمز الى المشتقة النونية لِـ ق . لهذا فان ق $ق^{(1)}$ = قَ ، ونأخذ كاصطلاح $ق^{(0)}$ = ق .

فاذا وضعنا ع = ٠ في صيغ ق (ع)، $ق^{(1)}$ (ع)، . . . نحصل على $ق^{(ر)}$ (٠) = ر! $أ_ر$ لكل ر = ١ ، ٢ ، . . . ، ن، اذن

$$ق(ع) = ق(٠) + ع ق^{(١)}(٠) + \frac{ع^٢}{٢!} ق^{(٢)}(٠) + \dots + \frac{ع^ن}{ن!} ق^{(ن)}(٠).$$

لكل ع $\in \mathbb{C}$. فهذه النتيجة تعطي ق (ع) بدلالة قيم المشتقات الـ ن الاولى محسوبة عند الصفر.

في المثال (١) بينا ان

$$\frac{د}{دع} ع^ن = ن ع^{ن-١} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (٥)$$

لكل ن $\in N$ ولكل ع $\in \mathbb{C}$. ونطمح الى توسيع هذه الصيغة لتشمل ن = ٠ ، -١ ، -٢ ، .... في حالة ن = ٠ نعرف $ع^٠ = ١$ لكل ع $\in \mathbb{C}$. واذا كان ن عددا صحيحا سالبا فانه يجب ان نفرض ان ع $\neq$ ٠ لان $ع^ن$ غير معرف عند ع = ٠ .

المثال ٧ .

اكتب ل (ع) = $ع^ن$ حيث ن = ٠ ، -١ ، -٢ ، .... فاذا كان ن = ٠ فان ل (ع) = ١ ومنه لَ (ع) = ٠ لكل ع $\in \mathbb{C}$. اذن (٥) صحيحة لِـ ن = ٠ ولكل ع $\in \mathbb{C}$ اذا فسرنا الطرف الايسر من (٥) على انه صفر.

واذا كان ن عددا صحيحــا سالبـا فان -ن $\in N$ خذ ع $\neq$ ٠ وطبق النظـريـة ٢ ، الجـزء (٣)، حيث ق (ع) = ١ ، هـ (ع) = $ع^{-ن}$. اذن ل (ع) = $\frac{ق(ع)}{هـ(ع)}$ ، قَ (ع) = ٠ ، هَـ (ع) = $(-ن)ع^{-ن-١}$. اذن

$$لَ(ع) = \frac{-(-ن)ع^{-ن-١}}{(ع^{-ن})^٢} = ن ع^{ن-١}.$$

اذن (٥) صحيحـة لجميـع الأعـداد الصحيحة ولكل ع $\neq$ ٠ . واذا كان ن $\geqslant$ ٠ فانها صحيحة لكل ع $\in \mathbb{C}$.

النظرية (٣) ادناه تعرف عادة باسم قاعدة تفاضل اقتران الاقتران، وهي هامة جدا عمليا. وأسهل صورة لتذكرها هي

$$\frac{د}{د س} ق (هـ (س)) = \frac{د ق}{د هـ} \cdot \frac{د هـ}{د س} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

ومن الخطأ محاولة اثبات هذه العلاقة باختصار د هـ في الطرف الايسر من (٦). ان $\frac{د هـ}{د س}$ مجرد رمز يعني هَـ (س) وهو نهاية كسر نيوتن. لهذا فان $\frac{د هـ}{د س}$ ليس كسرا بسطه د هـ ومقامه د س وهذه هي نقطة الضعف في هذا الرمز. ولكن العلاقة (٦) هي احدى ثمرات هذا الرمز.

ولحسن الحظ فان استخدام (٦) اسهل من اثباتها.

النظرية ٣ [اقتران الاقتران].

افرض ان هـ : سم ⟵ $\mathbb{C}$ وق : هـ (سم) ⟵ $\mathbb{C}$. فاذا كان هـ قابلا للتفاضل عند أ ∈ سم، وكان ق قابلا للتفاضل عند هـ (أ) كان ق ∘ هـ قابلا للتفاضل عند أ وكان

(ق ∘ هـ)َ (أ) = قَ(هـ (أ)) هَـ (أ).

البرهان.

افرض ان ϵ > ٠ واكتب ب = هـ (أ)، ص = هـ (س). عرّف

ي = أ ص { ١ ، ϵ(١ + | هَـ (أ) | + | قَ (ب) |)$^{-١}$ } . . . . . (٧)

فبما ان ق قابل للتفاضل عند ب فانه يوجد $\delta_١$ > ٠ بحيث ان | ص − ب | < $\delta_١$ تعطي

| ق (ص) − ق (ب) − (ص − ب) قَ (ب) | ≤ ي | ص − ب | . . . . (٨)

وبما ان هـ قابل للتفاضل عند أ فانه يوجد $\delta_٢$ > ٠ بحيث ان | س − أ | < $\delta_٢$ تعطي

| هـ (س) − هـ (أ) − (س − أ) هَـ (أ) | ≤ ي | س − أ | . . . . . (٩)

اذن

| هـ (س) − هـ (أ) | ≤ | س − أ | (| هَـ (أ) | + ى)

≤ | س − أ | (| هَـ (أ) | + ١) > δ١ . . . . (١٠)

اذا كان | س − أ | > δ = أصَ { δ، δ١ (| هَـ (أ) | + ١)⁻¹}

لهذا فانه اذا كان | س − أ | > δ. فان | ص − ب | > δ١ ومن (٨) نحصل على ما يلي.

| ق (ص) − ق (ب) − (س − أ) قَ (ب) هَـ (أ) |

= | ق (ص) − ق (ب) − قَ (ب) { (س − أ) هَـ (أ) − ص + ب + ص − ب } |

≤ ي | ص − ب | + | قَ (ب) | ٠ | ص − ب −(س − أ) هَـ (أ) |

≤ ي | ص − ب | + | قَ (ب) | ٠ ي | س − أ | من (٩)،

≤ ي | س − أ | (| هَـ (أ) | + ١) + | قَ (ب) | ٠ ي | س − أ | من (٩)،

= ي | س − أ | (١ + | هَـ (أ) | + | قَ (ب) |) ≤ ∈. | س − أ | من (٧).

نلخص ما حصلنا عليه بما يلي: | ق (هـ (س)) − ق (هـ (أ)) − (س − أ) قَ (هـ (أ)) هَـ (أ)|

≤ ∈. | س − أ | اذا كان | س − أ | > δ . اذن ق ० هـ قابل للتفاضل عند أ ومشتقته هي قَ (هـ (أ)) هَـ (أ). وهذا يثبت النظرية.

المثال ٨ .

لنتمكن من اعطاء امثلة ذات اهمية على قاعدة اقتران الاقتران سنفترض معرفة بنتائج سنحصل عليها من فصول قادمة تتعلق باقترانات مثل سا (س) (أو $e^{س}$)، لوس ، جا س ، جتا س . فسوف نثبت انه لكل س ∈ R فان

$\frac{د}{د س} e^{س} = e^{س}$ ، $\frac{د}{د س}$ جا س = جتا س ، $\frac{د}{د س}$ جتا س = −جا س.كذلك

لكل س > ٠ فان $\frac{د}{د س}$ لو س = $\frac{١}{س}$.

سنجد مشتقات الاقترانات التالية : ق$_١$ (س) = e$^{س^٢}$ ، ق$_٢$ (س) = جا س^٢ ، ق$_٣$ (س) = جا^٢ س ، ق$_٤$ (س) = جتا^٣ ٢ س ، ق$_٥$ (س) = لوجا س ، ق$_٦$ (س) = جا $\frac{١}{س}$.

حيث الاقترانات ق$_١$ ، ق$_٢$ ، ق$_٣$ ، ق$_٤$ معرفة على R ، ق$_٥$ معرفة حيث جا س > ٠ ، على سبيل المثال ٠ < س < π . كذلك ق$_٦$ معرفة لكل س ≠ ٠ .

بالنسبة لِـ ق$_١$ نأخذ ، في نظرية ٣ : هـ (س) = س^٢ ، ق (س) = e^{س} . لهذا فان ق$_١$ (س) = ق (هـ (س)) . لكن قَ (س) = e^{س} وهَـ (س) = ٢ س ، واذن قَ$_١$ (س) = قَ (هـ (س)) ٠ هَـ (س) = e$^{س^٢}$ ٠ ٢ س . اذن

$$\frac{د}{د س} e^{س^٢} = ٢ س ٠ e^{س^٢} \text{ لكل } س \in R \; ٠ \quad ...... \quad (١١)$$

وبعد التمرين الكافي سيتمكن الطالب من كتابة النتيجة (١١) دون اختيار ق ، هـ . وذلك باخذ مشتقة الأس وضربها في الاقتران e$^{س^٢}$.

وبالنسبة لِـ ق$_٢$ نأخذ هـ (س) = س^٢ ، ق (س) = جا س ، ونحصل على قَ$_٢$ (س) = ٢ س جتا س^٢ . وبالنسبة لِـ ق$_٣$ (س) = جا^٢ س = (جا س)^٢ نأخذ هـ (س) = جا س ، ق (س) = س^٢ واذن ق$_٣$ (س) = ق (هـ (س)) . اذن قَ$_٣$ (س) = ٢ جا س جتا س وهذا يساوي حا ٢ س ، من خواص الاقترانات المثلثية .

كذلك ، نجد ان قَ$_٤$ (س) = -٦ (جتا^٢ ٢ س) جا ٢ س لكل س ∈ R ، وبتحديد س كما ذكرنا نجد ان

$$\frac{د}{د س} \text{ لو جا س} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتا س؛ } \frac{د}{د س} \text{ جا } \left(\frac{١}{س}\right) = - \frac{١}{س^٢} \text{ جتا } \frac{١}{س} .$$

ولمعظم الاقترانات التي ترد في الامثلة الابتدائية مشتقات قابلة للتفاضل. والمثال التالي يبين انه ليس من الصحيح بشكل عام ان المشتقة قابلة للتفاضل.

المثال ٩.

يوجد اقتران ق : R ⟵ R بحيث ان ق قابل للتفاضل اي انه يوجد قَ : R ⟵ R وبحيث ان قَ غير متصل (اذن غير قابل للتفاضل).

نعرف ق (س) = س^{٢} جا $\frac{١}{س}$ عندما س ≠ ٠ وق (٠) = ٠. الآن لكل س ≠ ٠ ومن النظرية ٢ والنظرية ٣ نحصل على:

$$قَ (س) = ٢س جا \frac{١}{س} - جتا \frac{١}{س} \quad .... \quad (١٢)$$

اما بالنسبة لِـ س = ٠ فيجب ان نجدها من التعريف : نأخذ

$$\frac{ق(و) - ق(٠)}{و} = \frac{و^{٢} جا \frac{١}{و}}{و} = و جا \frac{١}{و} ، \quad .... \quad (١٣)$$

حيث و ≠ ٠. وباستخدام الحقيقة القائلة ان | جا $\frac{١}{و}$ | ≤ ١ لكل و ≠ ٠ نحصل من (١٣) على قَ(٠) = ٠ اذن قَ موجودة على R . فلو كان قَ متصلا عند الصفر لحصلنا على قَ (س) ⟵ قَ (٠) عندما س ⟵ ٠، وهذا يعطي جتا $\frac{١}{س}$ ⟵ ٠ عندما س ⟵ ٠، لان ٢س جا $\frac{١}{س}$ ⟵ ٠ عندما س ⟵ ٠. اذن يوجد δ > ٠ بحيث ان ٠ < | س | < δ تعطي | جتا $\frac{١}{س}$ | < ١. الان نأخذ ن ∈ N بحيث ان ن > $\frac{١}{٢\pi δ}$ ونأخذ س = $\frac{١}{٢\pi ن}$. اذن ٠ < | س | < δ ومنه | جتا (٢ ن π) | < ١ مما يناقض جتا (٢ ن π) = ١. اذن قَ غير متصل على ٠ مع انه واضح من (١٢) ان قَ متصل على كل نقطة س ≠ ٠

لنأخذ الاقتران ق : سه ← R حيث سه مجموعة غير خالية وجزئية من R . افرض ان ق قابلة للتفاضل على كرة مفتوحة ما، ك (أ ، نق) ⊂ سه ، اي افرض ان قَ (س) موجودة لكل أ - نق < س < أ + نق حيث (أ - نق ، أ + نق) ⊂ سه . نقول ان ق قابلة للتفاضل مرتين اذا وفقط اذا كان قَ قابلا للتفاضل اي انه يوجد

$$(قَ)َ (أ) = نها_{س \leftarrow أ} \frac{قَ (س) - قَ (أ)}{س - أ} .$$

اذا كان ق قابلا للتفاضل مرتين فاننا نستعمل الرموز التالية لتعني (قَ)َ(س) : قً (س) ، ق $^{(٢)}$ (س) ، د^{٢}ق (س) ، $\frac{د^{٢}ق}{دس^{٢}}$. واذا كان قً موجودا فان قَ يكون متصلا حسب المثال ٢ .

والمشتقة الثانية هامة في الميكانيكا : حيث نعرف تسارع الجسيم بانه $\frac{د^{٢}ف}{د ن^{٢}}$ ، حيث ف = ف (ن) هي المسافة التي يقطعها الجسيم في الزمن ن . اما السرعة ع للجسيم فتعرف بِـ ع = $\frac{د ف}{د ن}$ ؛ لهذا فان التسارع هو $\frac{د ع}{د ن}$.

ونرمز للمشتقة من الرتبة ن، ان وجدت، باحد الرموز:

ق $^{(ن)}$ (س)، د^{ن} ق (س)، $\frac{د^{ن} ق}{د س^{ن}}$. ونتعارف على ان ق $^{(٠)}$ = ق .

واذا اردنا دراسة مشتقات عليا لاقترانات حقيقية اومركبة، معرفة على مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ ، فان كل ما نفعله هو استبدال الكرة المفتوحة بقرص مفتوح قر (أ ، نق)، ثم نمضي كما سبق .

المثال ١٠ .

افرض ان ن $\in$ N وق (ع) = ع^{ن} . فمن (٥) وجدنا انه لكل ع $\in$ $\mathbb{C}$ ، ق$^{(١)}$ (ع) = ن ع$^{ن-١}$ ، ق$^{(٢)}$ (ع) = ن (ن − ١) ع$^{ن-٢}$ ، . . . ، ق$^{(ن)}$ (ع) = ن! وَق$^{(ر)}$ (ع) = ٠ لكل ر $>$ ن .

كذلك اذا كان هـ (ع) = $\frac{١}{ع}$ ، ع $\neq$ ٠ فاننا نجد ان هـ$^{(ن)}$ (ع) = (−١)^{ن} ن! ع$^{-ن-١}$ لكل ن $\in$ N .

المثال ١١ .

عرّف ق : R ⟵ R بـ ق (س) = س^{٢} لكل س $\geqslant$ ٠ وَق (س) = ٠ لكل س $<$ ٠ .

اذن ق$^{(١)}$ (س) = ٢ س لكل س $\geqslant$ ٠ ، ق$^{(١)}$ (س) = ٠ لكل س $<$ ٠ . اذن نرى ان ق$^{(١)}$ متصـــل على R . ولكن ق$^{(٢)}$ (٠) غير موجـــودة لأن $\frac{ق^{(١)}(س)}{س}$ ← ٢ (س ← ٠+) و $\frac{ق^{(١)}(س)}{س}$ ← ٠ (س ← ٠−).

النظرية ٤ .

عندما تكون المشتقة التي رتبتها ن موجودة فانه لكل ب ، حـ $\in$ $\mathbb{C}$ يكون

(١) د^{ن} (ب ق + حـ هـ) = ب د^{ن} ق + حـ د^{ن} هـ.

(٢) د^{ن} (ق هـ) = $\sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر}$ د^{ر}ق · د$^{ن-ر}$ هـ [نظرية ليبنتس].

البرهان .

(١) واضح وينتج مباشرة من النظرية ٢ . قبل اثبات نظرية ليبنتس نلاحظ التشابه بينها

وبين نظرية ذات الحدين لعددين مركبين أ ، ب :

$$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{أ}^{\text{ر}} \text{ب}^{\text{ن}-\text{ر}}.$$

نرى ان (٢) صحيحة لِـ ن = ١ ، من النظرية ٢ ومن $\text{د}^{(0)}$ ق = ق . نستمر الآن بالاستقراء ونفرض ان (٢) صحيحة لِـ مـ $\in$ N حيث $1 \leqslant$ مـ $<$ ن. اذن

$$\text{د}^{\text{م}}(\text{ق هـ}) = \text{ق د}^{\text{م}}\text{هـ} + \binom{\text{م}}{1}\text{دق} \cdot \text{د}^{\text{م}-1}\text{هـ} + \binom{\text{م}}{2}\text{د}^2\text{ق} \cdot \text{د}^{\text{م}-2}\text{هـ} + \ldots + \text{د}^{\text{م}}\text{ق} \cdot \text{هـ}$$

وبمفاضلة الطرفين نحصل على ان $\text{د}^{\text{م}+1}$ (ق · هـ) يساوي

$$\text{ق} \cdot \text{د}^{\text{م}+1}\text{هـ} + \text{دق} \cdot \text{د}^{\text{م}}\text{هـ} + \binom{\text{م}}{1}\text{دق} \cdot \text{د}^{\text{م}}\text{هـ} + \binom{\text{م}}{1}\text{د}^2\text{ق} \cdot \text{د}^{\text{م}-1}\text{هـ} + \ldots + \text{د}^{\text{م}+1}\text{ق} \cdot \text{هـ} = \text{ق} \cdot \text{د}^{\text{م}+1}\text{هـ} + \binom{\text{م}+1}{1}\text{دق} \cdot \text{د}^{\text{م}}\text{هـ} + \binom{\text{م}+1}{2}\text{د}^2\text{ق د}^{\text{م}-1}\text{هـ} + \ldots + \text{د}^{\text{م}+1}\text{ق} \cdot \text{هـ} = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}+1}\binom{\text{م}+1}{\text{ر}}\text{د}^{\text{ر}}\text{ق د}^{(\text{م}+1-\text{ر})}\text{هـ}$$

حيث استخدمنا

$\binom{\text{م}}{\text{ر}} + \binom{\text{م}}{\text{ر}-1} = \binom{\text{م}+1}{\text{ر}}$ لكل ر = ١ ، ٢ ، . . . ، مـ. وهذا يثبت النظرية .

نريـد الآن ان ندرس قابليـة التفـاضـل في الاقتران العكسي . اي نريد ايجاد $\frac{\text{د س}}{\text{د ص}}$ عندما يكون ص = ق (س) ويكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ معروفا . والنظرية التالية تتعلق باقترانات حقيقية معرفة على فترات مغلقة في R ، وهي تعالج معظم الحالات المهمة .

النظرية ٥ .

افرض ان ق : [أ ، ب] ← R متزايد فعلا ومتصل على [أ ، ب]. فاذا كان أ $<$ حـ $<$ ب وكان $\text{ق}'$ (حـ) $\neq$ ٠ ، فان هـ = ق^{-1} يكون قابلا للتفاضل عند ي = ق (حـ) ويكون $\text{هـ}'$

(ي) = $\frac{1}{\bar{ق}(ح)}$. وبعبارة اخرى اذا كان ص = ق (س)، س = هـ (ص) فان $\frac{د س}{د ص}$ = $\frac{1}{\frac{د ص}{د س}}$ على شرط ان $\frac{د ص}{د س} \neq 0$

البرهان.

من النظرية ١٠ في الفصل ٦، فان $ق^{-1}$ موجودة حيث، $ق^{-1}$: [ق (أ) ، ق (ب)] ← R . افرض ان ق (أ) < ص < ق (ب)، ص ≠ ي. اذن ص = ق (س) لعنصر وحيد س ∋ (أ ، ب)، س ≠ حـ. اذن

$$\frac{هـ (ص) - هـ (ي)}{ص - ي} = \frac{س - ح}{ق (س) - ق (ح)} = \frac{1}{\frac{ق (س) - ق (ح)}{س - ح}} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

الآن ص ← ي تعطي هـ (ص) ← هـ (ي) لان هـ متصل. اذن س ← حـ ونحصل من (١٤) على $\bar{هـ}$ (ي) = $\frac{1}{\bar{ق}(ح)}$

المثال ١٢.

سوف نوسع الصيغة $\frac{د}{د س}$ $س^{ن}$ = ن $س^{ن-1}$ لتشمل الحالة عندما يكون ن عددا نسبيا:

اولا افرض ان ن = $\frac{1}{ر}$ حيث ر ∋ N وافرض ان س > ٠

اكتب ص = $س^{ن}$، اذن $ص^{ر}$ = س. ومن النظرية ٥ نحصل على

$$\frac{د ص}{د س} = \left(\frac{د س}{د ص}\right)^{-1} = \frac{1}{ر ص^{ر-1}} = ن ص^{1-ر} = ن س^{ن-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

الآن افرض ان ص = $س^{\frac{ب}{ر}}$ حيث ب ∋ Z ، ر ∋ N وان س > ٠. فمن قاعدة اقتران

الاقتران ومن (١٥) نحصل على

$$\frac{د ص}{د س} = ب (س^{\frac{1}{ر}})^{ب-1} \frac{س^{\frac{1}{ر}-1}}{ر} = \frac{ب}{ر} س^{\frac{ب}{ر}-1}$$

فمثلا لكل س > ٠ نحصل على $\frac{د}{د س} \sqrt{س} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$. يجب ملاحظة ان

ق (س) = $\sqrt{س}$ غير قابل للتفاضل عند الصفر. لان

$$\frac{ق(س) - ق(٠)}{س} = \frac{1}{\sqrt{س}} \leftarrow \infty \quad (س \leftarrow ٠+).$$

وهناك عناصر حـ $\in$ Q حيث ان $\frac{د}{د س} س^{حـ} = حـ س^{حـ-1}$ لكل س $\neq$ ٠، مثلا حـ = $\frac{1}{3}$. في هذه الحالة فان الاقتران ق (س) = $س^3$ متزايد فعلا على R وقَ (س) = $3س^2 >$ ٠ الا عند س = ٠ .

تمارين ٧ ـ ١

(في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اذا كان ق قابلا للتفاضل عند أ فاثبت ان

هـ (أ ، و) = { ق (أ + و) − ق (أ − و) } /٢ و ← قَ (أ) عندما و ← ٠ .

اعط مثالا حيث يكون هـ(أ ، و) ← م (و ← ٠) ولكن ق غير قابل للتفاضل عند أ .

٢ ـ افرض ان ق : R ← R قابل للتفاضل على R . جد متتالية ($هـ_ن$) من اقترانات متصلة على R بحيث ان $نها_ن$ $هـ_ن$ (س) = قَ (س) لكل س $\in$ R

٣ ـ اثبت ان الاقتران هـ : R ← R المعرف بـ هـ (س) = $س^2$ اذا كان س $\in$ Q ، هـ (س) = ٠ اذا كان س $\notin$ Q قابل للتفاضل عند الصفر فقط .

٤ ـ افرض ان ق (س) = س^{٢} على [أ ، ب]. جد حـ ∈ (أ ، ب) بحيث ان ق (ب) − ق (أ) = (ب − أ) قَ (حـ).

٥ ـ عرف ق : R ⟵ R بـ ق (س) = | س |^{٣}. جد المشتقات الاربع الاولى حيث توجد، ارسم مخططات ق ، ق$^{(١)}$ ، ق$^{(٢)}$ ، ق$^{(٣)}$ ، ق$^{(٤)}$ على [−١ ، ١].

٦ ـ عرف ق : R ⟵ R بـ ق (س) = $e^{-س^{-٢}}$ اذا كان س ≠ ٠ وق (٠) = ٠. جد قَ (س) لكل س ∈ R . [يجب حل الحالة س = ٠ لوحدها].

٧ ـ اذا كان ص = ق (ع)، ع = هـ (س) وكان ق ، هـ قابلين للتفاضل مرتين فاثبت ان

$$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{د^{٢}ص}{د ع^{٢}} \left(\frac{د ع}{د س}\right)^{٢} + \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د^{٢}ع}{د س^{٢}}.$$

٨ ـ اذا كان ك (س) = ب$_{٠}$ + ب$_{١}$ (س − أ) + . . . + ب$_{ن}$ (س − أ)^{ن}، اكتب ب$_{٠}$ ، ب$_{١}$ ، . . . ، ب$_{ن}$ بدلالة مشتقات ك عند س = أ، ثم اكتب ٣ − ٢س + ٧س^{٢} − س^{٣} بصيغة حدودية في (س − ٢).

٩ ـ (أ) اذا كانت ك حدودية فاثبت انه يوجد حدودية اخرى ل بحيث ان لَ = ك.

(ب) اثبت انه لا يوجد حدودية ق بحيث ان قَ (س) = $\frac{١}{س}$ لكل س > ٠.

١٠ ـ يتحرك جسيم على خط مستقيم من نقطة الاصل بحيث ان بعده ف عن ٠ بعد اي زمن ن يعطى بـ ف = $e^{أن}$ جا ب ن حيث أ ، ب ثابتان. جد السرعة الاولية والتسارع للجسيم.

١١ ـ [معادلات كوشي وريمان]. افرض ان ق : س$_{ه}$ ⟵ $\mathbb{C}$ قابل للتفاضل عند ع$_{٠}$ ∈ $\mathbb{C}$. اكتب ق (ع) = ل (س ، ص) + ت م (س ، ص) حيث ل ، م حقيقيتان. على سبيل المثال اذا كان ق (ع) = ع^{٢}، ع = س + ت ص فان ل = س^{٢} − ص^{٢} وم = ٢ س ص. كذلك اكتب قَ (ع$_{٠}$) = أ + ت ب حيث أ ، ب أعداد حقيقية. طبق النظرية ١ لتثبت ان ل (س ، ص$_{٠}$)

قابل للتفاضل كاقتران في س وان لَ (س$_0$ ، ص$_0$)= أ.في العادة نكتب ل$_س$ (س$_0$ ، ص$_0$) = أ. اثبت ان ل$_ص$ (س$_0$ ، ص$_0$) = −ب ، م$_س$ (س$_0$ ، ص$_0$) = ب، م$_ص$ (س$_0$ ، ص$_0$) = أ. لهذا فانه عند (س$_0$ ، ص$_0$) نحصل على

ل$_س$ = م$_ص$ ، م$_س$ = −ل$_ص$.

تسمى هاتان المعادلتان معادلتي كوشي وريمان.

عند ايجاد ل$_ص$ عند (س$_0$ ، ص$_0$) فاننا نعتبر ل (س$_0$ ، ص) اقترانا في ص قابلا للتفاضل ونكتب لَ (س$_0$ ، ص$_0$) = ل$_ص$ (س$_0$ ، ص$_0$). ونسمي ل$_س$ ، ل$_ص$ مشتقات ل الجزئية بالنسبة لِـ س ، ص.

حقق معادلتي كوشي وريمان في ق (ع) = ع^2 ، ق (ع) = ع^3.

١٢ ـ جد المشتقة النونية لِـ ق (س) = س e^{س} (س ∈ R) وهـ (س) = س لوس (س > ٠)

١٣ ـ عرف ص = جتا (٣ لو (١ + س)) لكل س > −١. اثبت ان

(س + ١)^2 صً + (س + ١) صَ + ٩ ص = ٠،

استنتج ان

ص$_{ن+2}$ (٠) + (٢ ن + ١) ص$_{ن+1}$ (٠) + (ن^2 + ٩) ص$_ن$ (٠) = ٠، حيث ص$_ن$ = د^ن ص.

١٤ ـ افرض ان حـ > ١ عدد نسبي. وافرض ان ق : ℂ ← ℂ يحقق |ق (ع) − ق (ع*)| ≤ |ع − ع*|^{حـ} لكل ع ، ع* ∈ ℂ.

هل يجب ان يكون ق قابلا للتفاضل؟

١٥ ـ جد اقترانا ق : R ← R بحيث ان ق متزايد فعلا الا على [٠ ، ١] وقابل للاشتقاق على R ويحقق قَ (س) = ٠ لكل س ∈ [٠ ، ١].

١٦ ـ عرف ك : R ← R بـ ك (س) = (س − أ) (س − ب) (س − حـ).

اذا كان أ < ب < حـ فاثبت انه يوجد د ∈ (أ ، ب) بحيث ان كَ (د) = ٠. اثبت ان هذا يبقى صحيحا اذا كان أ < ب = حـ.

١٧ ـ افرض ان ق : R ← R قابل للتفاضل على R ، حيث ق (س) = س (س > ٠)، ق (س) = أ + ب س + حـ س^{٢} + د س^{٣} (٠ ⩽ س ⩽ ١)، ق (س) = -س^{٢} (س > ١) جد قيم أ ، ب ، حـ ، د.

٢ . القيم العظمى والقيم الصغرى

نظهـر المسـائـل التي تتعلق بايجـاد القيم العظمى والصغـرى لاقـتران ما في العـديد من الامور العمليـة والنظـريـة . فعلى سبيـل المثـال اذا وضع احد طرفي قضيب حديدي في حائط ووضع الطرف الآخر على دعامة فان المهندس قد يرغب في معرفة اي نقطة على القضيب يقع عندها اكبر إنثناء . وفي مسائل عملية أخرى يراد ايجاد زاوية القذف التي تعطي اكبر مدى للمقذوف . طبعـا لحل هاتـين المسألتـين نحتاج الى المام بالهندسة والفيزياء وليس فقط بالرياضيات . ولكن حالما توضع المسألة على شكل رياضي فانه يمكن حلها بالطرق التحليلية .

واليـك مسألـة اخـرى مشهـورة هي ايجـاد الشكل في المستوى الذي له محيط مغلق طوله ثابت ويحوي اكبر مساحة ممكنة . كان معروفا للاغريق القدامى ان الدائرة تحوي اكبر مساحة . ولكن لم تحل المسألـة حلا ريـاضيـا الا في النصف الثـاني من القـرن التـاسع عشر . فاذا حددنا الاشكال بمستطيلات فان المسألة تصبح سهلة ويكون المربع هو الشكل الذي يحوي اكبر مساحة .

ويستفـــاد من علم التفـاضـل في حل المســائـل التي تتعلق بالقيم العظمى والصغـرى . والطريقة الاساسية هي ايجاد النقط حـ بحيث ان قَ (حـ) = ٠ وتسمى هذه النقاط نقاطا حرجة وفي العديد من الحالات تكون القيم الصغرى والعظمى نقاطا حرجة ولكن هذا ليس صحيحا دائـما . ويمكن للاقـتران بشكـل عام ان يكـون له قيم عظمى وصغـرى دون ان يكـون قابـلا للتفاضل، ولكن يمكن القول أن معظم الحالات المثيرة للاهتمام يكون بها الاقتران قابلا للتفاضل .

سوف نذكر الآن تعريفين. في كل منهما نأخذ الاقتران ق : سه ← R حيث سه مجموعة جزئية غير خالية في R . وعلى القاريء ان يتذكر تعريف سه°، داخل سه لصلته بالقمم المحلية.

القمة المطلقة: يقال ان ق له قيمة عظمى مطلقة عند أ ∈ سه اذا وفقط اذا كان ق (س) ≥ ق (أ) لكل أ ∈ سه . واذا كان ب ∈ سه بحيث ان ق (س) ≤ ق (ب) لكل ب ∈ سه فان ق له قيمة صغرى مطلقة عند ب. والقمة المطلقة هي قيمة عظمى مطلقة أو قيمة صغرى مطلقة.

القمة المحلية: افرض ان حـ ∈ سه°. تسمى حـ قيمة عظمى محلية لِـ ق اذا وفقط اذا كان يوجد كرة ك (حـ ، نق) ⊂ سه بحيث ان ق (س) ≥ ق (حـ) لكل س ∈ ك (حـ ، نق). ونحصل على تعريف القيمة الصغرى المحلية باستبدال ق (س) ≥ ق (حـ) بِـ ق (س) ≤ ق (حـ). والقمة المحلية هي قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية.

سوف نرمز لمجموعة القيم المحلية بالرمز قمح (ق) أو قمح (ق ، سه) اذا احتجنا الى ذكر مجال الاقتران. ومن المحتمل ان يكون قمح (ق) هو المجموعة الخالية ∅ .

لقد استعملنا كلمة مطلقة في التعريف الاول لاننا هناك نهتم بتغير ق (س) عندما تتحرك س على طول سه. وفي التعريف الثاني انحصر الاهتمام محليا على حـ، وما يهمنا في هذه الحالة هو سلوك ق (س) عندما تكون س قريبة من حـ.

واحيانا نرغب في ان نتحدث عن القمم الفعلية، محلية او مطلقة، ففي هذه الحالات نستبدل ≥ (أو ≤) بِـ < (أو >) في التعاريف السابقة، الا عندما تكون س = أ ، ب أو حـ.

المثال ١٣ .

عرف ق : [٠ ، ١] ← R بـ ق (س) = س . هناك قيمة صغرى مطلقة عند ٠ وقيمة عظمى مطلقة عند ١ . ولكن ٠ ليس قيمة صغرى محلية لان ٠ ليس عنصرا في داخل [٠ ، ١]، كما هو مطلوب في التعريف، وكذلك ١ ليس قيمة عظمى محلية. من الواضح الآن ان قمح (ق) = ∅ .

المثال ١٤ .

عرف ق : [-١ ، ١] ← R بـ ق (س) = | س | . ٠ قيمة صغرى محلية وهي ايضا قيمة صغرى مطلقة . واضح ان قمح (ق) = { ٠ } ، يوجد ايضا قيم عظمى مطلقة عند ١ ، -١ .

المثال ١٥ .

عرف ق : R ← R بـ ق (س) = $س^٣$. نعرف ان ق متزايد فعلا وغير محصور من اعلى أو من أسفل . اذن قمح (ق) = $\varnothing$ ولا يوجد قمم مطلقة .

المثال ١٦

عرف ق : R ← R بـ ق (س) = $س^٢$ (س − $\frac{٣}{٢}$) . إن رسمنا مخطط هذا الاقتران يوحي بأن له قيمة عظمى محلية عند الصفر، وقيمة صغرى محلية عند ١ . فاذا كان س $\in$ ك (٠ ، ١) = (-١ ، ١) فان س < $\frac{٣}{٢}$، ومنه ق (س) $\leqslant$ ٠ = ق (٠) لكل س $\in$.ك (٠ ، ١) . اذن ٠ هو قيمة عظمى محلية .

لندرس الآن سلوك ق عند س = ١ . نكتب س = ١ + و اذن ق (س) − ق (١) = $و^٢$ (و + $\frac{٣}{٢}$) $\geqslant$ ٠ ، اذا كان و $\geqslant$ − $\frac{٣}{٢}$. اذن ق (س) $\geqslant$ ق (١) اذا كان −$\frac{١}{٢}$ $\leqslant$ س .

إذن يوجد قيمة صغرى محلية عند ١ . وواضح انه لا يوجد قمم مطلقة .

في الامثلة السابقة لم يكن عندنا طريقة منظمة للبحث عن القمم . لكن في المثال ١٦ لاحظ ان قَ (س) = ٣س (س − ١)، واذن قَ (س) = ٠ اذا وفقط اذا كان س = ٠ أو س = ١ . اذن قَ (س) = ٠ عندما يكون س قمة محلية . ان هذه النتيجة متوقعة هندسيا ، وهي حالة خاصة من النظرية التالية :

النظرية ٦ .

اذا كان ق قابلا للتفاضل عند حـ وكان حـ ∋ قمح (ق) فان قَ (حـ) = ٠

البرهان .

افرض ان حـ قيمة محلية عظمى . اذن ق (س) ⩾ ق (حـ) لكل س ∋ ك (حـ ، δ)
أي لكل حـ − δ < س < حـ + δ .

لنأخذ الآن حـ < س < حـ + δ اذن ق (س) − ق (حـ) ⩽ ٠ وس − حـ > ٠ ،
لهذا فان كسر نيوتن ك (س ، حـ) ⩽ ٠ . وعندما س ← حـ + نحصل على قَ (حـ) ⩽ ٠ لأن
ق قابل للتفاضل عند حـ .

فاذا اخذنا حـ − δ < س < حـ فان ق (س) − ق (حـ) ⩽ ٠ وس − حـ < ٠ واذن
يكون كسر نيوتن ك (س ، حـ) ⩾ ٠ وعندما س ← حـ − نحصل على قَ (حـ) ⩾ ٠ ومن
قانون التثليث نحصل على قَ (حـ) = ٠ .

وبالمثل نعالج القيم الصغرى المحلية . وهكذا يتم البرهان .

ملاحظة : ان عكس النظرية ٦ خطأ بشكل عام . فعلى سبيل المثال ق (س) = $س^{3}$ على R ،
قَ (٠) = ٠ ولكن ٠ ∌ قمح (ق) .

لنعرف الآن النقطة الحرجة :

النقطة الحرجة : نقول ان حـ هي نقطة حرجة لِـ ق اذا وفقط اذا كان ق قابلا للتفاضل عند حـ
وكان قَ (حـ) = ٠ . سنرمز لمجموعة جميع النقاط الحرجة لِـ ق بالرمز حر (ق) .

فمن النظرية ٦ ينتج ان قمح (ق) ⊂ حر (ق) عندما يكون ق قابلا للتفاضل . ويمكن
ان يكون الاحتواء فعليا كما نرى من المثال ق (س) = $س^{3}$ على R .

وفي مسائل القمم ما نفعله عادة هو ان نجد حر (ق) اولا ثم نحذف النقاط الحرجة التي
لا تكون قمما محلية ونحصل على قمح (ق) .

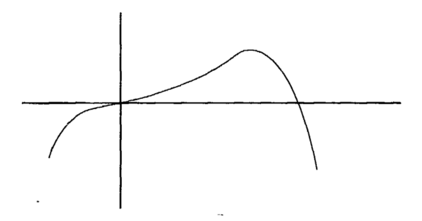
المثال ١٧ .

عرف ق : $R \longrightarrow R$ بـ ق (س) = $س^{٣}$ (١ − س). اذن قَ (س) = $٣س^{٢} - ٤س^{٣}$

وهذا يساوي صفرا اذا وفقط اذا كان س = ٠ أوس = $\frac{٣}{٤}$. اذن حر(ق) = $\{ ٠ ، \frac{٣}{٤} \}$.

وعلينا ان ندرس نقاط هذه المجموعة لمعرفة اي منها قمة محلية. فاذا كان ٠ < س < ١ فان ق (س) > ٠ ، واذا كان س < ٠ فان ق (س) < ٠، ٠ $\notin$ قمح (ق).

الآن نكتب س = و+ $\frac{٣}{٤}$. فنجد ان ق ($\frac{٣}{٤}$) − ق (س) حدودية في و ونرى انها تكون غير سالبة اذا كانت و صغيرة. اذن يوجد عند $\frac{٣}{٤}$ قيمة عظمى محلية. وفي الشكل التالي مخطط الاقتران ص = $س^{٣}$ (١ − س)



وسنعطي في البنود القادمة طرقا افضل لايجاد القمم المحلية وهذه الطرق تبحث في اشارة قَ والمشتقات العليا (ان وجدت) وتعتمد هذه الطرق على «نظرية القيمة المتوسطة».

والنظرية التالية تعطي شروطا كافية بسيطة لكي يكون للاقتران نقطة حرجة في فترة ما. وهي منسوبة الى «مايكل رول» (١٦٥٢ ـ ١٧١٩) ولها نتائج هامة، اهمها نظرية القيمة المتوسطة) التي سنذكرها في البند القادم.

النظرية ٧ [نظرية رول].

افرض ان ق يحقق شروط رول الثلاثة التالية :

(أ) ق : [أ ، ب] ⟵ R ،

(ب) ق متصل على الفترة المغلقة [أ ، ب]،

(حـ) ق قابل للتفاضل على الفترة المفتوحة (أ ، ب).

اذن اذا كان ق (أ) = ق (ب) فانه يوجد نقطة واحدة على الاقل حـ ∈ (أ ، ب) بحيث ان قَ (حـ) = ٠ اي انه يوجد لِـ ق نقطة حرجة واحدة على الاقل في الفترة (أ ، ب).

البرهان.

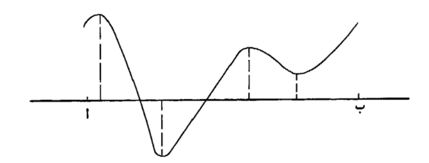
نأخذ حالتين. اولا اذا كان ق ثابتا اي ان ق (س) = ق (أ) لكل س ∈ [أ ، ب] فان قَ (س) = ٠ لكل س ∈ (أ ، ب) واذن اي نقطة حـ ∈ (أ ، ب) هي نقطة حرجة.

ثانيا، افرض ان ق غير ثابت، اذن يوجد س. ∈ (أ ، ب) بحيث ان ق (س.) ≠ ق (أ). افرض ان ق (س.) > ق (أ)، والحالة الثانية ق (س.) < ق (أ) مشابهة. الآن ق متصل على [أ ، ب] اذن من النظرية ٧ في الفصل ٦ نحصل على ان ق يأخذ قيمة ص.ح.ع (ق). اي انه يوجد قيمة عظمى مطلقة لِـ ق عند نقطة ما حـ ∈ [أ ، ب]. اذن ق (حـ) ≥ ق (س) لكل س ∈ [أ ، ب] واذن ق (حـ) ≥ ق (س.) > ق (أ). وبما ان ق (أ) = ق (ب) و ق (س) > ق (أ) فانه ينتج ان أ < حـ < ب، اي ان، حـ ∈ (أ ، ب).

لكن ق قابل للتفاضل عند حـ وق (حـ) ≥ ق (س) لكل س ∈ [أ ، ب] تعطي انه يوجد قيمة عظمى محلية لِـ ق عند حـ. ومن النظرية ٦ نستنتج ان قَ (حـ) = ٠.

واذا كان ق (س.) < ق (أ) فاننا نرى انه يوجد لِـ ق قيمة صغرى محلية عند نقطة ما في داخل [أ ، ب] ونحصل ثانية على نقطة حرجة. وهذا يثبت النظرية.

والشكل التالي يوضح نظرية رول لاقتران له اربع نقاط حرجة.



وفي المستقبل سنرمز لمجموعة جميع الاقترانات التي تحقق شروط رول الثلاثة (أ) ، (ب) ، (حـ) بالرمز رول [أ ، ب].

المثال ١٨ .

(١) لأي فترة [أ ، ب] ولكل حدودية ك فان ك ∋ رول [أ ، ب].

(٢) عرف ق : [-١ ، ١] ⟵ R بـ ق (س) = $\sqrt{١ - س^{٢}}$. فمخطط ص = ق (س) هو نصف دائرة مركزها نقطة الاصل. ان ق ∋ رول [-١ ، ١] وفي هذه الحالة فان ق غير قابل للتفاضل عند ± ١ .

والمثال التالي يبين انه بالامكان استخدام نظرية رول لايجاد جذور معادلات.

المثال ١٩ .

اثبت انه يوجد للمعادلة ٥س^{٤} - ٤س + ١ = ٠ جذر بين ٠ وَ١ . لنأخذ الاقتران ق (س) = س^{٥} - ٢س^{٢} + س . اذن ق (٠) = ق (١) ومن نظرية رول على [٠ ، ١] نرى انه يوجد حـ ∋ (٠ ، ١) بحيث ان قَ (حـ) = ٠ ، أي ان ٥حـ^{٤} - ٤حـ + ١ = ٠ . اذن حـ هو جذر للمعادلة. لاحظ ان الفكرة كانت ايجاد اقتران تكون مشتقته هي الاقتران الذي نريد ايجاد اصفاره.

تمارين ٧ ـ ٢

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

١ ـ عين المجموعات حر (نقاط حرجة)، قمح (قمم محلية)، قمط (قمم مطلقة) لكل من: (أ) $(س - ١)^٢ (س + ٢)^٣$ على R ، (٢) $س^٣ - ١٢س + ٢٠$ على [−٣ ، ٥]، (٣) حاس + جتاس على [٠ ، π].

٢ ـ اثبت انه من بين جميع المستطيلات التي لها محيط معين م ، فان المربع اكبرها مساحة.

٣ ـ على فرض ان مـ ، ن ∈ N ، حقق نظرية رول في الحدودية ق (س) = $س^{م} (١ - س)^{ن}$ على [٠ ، ١] بايجاد قيمة حـ مناسبة.

٤ ـ أعط مثالا لاقتران يأخذ قيما حقيقية ق ∈ رول [−٢ ، ٢] بحيث ان ق (−٢) = ق (٢) وله نقطة حرجة وحيدة في (−٢ ، ٢).

٥ ـ باستخدام العمليات الجبرية العادية على الاقترانات (انظر الفصل ٦ البند ٣)، اثبت ان رول [أ ، ب] هي جبرية تبديلية لها عنصر محايد.

٦ ـ اثبت انه يوجد للمعادلة $٤ أ س^٣ + ٣ ب س^٢ + ٢ حـ س = أ + ب + حـ$ جذر واحد على الاقل بين الصفر و ١ .

٧ ـ على فرض ان $\frac{أ_٠}{ن + ١} + \frac{أ_١}{ن} + \ldots + أ_ن = ٠$ ، اثبت انه يوجد للمعادلة:

$أ_٠ س^{ن} + أ_١ س^{ن-١} + \ldots + أ_ن = ٠$ جذر بين الصفر و ١ .

٨ ـ على فرض ان ق (س) = $أ_٠ + أ_١ س + \ldots + أ_ن س^{ن}$ حدودية حقيقية لها (ن + ١) صفرا مختلفا ، استخدم نظرية رول لاثبات ان $أ_ر = ٠$ لكل $٠ \leqslant ر \leqslant ن$.

استنتج ان الاقتران الدوري الذي يكون نسبيا يجب ان يكون ثابتا.

٩ - [نظرية داربو Darboux]

افرض ان ق : [أ ، ب] ⟵ R قابل للتفاضل على [أ ، ب] وافرض ان قَ (أ) > قَ (ب). فاذا كان ط عددا بين قَ (أ)، قَ (ب) فاثبت انه يوجد حـ ∈ (أ ، ب) بحيث ان قَ (حـ) = ط. هذا يثبت انه مع ان قَ قد لا يكون متصلا الا انه يأخذ قيما وسيطية. [ارشاد: خذ الاقتران هـ (س) = ق (س) − ط س الذي هو متصل على [أ ، ب]، اذن هـ يأخذ قيمة ك.ح.د (هـ) على نقطة ما حـ ∈ [أ ، ب]. ثم استخدم هَـ (أ) > ٠ > هَـ (ب) لاثبات ان أ > حـ > ب].

٣. نظريات القيمة المتوسطة

تعتبر نظريات القيمة المتوسطة من اهم نظريات التحليل. والنظرية الاساسية فيها هي امتداد لنظرية رول. ويدعى هذا الامتداد «نظرية القيمة المتوسطة» وهي تعالج الحالة عندما يكون ق ∈ رول[أ ، ب] ولكن ق (أ) ≠ ق (ب).

وتنص هذه النظرية (سنثبتها فيما بعد) انه اذا كان ق : [أ ، ب] ⟵ R متصلا على [أ ، ب] وقابلا للتفاضل على (أ ، ب)، اي ان ق ∈ رول[أ ، ب] فانه يوجد حـ ∈ (أ ، ب) بحيث ان

ق (ب) − ق (أ) = (ب − أ) قَ (حـ) . . . . (١٦)

من الواضح ان نظرية رول هي حالة خاصة من نظرية القيمة المتوسطة لانه اذا كان ق (أ) = ق (ب) فان (١٦) تعطي (ب − أ) قَ (حـ) = ٠، واذن قَ (حـ) = ٠.

واليك نتيجتين هامتين لنظرية القيمة المتوسطة: (١) اذا كان قَ (س) = ٠ على (أ ، ب) فان ق يكون ثابتاً على [أ ، ب]. (٢) اذا كان قَ (س) > ٠ على (أ ، ب) فان ق يكون

متزايدا فعلا على [أ ، ب].

تمكننا نظرية القيمة المتوسطة من الحصول على معلومات عن الاقتران اذا عرفنا معلومات كافية عن مشتقته. ففي كثير من الحالات العملية تكون معاملة مشتقة الاقتران اسهل من معاملة الاقتران نفسه.

بالنسبة للاقترانات التي لها مشتقات اعلى على فترة ما، فهناك نظرية القيمة المتوسطة النونية (نظرية تايلور مع الباقي) التي هي قيِّمة في حالات عديدة في ايجاد متسلسلات القوى للاقترانات الاولية. كذلك فان نظرية القيمة المتوسطة تعطي معلومات قيِّمة عن القمم المحلية للاقترانات القابلة للتفاضل.

ويمكن استنتاج نظريات القيمة المتوسطة بتطبيق نظرية رول على اقترانات مناسبة نختارها. ويمكن ان نجعل بعض البراهين سهلة التذكر اذا استخدمنا المحددات لايجاد الاقتران المناسب. سنذكر الآن التعاريف الاساسية وبعض الحقائق عن المحددات من الرتبة ٢ × ٢ أو ٣ × ٣.

افرض ان

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة من الاعداد الحقيقية من الرتبة ٢ × ٢. فان محددة أ تعرف على انها العدد الحقيقي م الذي يساوي $\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1$، ونكتب

$$\text{م} = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٧)$$

وفي الحقيقة اننا لا نحتاج الى اي معرفة بالمصفوفات ويمكن اعتبار:

$$\begin{vmatrix} أ_٢ & أ_١ \\ ب_٢ & ب_١ \end{vmatrix}$$

طريقة لكتابة $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١$. من المهم ان تظل المدخلات $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $ب_١$ ، $ب_٢$ ، كما هي مرتبة.لهذا، وعلى سبيل المثال فان

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١ \text{ ، ولكن } \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = -٥ . \qquad (١٧)$$

واذا كان صفًا م متطابقين فان (١٧) تعطي ان

$$م = \begin{vmatrix} أ_٢ & أ_١ \\ أ_٢ & أ_١ \end{vmatrix} = ٠ \qquad (١٨)$$

كذلك م = ٠ اذا كان عمودا م متطابقين.

واذا كان $أ_١$ ، $أ_٢$ اقترانين في س قابلين للتفاضل وكان $ب_١$ ، $ب_٢$ ثابتين فان (١٧) تعطي

$$مَ(س) = أَ_١(س) ب_٢ - أَ_٢(س) ب_١ .$$

اذن

$$مَ(س) = \begin{vmatrix} أَ_٢(س) & أَ_١(س) \\ ب_٢ & ب_١ \end{vmatrix} \qquad (١٩)$$

لهذا فاننا نفاضل السطر الاول من م عندما يكون السطر الاول قابلا للتفاضل ويكون السطر الثاني ثابتا.

افرض الآن ان

$$أ = \begin{pmatrix} أ_٣ & أ_٢ & أ_١ \\ ب_٣ & ب_٢ & ب_١ \\ حـ_٣ & حـ_٢ & حـ_١ \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٣ من الاعداد الحقيقية . نعرف محددة أ على انها

$$م = \begin{vmatrix} أ_1 & أ_2 & أ_3 \\ ب_1 & ب_2 & ب_3 \\ ح_1 & ح_2 & ح_3 \end{vmatrix} = أ_1 \begin{vmatrix} ب_2 & ب_3 \\ ح_2 & ح_3 \end{vmatrix} -$$

$$أ_2 \begin{vmatrix} ب_1 & ب_3 \\ ح_1 & ح_3 \end{vmatrix} + أ_3 \begin{vmatrix} ب_1 & ب_2 \\ ح_1 & ح_2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \qquad (٢٠)$$

ومن (٢٠) وعملية حسابية بسيطة نحصل على تعميم (١٨) :

اذا كان اي سطرين من م متطابقين فان م = ٠ . . . . . . (٢١)

لهذا، وعلى سبيل المثال

$$\begin{vmatrix} أ_1 & أ_2 & أ_3 \\ ب_1 & ب_2 & ب_3 \\ أ_1 & أ_2 & أ_3 \end{vmatrix} = ٠ .$$

اذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ اقترانات في س قابلة للتفاضل وكانت $ب_1$ ، $ب_2$ ، $ب_3$ ، $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ثوابت فاننا نجد من (٢٠) نتيجة مشابهة لِـ (١٩) وهي :

$$مَ(س) = \begin{vmatrix} أَ_1(س) & أَ_2(س) & أَ_3(س) \\ ب_1 & ب_2 & ب_3 \\ ح_1 & ح_2 & ح_3 \end{vmatrix} \qquad (٢٢)$$

ويمكن تعميم هذه النتائج الى محددات برتب اعلى . فمثلا اذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٤ × ٤ حيث الاسطر أ ، ب ، حـ ، د فاننا نكتب، للتبسيط،

$$\begin{vmatrix} أ_{٣٢١} \\ ب_{٣٢١} \\ حـ_{٣٢١} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ_{١} & أ_{٢} & أ_{٣} \\ ب_{١} & ب_{٢} & ب_{٣} \\ حـ_{١} & حـ_{٢} & حـ_{٣} \end{vmatrix}$$

الخ، اذن نعرف محددة أ على انها

$$أ_{١} \begin{vmatrix} ب_{٤٣٢} \\ حـ_{٤٣٢} \\ د_{٤٣٢} \end{vmatrix} - أ_{٢} \begin{vmatrix} ب_{٤٣١} \\ حـ_{٤٣١} \\ د_{٤٣١} \end{vmatrix} + أ_{٣} \begin{vmatrix} ب_{٤٢١} \\ حـ_{٤٢١} \\ د_{٤٢١} \end{vmatrix} - أ_{٤} \begin{vmatrix} ب_{٣٢١} \\ حـ_{٣٢١} \\ د_{٣٢١} \end{vmatrix}$$

بامكـانـنـا الآن اثبات نظرية تعطي نظرية القيمة المتوسطة كنتيجة، وكذلك تعطي نتيجة تعرف باسم «نظرية كوشي للقيمة المتوسطة».

النظرية ٨.

افرض ان ق ، هـ ∋ رول [أ ، ب]. اذن يوجد حـ ∋ (أ ، ب) بحيث ان

ق̄ (حـ) [هـ (ب) − هـ (أ)] = هـَ (حـ) (ق (ب) − ق (أ)) . . (٢٣)

البرهان.

خذ الاقتران م : [أ ، ب] ← R المعرف بالمحددة

$$م (س) = \begin{vmatrix} ق (س) & هـ (س) & ١ \\ ق (أ) & هـ (أ) & ١ \\ ق (ب) & هـ (ب) & ١ \end{vmatrix}$$

اذن م ∋ رول [أ ، ب] لان ق ، هـ ∋ رول [أ ، ب]. الآن سطرا م (أ) الاولان متماثلان. اذن م (أ) = ٠ حسب (٢١). كذلك م (ب) = ٠ لان السطرين الاول والثالث متماثلان. اذن

م (أ) = م (ب) = ٠، ويمكن تطبيق نظرية رول على م. ومنه يوجد حـ ∋ (أ ، ب) بحيث ان مَ (حـ) = ٠. اذن من (٢٢) نحصل على

$$\begin{vmatrix} \text{ق}'(\text{حـ}) & \text{هـ}'(\text{حـ}) & ٠ \\ \text{ق}(\text{أ}) & \text{هـ}(\text{أ}) & ١ \\ \text{ق}(\text{ب}) & \text{هـ}(\text{ب}) & ١ \end{vmatrix} = ٠ .$$

من التعريف (٢٠) نحصل على قَ (حـ) (هـ(أ) - هـ (ب)) = هَـ (حـ) (ق (أ) - ق (ب))، وهي النتيجة المطلوبة.

النظرية ٩ [نظرية القيمة المتوسطة].

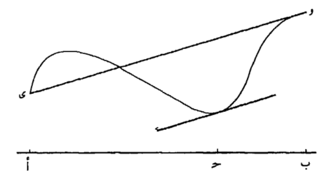
اذا كان ق ∋ .رول [أ ، ب] فانه يوجد على الاقل عدد واحد حـ ∋ (أ ، ب) بحيث ان

ق (ب) - ق (أ) = (ب - أ) قَ (حـ). . . . . (٢٤)

البرهان.

خذ هـ (س) = س في النظرية ٨. اذن هـ (ب) - هـ (أ) = ب - أ، هَـ (س) = ١ لكل س ∋ [أ ، ب]. لهذا فان (٢٣) تعطي (٢٤) مما يثبت النظرية.

ومن السهل اعطاء تفسير هندسي لنظرية القيمة المتوسطة:



إن ميل الوتر ى وهو $\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$ ، وميل المماس عند النقطة (حـ ، ق (حـ)) هو

قَ (حـ) . وتنص نظرية القيمة المتوسطة على انه يوجد نقطة حـ بحيث ان ميل المماس عندها يساوي ميل الوتر ى و. ويتضح من الرسم انه قد يوجد اكثر من نقطة تحقق (٢٤) .

المثال ٢٠ .

عرف ق (س) = س^{٣} − ٥س^{٢} − ٣س على [أ ، ب] = [١ ، ٣]. سنجد كل النقط حـ ∈ (أ ، ب) بحيث ان ق (ب) − ق (أ) = (ب − أ) قَ (حـ).

نحتاج لحل المعادلة قَ (س) = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٢}$ = − ١٠ . اي، ٣س^{٢} − ١٠س + ٧ = ٠ والحلان هما ١ ، $\frac{٧}{٣}$. اذن حـ = $\frac{٧}{٣}$ هي الحل الوحيد الموجود في الفترة المفتوحة (أ ، ب).

والنتيجة الثانية للنظرية ٨ هي :

النظرية ١٠ [نظرية كوشي للقيمة المتوسطة].

اذا كان ق ، هـ ∈ رول [أ ، ب] وكان هَـ (س) ≠ ٠ لكل س ∈ (أ ، ب) فانه يوجد حـ ∈ (أ ، ب) بحيث ان

$$\frac{ق(ب) - ق(أ)}{هـ(ب) - هـ(أ)} = \frac{قَ(حـ)}{هَـ(حـ)} \qquad (٢٥)$$

البرهان

من النظرية ٨ نرى ان (٢٣) تتحقق لعنصر ما حـ ∈ (أ ، ب). وبما ان هَـ (س) ≠ ٠ على (أ ، ب) فان هَـ (حـ) ≠ ٠ . كذلك وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على حـ نحصل

على هـ (ب) − هـ (أ) = (ب − أ) هَـ (و) لعنصر ما و ∋ (أ ، ب). لاحظ اننا لا نستطيع ان نفرض ان و = حـ. وبما ان هَـ (و) ≠ ٠ فان هـ (ب) − هـ (أ) ≠ ٠ ويمكن استنتاج (٢٥) من قسمة (٢٣) على العدد الذي لا يساوي الصفر: هَـ (حـ) (هـ (ب) − هـ (أ)).

نتائج لنظرية القيمة المتوسطة.

(١) اذا كان ق ∋ رول [أ ، ب] وكان قَ (س) = ٠ لكل س ∋ (أ ، ب) فان ق يكون ثابتا على [أ ، ب]، والعكس صحيح.

(٢) اذا كان ق ∋ رول [أ ، ب] وكان قَ (س) > ٠ (< ٠) لكل س ∋ (أ ، ب) فان ق يكون متزايدا فعلا (متناقصا فعلا) على [أ ، ب]. والعكس غير صحيح.

البرهان.

(١) افرض ان أ < س ≥ ب. فمن نظرية القيمة المتوسطة فانه يوجد حـ ∋ (أ ، س) بحيث ان ق (س) = ق (أ) + (س − أ) قَ (حـ). وبما ان قَ (حـ) = ٠ فاننا نحصل على ق (س) = ق (أ). اذن ق ثابت.

بالعكس، اذا كان ق ثابتا على [أ ، ب] فان ق ∋ رول [أ ، ب] وقَ (س) = ٠ على (أ ، ب)

(٢) افرض ان قَ (س) > ٠ على (أ ، ب). خذ أ ≥ $س_١$ < $س_٢$ ≥ ب. اذن من نظرية القيمة المتوسطة فانه يوجد $س_٣$ ∋ ($س_١$ ، $س_٢$) بحيث ان ق ($س_٢$) − ق ($س_١$) = ($س_٢$ − $س_١$) قَ ($س_٣$) > ٠ لان $س_٢$ > $س_١$ وقَ ($س_٣$) > ٠ لان أ ≥ $س_١$ < $س_٣$ < $س_٢$ ≥ ب. اذن ق متزايد فعلا. وبرهان الحالة قَ (س) < ٠ مشابه.

وقد بين المثال ق (س) = $س^٣$ على [−١ ، ١] ان ق قد يكون متزايدا فعلا دون ان يكون قَ (س) > ٠. وفي هذه الحالة قَ (٠) = ٠.

المثال ٢١ .

اثبت ان $\sqrt{١ + س} < ١ + \frac{س}{٢}$ على [-١ ، ٠]. لاثبات ذلك نأخذ الاقتران

$$ق(س) = \sqrt{١ + س} - ١ - \frac{س}{٢} .$$

اذن ق ∋ رول [-١ ، ٠] وَقَ(س) = $\frac{١}{٢}((١ + س)^{-\frac{١}{٢}} - ١)$ > ٠ لكل س ∋ (-١ ، ٠). اذن ق متزايد فعلا على [-١ ، ٠] واذن ق (س) > ق (٠) اذا كان -١ ≥ س > ٠ .
ولكن ق (٠) = ٠، اذن فقد تم اثبات المتباينة .

ويمكن استخدام نظرية كوشي للقيمة المتوسطة لاثبات نتيجة (قاعدة لوبتال) تستخدم لايجاد نهايات من النوع

$$نها_{س \leftarrow أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} \text{ ، حيث ق (أ) = هـ (أ) = ٠ } \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (٢٦)$$

ولا معنى لتعويض أ مباشرة في $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ حيث ينتج $\frac{٠}{٠}$. وتدعى مثل هذه العبارات صيغا غير معينة . ان الهدف هو حساب النهاية في (٢٦)، ان وجدت .

والنظرية التالية تنسب الى لوبتال (١٦٦١ ـ ١٧٠٤)

النظرية ١١ [قاعدة لوبتال] .

افرض ان ق (أ) = هـ (أ) = ٠ وافرض انه يوجد و > ٠ بحيث يكون ق ، هـ قابلين للتفاضل في |س - أ| > و ويكون هَـ(س) ≠ ٠ في ٠ > |س - أ| > و. فاذا كان

$$\frac{قَ(س)}{هَـ(س)} \leftarrow م \ (س \leftarrow أ) \text{ فان } \frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م \ (س \leftarrow أ).$$

البرهان.

خذ $أ < س < أ + و$. فمن نظرية كوشي للقيمة المتوسطة فانه يوجد $حـ \in (أ ، س)$ بحيث ان

$$\frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{ق(س) - ق(أ)}{هـ(س) - هـ(أ)} = \frac{قَ(حـ)}{هَـ(حـ)} \quad \ldots\ldots\ldots (٢٧)$$

ولكن $س \leftarrow أ^+$ تعطي $حـ \leftarrow أ^+$ واذن (٢٧) تعطي $\frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م \; (س \leftarrow أ^+)$.

وبطريقة مشابهة نجد ان $\frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م$ عندما $س \leftarrow أ^-$ وهذا يثبت النظرية.

المثال ٢٢.

(١) لنجد $نها_{س \leftarrow ١} \frac{س^٥ - ١}{س^٢ - ١}$. هذه صيغة غير معينة حيث $ق(س) = س^٥ - ١$، $هـ(س) = س^٢ - ١$. لدينا $ق(١) = هـ(١) = ٠$، ق، هـ قابلان للتفاضل لكل س، $هَـ(س) = ٢س \neq ٠$ بالقرب من ١. الآن $\frac{قَ(س)}{هَـ(س)} = \frac{٥س^٤}{٢س} \leftarrow \frac{٥}{٢} \; (س \leftarrow ١)$. اذن، وباستخدام قاعدة لوبتال، نحصل على

$$نها_{س \leftarrow ١} \frac{س^٥ - ١}{س^٢ - ١} = \frac{٥}{٢}.$$

(٢) من قاعدة لوبتال فان

$$نها_{س \leftarrow ٠} \frac{لو(١ + س)}{س} = نها_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{١ + س} = ١.$$

من المهم ان نلاحظ ان قاعدة لوبتال تنص على انه تحت شروط معينة فان $\frac{قَ(س)}{هَـ(س)} \leftarrow م$ تعطي $\frac{ق(س)}{هـ(س)} \leftarrow م$. ويمكن ان نبين بأمثلة ان العكس غير

صحيح، اي ان $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ← م لا يعطي بالضرورة $\frac{قَ(س)}{هـَ(س)}$ ← م.

كذلك، عند تطبيق القاعدة فاننا نأخذ $\frac{قَ(س)}{هـَ(س)}$ وليس $(\frac{ق}{هـ})'(س)$.

والنتيجة التالية تعطي اختبارا مفيدا للقمم المحلية للاقترانات القابلة للتفاضل

النظرية ١٢.

(١) اذا كان ق قابلا للتفاضل عند حـ، وكان قَ (حـ) > ٠ فان ق يكون متزايدا فعلا عند حـ. واذا كان قَ (حـ) < ٠ يكون ق متناقصا فعلا عند حـ.

(٢) اذا كان، بالقرب من حـ، قَ (س) > ٠ لكل س < حـ وَقَ (س) < ٠ لكل س > حـ فانه يوجد قيمة عظمى محلية لِـ ق عند حـ.

(٣) اذا كان قَ (حـ) = ٠، قً (حـ) < ٠ فانه يوجد قيمة عظمى محلية عند حـ.

اذا كان قَ (حـ) = ٠، قً(حـ) > ٠ فانه يوجد قيمة صغرى محلية عند حـ.

البرهان.

(١) لنأخذ الحالة قَ (حـ) > ٠. ان تعريف ق متزايد فعلا عند حـ يعني ان ق (س) < ق (حـ) اذا كان س < حـ وَق (س) > ق (حـ) اذا كان س > حـ لقيم س بالقرب من حـ.

ومن تعريف قَ (حـ) وبأخذ $\epsilon = \frac{قَ(حـ)}{٢}$ فانه يوجد δ > ٠ بحيث ان ٠ < |س - حـ| < δ تعطي

$$\frac{ق(س) - ق(حـ)}{س - حـ} > \frac{قَ(حـ)}{٢} > ٠.$$

اذن، ق (س) < ق (حـ) اذا كان حـ - δ < س < حـ وَق (س) > ق (حـ) اذا كان حـ

> س > حـ + δ .

(٢) اذا كان س > حـ، فانه من نظرية القيمة المتوسطة ق (حـ) − ق (س) = (حـ − س) قَ (و) لعنصر ما و ∈ (س ، حـ). بما ان قَ (و) > ٠ فاننا نحصل على ق (حـ) > ق (س). ويشكل مشابه اذا كان حـ > س فان ق (س) − ق (حـ) = (س − حـ) قَ (ي) حيث حـ > ى > س. لهذا فان قَ (ي) > ٠ تعطي ق (س) > ق (حـ). اذن يوجد نهاية عظمى محلية عند حـ.

(٣) لنأخـذ الحـالـة قً (حـ) > ٠ . فمن (١) ينتـج ان قَ متناقص فعلا عند حـ. اي ان قَ (س) > قَ (حـ) اذا كان س > حـ وقَ (س) > قَ (حـ) اذا كان س > حـ. ولكن قَ (حـ) = ٠، اذن نحصل من (٢) على انه يوجد قيمة عظمى محلية عند حـ.

المثال ٢٣ .

نريـد صنـع وعـاء اسطـواني الشكـل بدون غطاء مسـاحته السطحية متر مربع واحد. ما هي ابعاده بحيث يكون حجمه اكبر ما يمكن؟

افـرض ان نق نصف قطـر القـاعـدة وَع ارتفـاع الاسطـوانة، م مساحتها السطحية، ح الحجم. اذن م = ١ = π نق^{٢} + ٢π نق ع ، ح = π نق^{٢} ع وَنق > ٠.

$$ح = \pi\ نق^{٢}\ (\frac{١ - \pi\ نق^{٢}}{٢\ \pi\ نق}) = \frac{نق}{٢} - \frac{\pi\ نق^{٣}}{٢}$$

الآن حَ (نق) = $\frac{١ - ٣\pi\ نق^{٢}}{٢}$ = ٠ اذا وفقط اذا كان نق = ± $\frac{١}{\sqrt{٣\pi}}$ وبما ان نق > ٠ فيجب ان نأخـذ الاشـارة المـوجبـة. كذلـك حً (نق) = −٣ π نق > ٠ فمن النظرية ١٢ نحصل على انه يوجد نهاية عظمى محلية عند نق = $\frac{١}{\sqrt{٣\pi}}$ ومن الواضح انها قيمة عظمى

مطلقة . اذن نق = ع = $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$ هي الابعاد التي تعطي اكبر حجم ممكن .

لقد درسنا المثال ق (س) = س^{3} . قَ (٠) = ٠ ، واذن الصفر هو نقطة حرجة ولكن لا يوجد عندها قمة محلية لان ق متزايد فعلا ، ومعادلة مماس ق عند (٠ ، ٠) هي م (س) = ق (٠) + س قَ (٠) = ٠ . اذن ق (س) − م (س) يغير اشارته (من السالب الى الموجب) بازدياد س عبر الصفر. وهذا السلوك الذي يسلكه ق − م نموذج لما سندعوه نقطة انعطاف .

فبشكل عام ، اذا كان ق : سه ← R. فاننا نقول ان حـ هي نقطة انعطاف لِـ ق اذا وفقط اذا كان ق قابلا للتفاضل عند حـ وكان ق (س) − م (س) يغير اشارته (من السالب الى الموجب أو من الموجب الى السالب) عندما تزداد س عبر حـ ، حيث س في فترة ما حول حـ . لاحظ اننا لم نشترط ان يكون قَ (حـ) = ٠ . معنى ذلك هندسيا ان المماس يقطع المنحنى عند نقطة الانعطاف .

المثال ٢٤ .

اذا كانت حـ نقطة انعطاف لِـ ق وكان قً (حـ) موجودا فان قً (حـ) = ٠ ، والعكس غير صحيح .

اكتب هـ (س) = ق (س) − م (س) = ق (س) − ق (حـ) −(س − حـ) قَ (حـ) . اذن هـ (حـ) = هَ (حـ) = ٠ ، اذن باستخدام النظرية ١٢ (٣) وتطبيقها على هـ ، نرى ان حـ هي قمة محلية لِـ ق اذا كان قً (حـ) ≠ ٠ . ولكن كون حـ قمة محلية لـ هـ يناقض ان حـ هي نقطة انعطاف لِـ هـ . اذن هً (حـ) = قً (حـ) = ٠

وفي المثال ق (س) = س^{4} على R نرى ان قً (٠) = ٠ ولكن لا يوجد نقطة انعطاف عند الصفر.

تمارين ٧ ـ ٣

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ جد اعدادا حـ تحقق نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق (س) $= \sqrt{١٣ - س^{٢}}$ على [-٢ ، ٣]. وضح بالرسم.

٢ ـ جد اعدادا حـ تحقق نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق (س) = م $س^{٢}$ + ى س + و على [أ ، ب] حيث م ، ى ، و ثوابت.

٣ ـ افرض ان أ = -١ ، ب > ١ واكتب ق (س) = $|س|^{-١}$. بين لماذا لا يحقق ق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [أ ، ب]. اثبت انه اذا كان ب > ١ + $\sqrt{٢}$ فانه يوجد حـ ∈ (أ ، ب) بحيث ان ق (ب) - ق (أ) = (ب - أ) قَ (حـ). يساعدك رسم مخطط ص = ق (س).

٤ ـ بايجاد قيمة المحددة، اثبت ان م (س) المستخدمة في برهان نظرية القيمة المتوسطة يساوي

$$(أ - ب) \{ ق (س) - ق (أ) - \frac{ق (ب) - ق (أ)}{ب - أ} (س - أ) \} .$$

وبتطبيق نظرية رول على الصيغة التي بين القوسين المتعرجين اثبت نظرية القيمة المتوسطة بطريقة اخرى.

٥ ـ افرض ان ق ∈ رول [٠ ، ١]، ق (٠) = ٠، ق (س) > ٠ على (٠ ، ١). بتطبيق نظرية رول على اقتران مناسب اثبت انه يوجد حـ ∈ (٠ ، ١) بحيث ان

$$٢ \frac{قَ (حـ)}{ق (حـ)} = \frac{قَ (١ - حـ)}{ق (١ - حـ)} .$$

هل يوجد و ∈ (٠ ، ١) بحيث ان

$$٣ \frac{قَ (و)}{ق (و)} = \frac{قَ (١ - و)}{ق (١ - و)} ؟$$

٦ ـ افرض ان ق $\in$ رول [أ ، ب] حيث $٠ \leqslant أ < ب$. استخدم نظرية كوشي للقيمة المتوسطة لاثبات انه يوجد حـ ، د ، و $\in$ (أ ، ب) بحيث ان

$$(ب - أ)\ قَ(حـ) = \frac{(ب^٢ - أ^٢)\ قَ(د)}{٢\ د} = \frac{(ب^٣ - أ^٣)\ قَ(و)}{٣\ و^٢}.$$

٧ ـ افرض ان ق : $(٠ ، \infty) \longrightarrow R$ قابل للتفاضل على $(٠ ، \infty)$ بحيث ان قَ(س) $\longrightarrow$ م (س $\longrightarrow \infty$). استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $\frac{ق(س)}{س} \longrightarrow$ م (س $\longrightarrow \infty$).

٨ ـ افرض ان ق : $R \longrightarrow R$ قابل للتفاضل على R بحيث ان قَ محصور على R. اثبت ان اتصال ق منتظم على R. استنتج ان اتصال الاقترانين جاس ، جتاس على R منتظم.

٩ ـ افرض ان ق ، هـ $\in$ رول [أ ، ب] وان $|$قَ(س)$| <$ هَـ(س) على (أ ، ب). اثبت ان $|$ق(أ) - ق(ب)$| <$ هـ(ب) - هـ(أ).

١٠ ـ اذا كان قَ $\in$ رول [أ ، ب] وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(حـ) حيث أ < حـ < ب، اثبت انه يوجد د $\in$ (أ ، ب) بحيث ان قً(د) = ٠.

١١ ـ افرض ان ق : $R \longrightarrow R^+$ يحقق ق(٠) = ١ وَقَ(س) = ق(س) لكل س $\in R$. ادرس الاقتران

$$ق(ب) - ق(س) - (ب - س)\ ق(س) - \{ق(ب) - ١ - ب\}\ (ب - س)^٢\ ب^{-٢}$$

على [٠ ، ١]؛ اثبت ان ق(ب) = ١ + ب + ب^٢ $\frac{ق(حـ)}{٢}$ لعنصر ما حـ $\in$ (٠ ، ب).

استنتج ان ق(ب) > ١ + ب لكل ب > ٠.

١٢ ـ (١) اثبت ان س - $\frac{س^٣}{٦} \leqslant$ جاس $\leqslant$ س لكل س $\geqslant$ ٠.

(٢) افرض ان و $\in Q$ تحقق ٠ < و $\leqslant$ ١. اثبت ان $(١ + س)^و \leqslant ١ + س^و$ لكل س $\geqslant$ ٠، استنتج ان أ $\geqslant$ ٠ ، ب $\geqslant$ ٠ تعطي $(أ + ب)^و \leqslant أ^و + ب^و$.

١٣ ـ جد قيم :

$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{e^{٢\text{س}} - ١}{\text{س}}$ ، و $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} \dfrac{\text{س} - (\text{ن} + ١)\, \text{س}^{\text{ن}+١} + \text{ن}\, \text{س}^{\text{ن}+٢}}{(١ - \text{س})^{٢}}$.

١٤ ـ يراد صنع نافذة على شكل مستطيل فوقه نصف دائرة. فاذا اردنا ان يكون المحيط م ثابتا فجد الابعاد التي تسمح بمرور اكبر كمية من الضوء عبر النافذة.

١٥ ـ يراد وضع اسطوانة دائرية قائمة داخل كرة نصف قطرها أ. جد ارتفاع الاسطوانة التي لها أكبر حجم ممكن.

١٦ ـ من بين جميع المثلثات التي لها محيط ثابت، جد المثلث ذا المساحة العظمى.

١٧ ـ من بين جميع القطوع الناقصة ذات المحيط الثابت جد القطع الناقص ذا المساحة العظمى.

١٨ ـ عرّف ق (س) = $\text{س}^{٣} + \text{ك}\,\text{س}^{٢}$ + ل س + م على R ، حيث ك ، ل ، م ثوابت. اثبت انه يوجد نقطة انعطاف وحيدة حـ.

١٩ ـ اعط مثالا لاقتران ق له نقطة انعطاف عند الصفر بحيث ان قَ (٠) ≠ ٠ .

٤ . نظرية تايلور

اذا كان ق ∋ رول[أ ، ب] فان نظرية القمية المتوسطة تنص على انه يوجد عدد واحد على الاقل حـ ∋ (أ ، ب) بحيث ان

ق (ب) = ق (أ) + (ب − أ) قَ (حـ) . . . . **(٢٨)**

نريد ان نوسع (٢٨) لتشمل الاقترانات التي لها مشتقات عالية الرتبة. افرض ان $\text{ق}^{(\text{ن}-١)}$ ∋ رول[أ ، ب]، حيث ن ∋ N . لهذا فنحن نفترض ان $\text{ق}^{(\text{ن}-١)}$ متصل على [أ ، ب]، $\text{ق}^{(\text{ن})}$ (س) موجود لكل س ∋ (أ ، ب). من الفرض فان المشتقات قَ (س)، قً (س)، . . . ، $\text{ق}^{(\text{ن}-١)}$ (س) موجودة لكل س ∋ [أ ، ب].

النظرية ١٣ [نظرية القيمة المتوسطة النونية أو نظرية تايلور مع الباقي].

افرض ان مـ ، ن اعداد طبيعية وافرض ان $\text{ق}^{(\text{ن}-1)} \in$ رول [أ ، ب]. اذن يوجد عدد واحد على الاقل حـ $\in$ (أ ، ب) بحيث ان

$$\text{ق (ب)} = \text{ق (أ)} + \text{(ب} - \text{أ)}\ \text{قَ (أ)} + \frac{(\text{ب} - \text{أ})^{2}}{2!}\ \text{قً (أ)} + \cdots + \frac{(\text{ب} - \text{أ})^{\text{ن}-1}}{(\text{ن} - 1)!}\ \text{ق}^{(\text{ن}-1)}\text{(أ)} + \text{ى}_{\text{ن}} ،$$

حيث $\text{ى}_{\text{ن}}$ ، الباقي بعد ن من الحدود، يعطى بالصيغة:

$$\text{ى}_{\text{ن}} = \frac{(\text{ب} - \text{حـ})^{\text{ن}-\text{مـ}}\ (\text{ب} - \text{أ})^{\text{مـ}}}{\text{مـ}\ (\text{ن} - 1)!}\ \text{ق}^{(\text{ن})}\text{(حـ)} \quad \cdots\cdots \quad (29)$$

البرهان.

الفكرة الاساسية هي تطبيق نظرية رول على اقتران مناسب. لنأخذ

$$\text{ك (س)} = \text{ق (ب)} - \text{ق (س)} - \text{(ب} - \text{س)}\ \text{قَ (س)} - \cdots - \frac{(\text{ب} - \text{س})^{\text{ن}-1}}{(\text{ن} - 1)!}\ \text{ق}^{(\text{ن}-1)}\text{(س)}.$$

فبمفاضلة طرفي المعادلة نحصل على

$$\text{كَ (س)} = \frac{-(\text{ب} - \text{س})^{\text{ن}-1}\ \text{ق}^{(\text{ن})}\text{(س)}}{(\text{ن} - 1)!} \quad \text{لكل س} \in \text{(أ ، ب)} \quad \cdots\cdots \quad (30)$$

نعرف الآن

$$\text{هـ (س)} = \text{ك (س)} - \left(\frac{\text{ب} - \text{س}}{\text{ب} - \text{أ}}\right)^{\text{مـ}} \text{ك (أ)}. \quad \cdots\cdots \quad (31)$$

اذن هـ $\in$ رول [أ ، ب] وَهـ (أ) = هـ (ب) = ٠ . بتطبيق نظرية رول على هـ نرى انه يوجد حـ $\in$ (أ ، ب) بحيث ان هَـ (حـ) = ٠، اذن من (٣١) نحصل على

$$٠ = كَ (حـ) + \frac{مـ (ب - حـ)^{مـ-١}}{(ب - أ)^{مـ}} ك (أ) \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (٣٢)$$

اذن من (٣٠) و (٣٢) نحصل على

$$\frac{(ب - حـ)^{ن-١}}{(ن - ١)!} ق^{(ن)} (حـ) = \frac{مـ (ب - حـ)^{مـ-١}}{(ب - أ)^{مـ}} ك (أ) \quad \ldots\ldots \qquad (٣٣)$$

واخيرا من (٣٣) وتعريف ك، واستخدام ب - حـ > ٠ نحصل على نظرية تايلور مع الباقي ى ن . وهذه الصيغة لِ ي ن المعطاة في (٢٩) هي صيغة شلوملْه .

ونحصل على حالات خاصة من ى ن بأخذ ن = مـ وَمـ = ١ :

باقي لاجرانج $ى_{ن} = \frac{(ب - أ)^{ن}}{ن!} ق^{(ن)} (حـ) .$

باقي كوشي $ى_{ن} = \frac{(ب - أ)^{ن}}{(ن-١)!} (١ - \theta)^{ن-١} ق^{(ن)} (أ + \theta (ب - أ))،$

$٠ < \theta < ١ .$

في الباقي الاخير كتبنا $\theta = \frac{حـ - أ}{ب - أ} .$

اَن نظرية تايلور، مع باقي لاجرانج، صيغة يسهل تذكرها، ولعلها اكثر الصيغ فائدة وهي

$$ق (ب) = ق (أ) + (ب - أ) قَ (أ) + \frac{(ب - أ)^{٢}}{٢!} قً (أ) + \ldots + \frac{(ب - أ)^{ن-١}}{(ن - ١)!} ق^{(ن-١)} (أ) + \frac{(ب - أ)^{ن}}{ن!} ق^{(ن)} (جـ)$$

لعدد ما حـ ∋ (أ ، ب).اذا كتبنا ب = أ + و فإننا نحصل على

$$ق (أ + و) = ق (أ) + وقَ (أ) + \ldots + \frac{و^{ن-1}}{(ن-1)!} ق^{(ن-1)} (أ) + \frac{و^{ن}}{ن!} ق^{(ن)} (أ + \theta و) ، ٠ < \theta < ١.$$

بتغيير الاقترانين كِ ، هـ بطريقة مناسبة في برهان نظرية تايلور نرى انه بالامكان استبدال أ بـ ب وَب بـ أ. لهذا وعلى سبيل المثال فانه مع باقي لاجرانج تصبح

$$ق (أ) = ق (ب) + (أ - ب) قَ (ب) + \frac{(أ - ب)^2}{2!} قً (ب) + \ldots + \frac{(أ - ب)^{ن-1}}{(ن-1)!} ق^{(ن-1)} (ب) + \frac{(أ - ب)^{ن}}{ن!} ق^{(ن)} (حـ)$$

حيث أ < حـ < ب . اذن، وعلى سبيل المثال، اذا كان قً موجودا قرب الصفر، فانه بالامكان كتابة

$$ق (س) = ق (٠) + س قَ (٠) + \frac{س^2}{2} قً (حـ)$$ حيث حـ بين الصفر وَس ، لِـ س < ٠ وس < ٠.

تعزى فكرة النظرية ١٣ الى تايلور(١٦٨٥ ـ ١٧٣١)، لكنه لم يستطع اعطاء برهان دقيق لها، ولم يناقش فكرة الباقي.

المثال ٢٥ .

١,٣٨٦٣ هي قيمة تقريبية لِـ لو٤ . جد قيمة تقريبية لِـ لو ٤,١ : بتطبيق نظرية تايلور على ق (س) = لوس، أ = ٤ ، ب = ٤,١ واستخدام باقي لاجرانج نرى ان

$$لو ب = لو أ + \frac{(ب - أ)}{أ} - \frac{(ب - أ)^2}{2أ^2} + \frac{(ب - أ)^3}{3 حـ^3}$$

الآن ١,٣٨٦٣ + ١,٠٢٥ - ٠,٠٠٠٣ = ١,٤١١٠ ، ولـلبـاقـي $ى_م$ نرى ان ٠ < $ى_م$ <

$\frac{٦}{١٠^{٦}}$. اذن، لو ١,٤ = ١,٤١١٠ تقريبا.

نطبق الآن نظرية تايلور كي نحصل على اختبار سهل للقمم المحلية ونقاط الانعطاف.

النظرية ١٤.

افرض ان ن ⩾ ٢ ، و > ٠ وان ق $^{(ن)}$ متصل على [أ - و ، أ + و]. افرض ان ق $^{(ر)}$ (أ) = ٠ لكل ١ ⩽ ر ⩽ ن - ١ ولكن ق $^{(ن)}$ (أ) ≠ ٠. اذن

(١) ن زوجي تعطي أ ∈ قمح (ق) [عظمى اذا كان ق $^{(ن)}$ (أ) < ٠ ، وصغرى اذا كان ق $^{(ن)}$ (أ) > ٠].

(٢) ن فردي تعطي أ نقطة انعطاف.

البرهان.

من نظرية تايلور، لكل س ∈ [أ - و ، أ + و]، نحصل على

$$ق (س) = \sum_{ر=٠}^{ن-١} \frac{(س - أ)^{ر}}{ر!} ق^{(ر)} (أ) + \frac{(س - أ)^{ن}}{ن!} ق^{(ن)} (حـ)$$

$$= ق (أ) + \frac{(س - أ)^{ن}}{ن!} ق^{(ن)} (حـ) \quad \cdots\cdots \quad (٣٤)$$

حيث حـ بين أ وَس.

لنثبت (١): $(س - أ)^{ن}$ ⩾ ٠ لكل س ، ق $^{(ن)}$ (أ) < ٠ تعطي ق $^{(ن)}$ (حـ) < ٠ عندما تكون س قريبة من أ، لان ق $^{(ن)}$ متصل. اذن (٣٤) تعطي ق (س) ⩽ ق (أ) بقرب أ. اذن يوجد عند أ قيمة عظمى محلية. كذلك وبطريقة مشابهة، فمن ق $^{(ن)}$ (أ) > ٠ يتضح انه يوجد عند أ

قيمة صغرى محلية.

لنثبت الآن (٢): ن فردي تعطي ق (س) − م (س) = $(س - أ)^{ن} \frac{ق^{(ن)}(حـ)}{ن!}$ حيث ن ⩾ ٣ وَم هو المماس عند (أ ، ق (أ)). لاحظ ان البرهان يصلح حتى اذا كانت قَ (أ) ≠ ٠، واذا كان $ق^{(ن)}$ (أ) < ٠ فان ق (س) − م (س) يغير اشارته من الموجب الى السالب عندما تزداد س عبر أ، واذا كان $ق^{(ن)}$ (أ) > ٠ فان ق (س) − م (س) يغير اشارته من السالب الى الموجب. اذن يوجد عند أ نقطة انعطاف. وهذا يثبت النظرية.

تمارين ٧ ـ ٤

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ (أ) افرض ان ك حدودية في س درجتها ن. فلأي عددين حقيقيين س و أ، اثبت ان

$$ك (س) = ك (أ) + (س - أ) كَ (أ) + \ldots + \frac{(س - أ)^{ن}}{ن!} ك^{(ن)} (أ).$$

(ب) اكتب $س^{٢} - س + ١$ بصيغة حدودية في س + ١.

٢ ـ افرض ان قَ ∈ رول [أ ، ب] وَقً (س) ⩾ ٠ على (أ ، ب). اثبت ان

$$ق (س_{١}) + ق (س_{٢}) \geqslant ٢ ق \left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}\right)$$ لاي $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ∈ [أ ، ب].

٣ ـ افرض ان $ق^{(٣)}$ متصل على فترة ما تحوي أ وافرض ان $ق^{(٣)}$ (أ) ≠ ٠. فمن نظرية تايلور نعرف انه يوجد θ ∈ (٠ ، ١) بحيث ان ق (أ + و) = ق (أ) + وقَ (أ) + $\frac{و^{٢}}{٢}$ قً (أ + θ و).

اثبت انه يوجد لكل عدد صغير و (لا يساوي الصفر) عدد وحيد θ . اثبت كذلك أن θ ←

$\frac{١}{٣}$ عندما و ← ٠ .

تأكد من هذه النتيجة بأخذ ق (س) = س^{٣} + س^{٢} و أ = ٠ .

٤ ـ اثبت ان ٠,٠٩٥ < لو ١,١ < ٠,٠٩٥٣٤ .

٥ ـ استخدم نظرية تايلور للرتبة الثانية لاثبات ان ٠ < س - لو (١ + س) < $\frac{س^{٢}}{٢}$ لكل س > ٠ . استخلص ان المتسلسلة

$$\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ر} - لو(١ + \frac{١}{ر})\right)$$

تقاربية . ارمز لمجموع هذه المتسلسلة بالرمز γ . باخذ المجاميع الجزئية بين ان

$$\gamma = نها \left(١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \ldots + \frac{١}{ن} - لو ن\right).$$

يعرف العدد γ باسم ثابت اويلر. والعدد ٠,٥٧٧٢١ هو قيمة تقريبية لِـ γ . ولا نعرف الى الآن ان كان عددا نسبيا او غير نسبي .

٦ ـ عرف ق R ← R بـ ق (س) = أ $e^{-ب^{٢} س^{٢}}$ حيث أ ، ب اعداد موجبة . عين القمم المحلية ونقاط الانعطاف في ق .

٧ ـ جد قيمة أ بحيث يكون للاقتران (س^{٣} + جاس) $e^{أس}$ نقطة انعطاف عند الصفر.

٨ ـ اذا كان ق$^{(ن)}$ موجودا في فترة ما (-و ، و) واذا كان ق$^{(ن)}$ (س) ← م عندما س ← ٠ ، فاثبت ان م = ق$^{(ن)}$ (٠) .

٥ . متسلسلة تايلور

افرض ان ف فترة مفتوحة (يمكن ان تكون غير منتهية) في R وافرض ان ق : ف ← R ـ له مشتقات لجميع الرتب وعلى جميع نقاط ف . اي ان ق$^{(ن)}$ (س) موجودة لكل ن ∈ N ولكل س ∈ ف

اذا كان أ $\in$ ف فانه بالامكان كتابة متسلسلة القوى التالية في (س − أ):

$$ل\,(ق\,،\,س - أ) = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(س - أ)^{ن}}{ن\,!}\, ق^{(ن)}\,(أ)$$

$$= ق\,(أ) + (س - أ)\, قَ\,(أ) + \frac{(س - أ)^{2}}{2\,!}\, قً\,(أ) + \ldots$$

تسمى متسلسلة القوى هذه متسلسلة تايلور للاقتران ق حول أ.

المثال ٢٦.

عرف ق : $(-1\,،\,\infty) \leftarrow R$ بـ $ق\,(س) = \frac{1}{1 + س}$، خذ أ = ٠. اذن $ق^{(ن)}\,(س) = \frac{(-1)^{ن}\, ن\,!}{(1 + س)^{ن+1}}$ لكل س > -1، اذن $ق^{(ن)}\,(0) = (-1)^{ن}\, ن!$ ومنه

$$ل\,(ق\,،\,س) = \sum_{ن=0}^{\infty} (-1)^{ن}\, س^{ن} = 1 - س + س^{2} - س^{3} + \ldots$$

لنرجع الآن الى الاقتران العام ق : ف $\leftarrow$ R ومتسلسلة تايلور له ل (ق ، س − أ). لم نذكر اي شيء عن تقارب متسلسلة تايلور. فاذا كان س = أ فان المتسلسلة تقاربية، وفي هذه الحالة يكون ل (ق ، أ − أ) = ق (أ). واذن ل (ق ، س − أ) = ق (س) عندما س = أ.

وعندما يكون س $\in$ ف ، س $\neq$ أ فمن المهم ان نذكر نقطتين.

$ل_{1}$: قد تكون ل (ق ، س − أ) تقاربية، ولكن قد لا تكون تقاربية الى ق (س). في هذه الحالة فان متسلسلة تايلور لا تمثل الاقتران عندما تكون $س_{1} \neq$ أ.

$ل_{2}$: قد تكون ل (ق ، س − أ) تباعدية عندما س $\neq$ أ.

من الممكن اعطاء أمثلة توضح $ل_{1}$ ، $ل_{2}$ ولكن هذا صعب. وسوف نذكر هذه الامثلة فيما بعد. اما الآن فسوف نركز على الحالات التي تكون بها متسلسلة الاقتران تمثل الاقتران على نطاق معين من س، في بعض الحالات على كل R ومن الامثلة على هذه الاقترانات :

الحدوديات، $\sqrt{1 + \text{س}}$، لو(١ + س)، $e^{\text{س}}$، جاس ، جتاس .

ويجب ان نتذكر انه من السهل عادة كتابة متسلسلة تايلور ل (ق ، س − أ)، ولكن اثبات ان المتسلسلة تقاربية الى ق (س)، س ≠ أ هو امر آخر.

المثال ٢٧ .

اذا كان ق هو اقتران المثال ٢٦ فان ل (ق ، س) = ق (س) لكل |س| < ١ . هذا ينتج مباشرة من المثال ٢ في الفصل ٥ . لاحظ انه اذا كان س ≥ ١ فان ق (س) موجود ولكن ل (ق ، س) تباعدية . لهذا فلا يمكن ان تتقارب من ق (س) . لهذا وبشكل عام فانه اذا كانت ل (ق ، س) تمثل الاقتران فانها تمثله على نطاق محدود.

ونستخدم عادة نظرية القيمة المتوسطة النونية، اي نظرية تايلور مع الباقي، لايجاد متسلسلة تايلور لاقتران ما . وهناك طرق اخرى مثل التكامل تكون افضل احيانا، وسنناقش هذا فيما بعد.

يجب ان لا يخلط القارىء بين «نظرية تايلور مع الباقي» التي تحوي عددا منتهيا من الحدود، مع متسلسلة تايلور التي تكون عادة متسلسلة غير منتهية بها ق $^{(\text{ن})}$ (أ) لكل ن $\in N$

تعتبر متسلسلة تايلور لـ $(1 + \text{س})^{\text{م}}$ حيث مـ عدد نسبي إمتداداً لنظرية ذات الحدين حين يكون مـ عددا طبيعيا.

النظرية ١٥ [متسلسلة ذات الحدين].

افرض ان مـ عدد نسبي (سالب أو موجب أو صفر). عرف

$$\binom{\text{م}}{\text{ر}} = \binom{\text{م}}{\text{ر}} = \frac{\text{م}(\text{م}-1)\ldots(\text{م}-\text{ر}+1)}{\text{ر}!} \quad \text{لكل ر} \in N .$$

اذن.

$(1 + س)^{م} = \sum_{ر=0}^{\infty} \binom{م}{ر} س^{ر} = 1 + م س + \frac{م(م-1)}{2!} س^{2} + \ldots$ لكل $|س| < 1$.

البرهان.

اذا كان $م \in N$ فان $(1 + س)^{م} = 1 + م س + \ldots + س^{م}$، من نظرية ذات الحدين (لأي $س \in R$). لهذا فان المتسلسلة تكون منتهية ولا يوجد اي تحديد على س.

واذا كان $م \notin N$ نأخذ $ق : (-1 ، \infty) \rightarrow R$ المعرف بـ $ق(س) = (1 + س)^{م}$. لأي $س > -1$ نحصل على $قَ(س) = م(1 + س)^{م-1}$، $قً(س) = م(م-1)(1 + س)^{م-2}$، ...، $ق^{(ن)}(س) = م(م-1) \ldots (م-ن+1)(1 + س)^{م-ن}$. فاذا كان س = ٠ فان نتيجة النظرية تكون واضحة. اما اذا كان $س \neq 0$، فباستخدام نظرية القيمة المتوسطة النونية، يكون $ق(س) = ق(0) + س قَ(0) + \ldots + ى_{ن}$

$$= \sum_{ر=0}^{ن-1} \binom{م}{ر} س^{ر} + ى_{ن}.$$

لاثبات النظرية علينا اثبات أنه اذا كان $0 < |س| < 1$ فان $|ق(س) - \sum_{ر=0}^{ن-1} \binom{م}{ر} س^{ر}| = |ى_{ن}| \rightarrow 0$ $(ن \rightarrow \infty)$.

اذا كان $0 < س < 1$ فاننا نأخذ باقي لاجرانج

$$|ى_{ن}| = |\frac{س^{ن}}{ن!} ق^{(ن)}(\theta س)|$$

$$= |\binom{م}{ن} س^{ن} (1 + \theta س)^{م-ن}| < |\binom{م}{ن} س^{ن}|$$

اذا كان $ن > م$، لان $0 < \theta < 1$. واذا كتبنا

$أ_{ن} = |\binom{م}{ن} س^{ن}|$،

فان:

$\frac{أ_{ن+1}}{أ_ن} = س \left| \frac{مـ - ن}{ن + 1} \right| \leftarrow س$ (ن ← ∞).

وبما ان ٠ < س < ١ فانه ومن إختبار النسبة نرى ان المتسلسلة $\sum$ أ$_ن$ تقاربية، اذن أ$_ن$ ← ٠ (ن ← ∞). ولكن | أ$_ن$ | > ى$_ن$ لكل ن > مـ، اذن | ى$_ن$ | ← ٠ (ن ← ∞).

اخيرا هناك حالة -١ < س < ٠: اذا حاولنا استخدام باقي لاجرانج نحصل على التقريب التالي:

$$| ى_ن | < | \binom{مـ}{ن} س^ن (١ - \theta)^{مـ-ن} |$$

وهذا لا يساعد لان $(١ - \theta)^{مـ-ن}$ تكون كمية كبيرة اذا كان θ قرب ١. لهذا، نحاول باقي كوشي

$$| ى_ن | = | مـ س^ن \binom{مـ-١}{ن-١} \left(\frac{١ - \theta}{١ + \theta س}\right)^{ن-١} (١ + \theta س)^{مـ-١} |$$

$$\leqslant | مـ س^ن \binom{مـ-١}{ن-١} (١ + \theta س)^{مـ-١} | \ldots\ldots\ldots\ldots (٣٥)$$

فبما ان ٠ < ١ + س < ١ + θ س < ١، فان $| (١ + \theta س)^{مـ-١} | \leqslant$ ع (س ، مـ) فقط.

يجب ان نتذكر ان θ تعتمد بشكل عام على س و ن.

الآن وبما ان

$$| \binom{مـ-١}{ن-١} س^ن | \leftarrow ٠ \text{ عندما } ن \leftarrow \infty ،$$

فانه ينتج من (٣٥) ان | ى$_ن$ | ← ٠ (ن ← ∞). وهذا يثبت النظرية.

سوف نناقش بايجاز النقاط التي اثيرت في ل$_١$ ، ل$_٢$.

بالنسبة لـ ل$_١$ ، نعرف ق : R ← R بـ ق (٠) = ٠، ق (س) = $e^{-س^{-٢}}$، س ≠ ٠.

فباستخدام الخواص القياسية للاقتران الاسي التالي، ينتج:

$$e^{ص} = 1 + ص + \frac{ص^2}{!2} + \frac{ص^3}{!3} + \ldots \quad (ص \in R)$$

التي حصلنا عليها في الفصل التاسع. ويمكن اثبات ان $ق^{(ن)}(0) = 0$ لكل $ن \in N$. على سبيل المثال، اذا كان $ن = 1$ وَ $س \neq 0$ ، فان

$$\left| \frac{ق(س) - ق(0)}{س} \right| = \frac{1}{|س| e^{س^{-2}}} < |س| \leftarrow 0 \quad (س \leftarrow 0)، \text{ اذن } قَ(0)$$

$= 0$. لهذا، وعلى فرض اننا بينا ان $ق^{(ن)}(0) = 0$ لكل $ن \in N$ فاننا نحصل على ل (ق ، س) $= 0$ لكل $س \in R$. ولكن الاقتران الاسي الحقيقي موجب دائماً على R اي ان ق (س) $> 0 =$ ل (ق ، س) لكل $س \neq 0$. اذن متسلسلة تايلور لِـ ق حول 0 هي تقاربية ولكنها لا تتقارب الى ق (س) عندما يكون $س \neq 0$.

بالنسبة لِـ $ل_2$ نعرف $ق : R \longrightarrow R$ حيث

$$ق(س) = \sum_{ر=0}^{\infty} \frac{1}{ر!} (2^{-ر} + 2^{ر} س^2)$$

هذه المتسلسلة تقاربية لكل $س \in R$ حسب اختبار المقارنة. وفي الحقيقة فان $|ق(س)| \leqslant$

$\sum \frac{2^{ر}}{ر!} = e^2$ لكل $س \in R$. الآن

$ق(0) = e^{\frac{1}{2}}$ ، وَلِـ $س \neq 0$ ؛

$$\left| \frac{ق(س) - ق(0)}{س} \right| = |س| \sum_{ر=0}^{\infty} \frac{2^{2ر}}{ر!} (2^{-ر} + 2^{ر} س^2)$$

$$\leqslant |س| \cdot e^{2^3}$$

مما يعطي $قَ(0) = 0$.

واذا مضينا بهذا الاسلوب نحصل على $ق^{(2)}(0) = -(!2) e^{2^3}$ ، $ق^{(3)}(0) = 0$ ، $ق^{(4)}(0) = !4 \, e^{2^5}$ ، . . . ، اذن

$\text{ل}(\text{ق}\ ،\ \text{س}) = \sum_{\text{ر}=0}^{\infty} (-1)^{\text{ر}}\, \text{س}^{2\text{ر}}\, e^{2^{2\text{ر}+1}} = \sum \text{أ}_{\text{ر}}$ ، مثلا

اذا أخذنا س $\neq 0$ وطبقنا اختبار النسبة على $\sum \text{أ}_{\text{ر}}$ نجد ان $\left| \dfrac{\text{أ}_{\text{ر}+1}}{\text{أ}_{\text{ر}}} \right| = \text{س}^2 \times$ سا $(3 \times 2^{2\text{ر}+1}) > 3\,\text{س}^2 \times 2^{2\text{ر}+1}$ ومنه $\left| \dfrac{\text{أ}_{\text{ر}+1}}{\text{أ}_{\text{ر}}} \right| \leftarrow \infty$ (ر $\leftarrow \infty$). اذن

$\sum \text{أ}_{\text{ر}}$ تباعدية لكل س $\neq 0$ وهذا يحقق ل_2.

تمارين ٧ ـ ٥

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اذا كانت ك حدودية درجتها ن فاثبت ان ل (ك ، س ـ أ) = ك (س) لجميع الاعداد الحقيقية أ وَس.

٢ ـ افرض ان ق : $(-1 ، \infty) \rightarrow R$ ـ يحقق ق $(0) = 0$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{1}{1 + \text{س}}$ لكل س > -1 . استخدم نظرية تايلور مع الباقي لاثبات انه لكل $-1 <$ س $\leqslant 1$ فان

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{ق}\ ،\ \text{س}) = \text{س} - \frac{\text{س}^2}{2} + \frac{\text{س}^3}{3} - \frac{\text{س}^4}{4} - \ldots$$

سوف نبين فيما بعد ان ق (س) = لو(١ + س).

٣ ـ افرض ان ق : $R \rightarrow R$ يحقق ق $(0) = 0$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{1}{1 + \text{س}^2}$ لكل س $\in R$

اثبت ان لكل $|\text{س}| \leqslant 1$ ، فان

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{ق}\ ،\ \text{س}) = \text{س} - \frac{\text{س}^3}{3} + \frac{\text{س}^5}{5} - \frac{\text{س}^7}{7} + \ldots$$

سوف نبين فيما بعد ان ق (س) = ظا^{-1} س.

٤ ـ افرض ان ق : $R \rightarrow R$ يحقق $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ لكل س $\in R$. افرض كذلك ان ق محصورة على R . اي انه يوجد عدد ثابت م بحيث ان $|\text{ق}(\text{س})| <$ م لكل س $\in R$.
ماذا تستخلص عن ق ؟

٥ ـ عرف ق (٠) = ٠ ، ق (س) = سا $(-س^{-٢})$ لكل س ≠ ٠ ، استخدم الاستقراء لاثبات انه لكل س ≠ ٠ ، فان

$ق^{(ن)}(س) = ك_{٣ن}(س^{-١})\ سا\ (-س^{-٢})$ ،

حيث $ك_{٣ن}(ص) = أ_٠ + \ldots + أ_{٣ن}\ ص^{٣ن}$ حدودية في ص درجتها ٣ن . اثبت كذلك ان $|أ_ر| \leqslant ن!\ ٣^ن$ لكل $٠ \leqslant ر \leqslant ن$ واستنتج ان

$|ق^{(ن)}(س)| \leqslant (ن + ١)!\ ٣^{ن+١}\ |س|^{-٣ن}\ سا\ (-س^{-٢})$

لكل $٠ < |س| < ١$. ومنه اثبت ان $ق^{(ن)}(٠) = ٠$ لكل ن $\in N$.

٦ ـ اثبت ان

(١) $\dfrac{١}{\sqrt{١ - س^٢}} = ١ + \dfrac{س^٢}{٢} + \dfrac{١ \times ٣ س^٤}{٢ \times ٤} + \ldots$ لكل $|س| < ١$.

(٢) ل (ق ، س) = $س + \dfrac{س^٣}{٣} + \dfrac{٢ س^٥}{١٥} + \ldots$ حيث ق (س) = ظاس على $|س| < \dfrac{\pi}{٢}$.

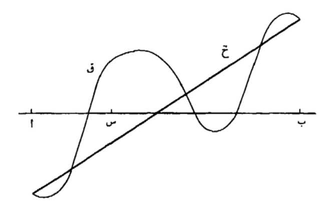
(٣) ل (ق ، س) = $١ - \dfrac{س}{٢} + \dfrac{س^٢}{١٢} - \ldots$ حيث ق : $R \leftarrow R$ معرف بـ ق (٠) = ١ وَق (س) = $\dfrac{س}{e^س - ١}$ لكل س ≠ ٠ .

٦ . التقريب

في العمليات العددية وخصوصا عند عمل جداول بقيم اقترانات ابتدائية مثل جا س، $e^س$ ، لو س قد يرغب الفرد في معرفة قيمة للاقتران بين قيمتين معروفتين وهذا ما يسمى بالاستكمال والقيم المعروفة انها تعطى لدرجة ما من الدقة ، كأن تكون صحيحة لأربع منازل عشرية (كما في معظم كتب الجداول) .

واسهل طريقة للاستكمال هي استبدال قيم الاقتران على فترة ما بقيم خط مستقيم . وبعبارة ادق اذا كان ق : [أ ، ب] ← R ـ وكنا نعرف قيم ق (أ) ، ق (ب) فانه يمكن وصل

النقطتين (أ ، ق (أ)) ، (ب ، ق (ب)) بخط مستقيم خ كما هو مبين بالشكل.



فمعادلة المستقيم هي

$$\text{خ (س)} = \text{ق (أ)} + \frac{\text{ق (ب)} - \text{ق (أ)}}{\text{ب} - \text{أ}} \text{(س} - \text{أ)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣٦)$$

اذا كان س $\in$ (أ ، ب) فاننا نعتبر خ (س) تقريبا لـ ق (س) ونحسبه من (٣٦). **تعرف هذه** الطريقة باسم الاستكمال الخطي او طريقة الاجزاء المتناسبة.

ونتوقع ان يعطي الاستكمال الخطي تقريبا معقولا الا في حالات خاصة. والنظرية التالية تشترط ان تكون قً محصورة على [أ ، ب]. وهذا شرط غير صعب، وتحققه معظم الاقترانات الابتدائية التي نرغب عادة في معرفة قيمها العددية.

النظرية ١٦ [الاستكمال الخطي].

افرض ان ق : [أ ، ب] $\rightarrow$ R وان قً محصورٌ على [أ ، ب]، ولنقل | قً (س) | $\leqslant$ ع لكل س $\in$ [أ ، ب]. اذن

$$|\text{ق (س)} - \text{خ (س)}| \leqslant \text{ع} \; \frac{(\text{ب} - \text{أ})^{٢}}{٨} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣٧)$$

حيث خ معرف في (٣٦).

البرهان.

اذا كان س = أ أو س = ب فان | ق (س) − خ (ش) | = ٠ وتحقق (٣٧). افرض ان أ< س < ب ولنأخذ الاقتران م : [أ ، ب] ← R حيث يعتبر م اقترانا في المتغير و، س ثابت:

$$م (و) = \begin{vmatrix} ق (و) & و & و^٢ & ١ \\ ق (س) & س & س^٢ & ١ \\ ق (أ) & أ & أ^٢ & ١ \\ ق (ب) & ب & ب^٢ & ١ \end{vmatrix} \qquad (٣٨)$$

الآن م (أ) = م (س) = ٠، واذن باستخدام نظرية رول نحصل على مَ ($حـ_١$) = ٠ لعنصر ما $حـ_١$ ∈ (أ ، س). كذلك، وبطريقة مشابهة، مَ ($حـ_٢$) = ٠ لعنصر ما $حـ_٢$ ∈ (س ، ب). وبتطبيق نظرية رول للاقتران مَ على ($حـ_١$ ، $حـ_٢$) نحصل على مً (حـ) = ٠ لعنصر ما حـ ∈ ($حـ_١$ ، $حـ_٢$) ⊂ [أ ، ب].

وبمفاضلة (٣٨) مرتين ووضع و = حـ نحصل على

$$\begin{vmatrix} قً (حـ) & ٠ & ٢ & ٠ \\ ق (س) & س & س^٢ & ١ \\ ق (أ) & أ & أ^٢ & ١ \\ ق (ب) & ب & ب^٢ & ١ \end{vmatrix} = ٠،$$

وعند حساب قيمة هذه المحددة نرى ان

$$ق (س) − خ (س) = \frac{قً (حـ) (س − أ) (س − ب)}{٢} \quad . . . . (٣٩)$$

ونحصل على اكبر قيمة لـ(س − أ) (س − ب) على [أ ، ب] عندما يكون س =

$\frac{أ+ب}{٢}$. اذن (٣٧) تنتج من (٣٩)، مما يثبت النظرية.

المثال ٢٨ .

يعطي جدول ق (س) = $e^{س}$ قيم $e^{س}$ بين ٠ و١ على فترات ٠,٠١ . جد حاصرا اعلى للخطأ الذي يحدث عند استخدام الاستكمال الخطي.

نعرف ان ١ ≤ قً (س) = $e^{س}$ ≤ e < ٢,٧٢ ، لكل ٠ ≤ س ≤ ١ . فالخطأ

| ق (س) − خ (س) | اقل من (٢,٧٢) $\frac{(٠,٠١)^{٢}}{٨}$ = ٠,٠٠٠٠٣٤ .

تقريب الاخطاء

ان اجهزة الحاسب الالكتروني والآلات الحاسبة والجداول (مثل جدول اللوغاريثمات) تعمل بعدد محصور من المنازل العشرية. على سبيل المثال يعطي أحد الجداول قيمة لو٢ بـ ٠,٦٩٣١٥ . هذا ليس صحيحا تماما. ويمكن اثبات ان

لو٢ = ٠,٦٩٣١٤٧١ . . . . (٤٠)

حيث تعني النقاط الثلاثة ان الاعداد المذكورة صحيحة وان هناك اعدادا اخرى لم تظهر في التمثيل العشري لقيمة لو٢ .

وقيمة لو٢ التقريبية ٠,٦٩٣١٥ في جداول الارقام الخمسة هي ما ندعوه لو٢ مقربا الى خمس منازل عشرية. وفي (٤٠) لو توقفنا بعد المنازل العشرية الخمس لحصلنا على ٠,٦٩٣١٤ . الا ان القيمة المقربة ٠,٦٩٣١٥ تعطى في الجداول، لانها اقرب الى لو٢ .

وبالمثل فان لو٢ مقربا الى اربع منازل عشرية هو ٠,٦٩٣١ . واليك امثلة اخرى: (أ) ٦,١٤١٥٩٢٦ مقربا الى خمس منازل عشرية هو ٦,١٤١٥٩ . (ب) ٧,٥٢٥ مقربا الى منزلتين عشريتين هو ٧,٥٢ . (حـ) ٢,٦٧٥ مقربا الى منزلتين عشريتين هو ٢,٦٨ .

في الحالتين (ب) ، (حـ) استعملنا ما هو متعارف عليه : وهو انه عند التقريب لِـ ن منازل عشرية اذا كان هناك ٥ في المنزلة ن + ١ واصفار بعدها فاننا نضيف ١ الى العدد الذي في المنزلة ن اذا كان هذا العدد فرديا ، ولا نغيره اذا كان زوجيا .

واضح الآن انه عند استخدام جداول الأرقام الخمسة (التي حسبت بناء على طريقتنا في التقريب) فانه يكون هناك خطأ في القيم المحسوبة اكبر قيمة له هي ٠,٠٠٠٠٠٥ والفرق بين القيم المذكورة في الجداول والقيم الحقيقية يمكن ان يكون موجبا أو سالبا (او صفرا اذا كنا محظوظين) .

وفي جداول ن ارقام فإن اكبر قيمة للخطأ يمكن ان تكون $\frac{٥}{١٠^{ن+١}}$.

عندما نقول ان لو٢ = ٠,٦٩٣١٤ صحيحا لخمس منازل عشرية فاننا نعني ان الاعداد الخمسة التي تظهر بعد الفاصلة العشرية هي تماما التي تظهر عند كتابة قيمة لو٢ كاملة . يجب التمييز بين «الصحيح لخمس منازل عشرية» و«المقرب لخمس منازل عشرية» التي في هذه الحالة ٠,٦٩٣١٥ .

المثال ٢٩ .

افرض أننا نرغب ان نجمع ١٠٠٠ عدد من جدول ثلاثة ارقام ، فأسوأ ما يمكن ان يحدث هو ان يكون هناك خطأ $\frac{٥}{١٠^{٤}}$ في كل عدد ، لهذا فان الخطأ الكلي يكون $١٠^{٣} \times$ $\frac{٥}{١٠^{٤}}$ = ٠,٥ .

مثال ٣٠ .

لنحسب قيمة الخطأ في استخدام الاستكمال الخطي لقيم مأخوذة من جدول خمسة

ارقـام. فللتبسيـط سنأخـذ نقطة المنتصف س = $\frac{أ + ب}{٢}$. فحسب نظرية ١٦، نحصل على | ق (س) − خ (س) | ⩽ $\frac{ع (أ - ب)^٢}{٨}$ ، حيث خ (س) هو الآن $\frac{ق (أ) + ق (ب)}{٢}$

افرض ان هـ (أ) هو القيمة المقربة المذكورة في الجدول لِـ ق (أ)، كذلك هـ (ب). اذن

|هـ (أ) − ق (أ)| ⩽ $\frac{٥}{١٠^٦}$ ، |هـ (ب) − ق (ب)| ⩽ $\frac{٥}{١٠^٦}$. اذن، اذا كان ى (س) = $\frac{هـ(أ) + هـ(ب)}{٢}$ فان

$$| ق (س) - ى (س) | ⩽ \frac{ع (ب - أ)^٢}{٨} + | ى (س) - خ (س) |$$

$$⩽ \frac{ع (أ - ب)^٢}{٨} + \frac{٥}{١٠^٦} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤١)$$

اذن ان العـدد ى (س) هو الـذي حسبنـاه من القيم المـذكورة في الجدول و(٤١) تعطي اكبر قيمة ممكنة للخطأ.

طريقة نيوتن

افرض، على سبيل المثال، اننا نريد حساب $\sqrt{٢}$ لعدد معين من المنازل العشرية، اي اننا نريد ان نجد تقريبا جيداللجذر الموجب للمعادلة س^٢ − ٢ = ٠. نكتب ق (س) = س^٢ − ٢، تهمنا المعادلة س^٢ − ٢ = ٠، حيث نرى ان ق (١,٤) < ٠، ق (١,٥) > ٠. بما ان ق متصل فانه وباستخدام نظرية القيم الوسطى فانه يوجد عدد و ∈ (١,٤ ، ١,٥). بحيث ان ق (و) = ٠. بالطبع نرمز لِـ و بـ $\sqrt{٢}$. اذن عندنا التقريب ١,٤ < و < ١,٥.

سوف نشرح طريقة ابتكرها نيوتن (لكنها تعرف ايضا باسم طريقة نيوتن ورافسون) وهي تمكننا من ايجاد تقريبات متتالية افضل لجذور معادلات من النوع ق (س) = ٠ افرض ان ق :

[أ ، ب] $\leftarrow R$ قابل للتفاضل مرتين على [أ ، ب] واننا نعرف ان ق (و) = ٠ لعنصر ما و $\in$ (أ ، ب) عادة باختبار ق (أ) ق (ب) $<$ ٠. لقيم س قرب و ومن نظرية تايلور نرى ان

$$٠ = ق\,(و) = ق\,(س) + (و - س)\,قَ\,(س) + (و - س)^{٢}\,\frac{قً\,(د)}{٢}$$

حيث د بين س و و. لهذا، اذا كان قَ (س) $\neq$ ٠ فاننا نحصل على

$$و = س - \frac{ق\,(س)}{قَ\,(س)} - (و - س)^{٢}\,\frac{قً\,(د)}{٢\,قَ\,(س)} \quad . . . . \quad (٤٢)$$

الآن اذا كان س تقريبا جيدا لـ و فان (س - و)^{٢} يكون صغيرا، واذا لم يكن $\frac{قً\,(د)}{قَ\,(س)}$ كبيرا فان اهمال الحد الاخير في (٤٢) يجعلنا نأمل ان يكون س - $\frac{ق\,(س)}{قَ\,(س)}$ تقريبا افضل من س لـ و. يلزم تعليل كل هذا بالطبع، وسنفعل ذلك في النظرية التالية، ولكن قبل النظرية سوف نوضح ما ذكرناه بمثال بسيط.

المثال ٣١.

افرض ان ق (س) = س^{٢} - ٢، اذن قَ (س) = ٢س. الآن ١ هو تقريب لـ $\sqrt{٢}$ وهو تقريب غير جيد ولكن ١ - $\frac{ق\,(١)}{قَ\,(١)} = \frac{٣}{٢}$ هو تقريب افضل. فلنأخذ هذا التقريب أي س = $\frac{٣}{٢}$ ونجد ان س - $\frac{ق\,(س)}{قَ\,(س)} = \frac{١٧}{١٢}$ افضل. ويمكن الاستمرار بهذه الطريقة لايجاد تقريبات اخرى. ولكن بدون تحليل مفصل لا يوجد مبرر لفرض ان هذه التقريبات سوف تقارب $\sqrt{٢}$ ، ولا نعرف ان كانت هذه الطريقة مفيدة عمليا وان اي عدد من التكرارات سيعطي تقريبا جيدا.

النظرية ١٧ [طريقة نيوتن]

افرض أنه

(١) يوجد لِـ ق صفر عند و.

(٢) قً موجود على ف = [و- δ ، و+ δ] لعدد ما δ > ٠

(٣) يوجد عدد ثابت حـ بحيث ان ٠ < حـ < ١ و|ق (س) قً (س) | < حـ | قَ (س) | ^٢^ على ف .

لأي س٠ ∋ ف عرّف $س_{ن+١} = س_{ن} - \frac{ق(س_{ن})}{قَ(س_{ن})}$ لكل ن ≥ ٠. اذن تكون المتتالية (س٠ ، س١ ، . . .) تقاربية وهي متتالية تقريبات لِـ و، ويكون

$$|س_{ن} - و| \leqslant \frac{حـ^{ن}|س_{١} - س_{٠}|}{١ - حـ} \quad \ldots\ldots\ldots (٤٣)$$

البرهان.

ضع هـ (س) = س − $\frac{ق(س)}{قَ(س)}$ لكل س ∋ ف . اذن هـ صحيح التعريف لأن |قَ (س) | ^٢^ > ٠ من (٣) . كذلك من (٣) نحصل على | هَـ (س) | < حـ لكل س ∋ ف .

سوف نثبت ان هـ : ف ← ف. بما ان هـ (و) = و فان

| هـ (س) − هـ (و) | = | هـ (س) − و | = | (س − و) هَـ (د) |

من نظرية القيمة المتوسطة . اذن | هـ (س) − و | ≥ حـ | س − و | < δ لكل س ∋ ف.

اذن هـ (س) ∋ ف.

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة ثانية نحصل على

| هـ (س) − هـ (ص) | ≥ حـ | س − ص | لكـل س ، ص ∋ ف. اذن هـ هو اقـتران

تقلص. وبتطبيق نظرية النقطة الثابتة لِـ ق نرى انه يوجد نقطة وحيدة م بحيث ان هـ (م) = م. لكننا نعرف ان هـ (و) = و، اذن م = و. اخيرا $س_{ن+١}$ = هـ ($س_ن$)، اذن $س_ن$ ← و و(٤٣) تتحقق. وهكذا فقد تم برهان النظرية.

المثال ٣٢.

احسب جذر المعادلة $س^٣ - ٥س + ٣ = ٠$ الذي يقع بين ٠ ، ١صحيحا لاربع منازل عشرية.

نكتب ق (س) = $س^٣$ − ٥س + ٣، اذن قَ (س) = $٣س^٢ - ٥$، ق (٠) = ٣، ق (١) = −١، قَ (س) > ٠ على [٠ ، ١]. اذن يوجد جذر وحيد، و، لِـ ق (س) = ٠ في (٠ ، ١). فالتنصيف يعطي ق (٠,٥) = ٠,٦٢٥. اذن و > ٠,٥ نرى ان ق (٠,٧) = −٠,١٥٧. ويتحقق الشرط (٣) من النظرية ١٧ على [٠,٦ ، ٠,٧].

بأخذ $س_٠$ = ٠,٧ نرى ان $س_١ = س_٠ - \frac{ق(س_٠)}{قَ(س_٠)}$ = ٠,٦٥٥٥ وان $س_٢$ = ٠,٦٥٦٦. كذلك ق (٠,٦٥٦٦) > ٠ > ق (٠,٦٥٦٧). اذن ٠,٦٥٦٦ > و > ٠,٦٥٦٧. اذن و = ٠,٦٥٦٦ صحيح لاربع منازل عشرية.

المثال ٣٣.

اذا كان ق (س) = $س^٢$ − ٢ فان $س_{ن+١} = ٠,٥ (س_ن + \frac{٢}{س_ن})$ في طريقة نيوتن.

لكل س ∈ [١,٤ ، ١,٥] فان الشرط (٣) من النظرية ١٧ يتحقق عند أخذ حـ = $\frac{١}{١٨}$.

باخذ $س_٠$ = ١,٤ نرى من (٤٣) ان تقارب ($س_ن$) من و يكون سريعا لأن $حـ^ن$ تناقص بسرعة مع إزدياد ن.

لنأخذ اي طريقة تكرار تقاربي (مثل طريقة نيوتن مع شروط النظرية ١٧) حيث $س_ن \leftarrow و (ن \leftarrow \infty)$. نقول ان الطريقة ذات رتبة $ر > ٠$، اذا وفقط اذا كان يوجد عدد موجب م و $\in_ن \leftarrow ٠ \ (ن \leftarrow \infty)$ بحيث ان

$$|س_{ن+١} - و| = (م + \in_ن) \, |س_ن - و|^ر$$

يدعى العدد م ثابت الخطأ التقاربي.

المثال ٣٤.

اذا كان قً متصلا عند و في طريقة نيوتن، فان الطريقة تكون من الرتبة الثانية ويكون

$$\left| \frac{قً(و)}{٢ \, قَ(و)} \right|$$ هو ثابت الخطأ التقاربي.

لاثبات ذلك نضع $س = س_ن$ في (٤٢)، ونحصل على

$$س_{ن+١} - و = (و - س_ن)^٢ \frac{قً(د_ن)}{٢ \, قَ(س_ن)} .$$

الآن $س_ن \leftarrow و$ وتعطي $د_ن \leftarrow و$ ونحصل على النتيجة من اتصال قً.

تمارين ٧ ـ ٦

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ جد قيمة اكبر خطأ ممكن عند استخدام الاستكمال الخطي لنقطة المنتصف في جدول ذي رقمين للاقتران $ق(س) = س^٣$ حيث يعطي القيم لفترات ١,٠ لِـ $س \in [٠ ، ١]$.

٢ ـ يعطي جدول خمسة ارقام قيمة جاس على فترات $\frac{١}{٥}$ الدرجة (تذكر ان π وحدات نصف قطرية تساوي ١٨٠ درجة). جد اكبر خطأ ممكن في الاستكمال الخطي.

٣ ـ يراد وضع جدول ذي ثلاثة ارقام لِـ $س^{٨}$ في [٠ ، ١]. جد طول الفترة بحيث يكون الخطأ في استخدام الاستكمال الخطي أقل من ٠,٠٠١ .

٤ ـ يراد اجراء عمليتي الضرب × والقسمة ÷ على جدول ذي رقمين . على سبيل المثال،

٠,١٦ × ٠,٠٦ = ٠,٠١

٠,١ ÷ ٠,٦ = ٠,١٧ .

أعط مثالا تبين فيه أن عملية × غير تجميعية. بين كذلك ان (أ × ب) ÷ ب ≠ أ بشكل عام .

٥ ـ فسر طريقة نيوتن هندسيا .

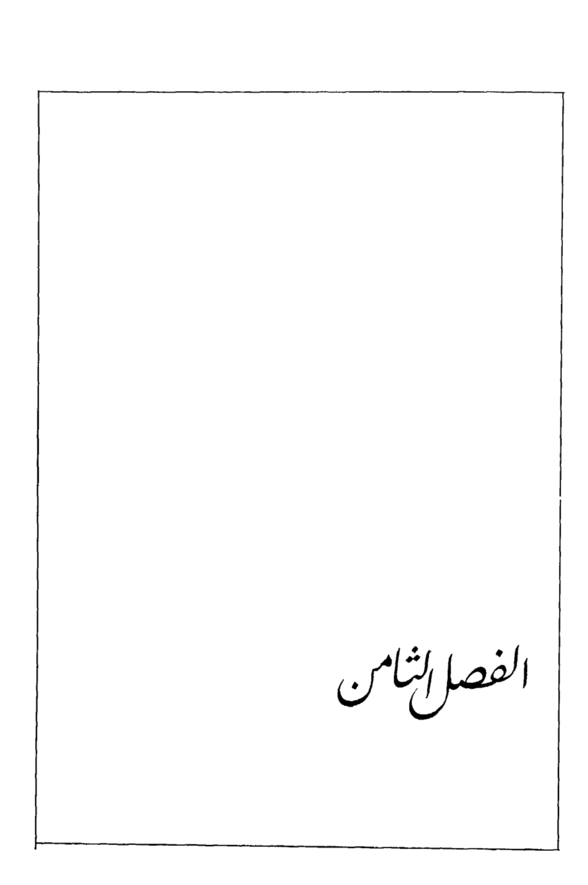
٦ ـ جد حلا لِـ لو س = جاس صحيحا لاربع منازل عشرية .

٧ ـ بين ان الحل الموجب لِـ جاس = ٨$س^{٣}$ يساوي $\frac{\sqrt{٦}}{٧}$ تقريبا .

٨ ـ على فرض ان أ > ٠ ، $س_{٠} > \sqrt{أ}$ و $س_{ن+١} = \frac{٣أ س_{ن} + س_{ن}^{٣}}{أ + ٣س_{ن}^{٢}}$. اثبت ان ($س_{ن}$) تقاربية وجد نهايتها. اثبت ان طريقة التكرار هي من الرتبة الثالثة. وجد ثابت الخطأ التقاربي .

٩ ـ ق : R ⟵ R بـ ق (س) = ١ + $س^{٢}$. ابدأ بأي عدد س . ∋ R ، ماذا يمكن ان تقول عن المتتالية ($س_{٠}$ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، . . .) في طريقة نيوتن؟

١٠ ـ اذا كان قً موجودا في فترة صغيرة [أ ، ب] وانه كان لِـ ق (س) = ٠ جذران متساويان تقريبا في (أ ، ب). اثبت ان الجذرين يساويان أ − $\frac{قَ (أ)}{قً(أ)}$ تقريبا .



الفصل الثامن

متسلسلات القوى

١ ـ مقدمة

افرض ان ($أ_ن$) متتالية من حدود مركبة. تولد هذه المتتالية متسلسلة قوى هي :

$$\sum أ_ن ع^ن = \sum_{ن=٠}^{\infty} أ_ن ع^ن = أ_٠ + أ_١ ع + أ_٢ ع^٢ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (١)$$

حيث ع عدد حقيقي أومركب. فاذا كان ع = ٠ فان المتسلسلة تكون تقاربية ومجموعها $أ_٠$. مهما كانت طبيعة $أ_ن$ الباقية. واذا كان ع $\neq$ ٠ فان المتسلسلة قد تكون تقاربية او تباعدية.

واذا كانت ($أ_ن$) متتالية بحيث ان $أ_ن = ٠$ لكل ن $>$ مـ، حيث مـ عدد ما في N ، فان المتسلسلة (١) تتحول الى الحدودية

$$أ_٠ + أ_١ ع + \ldots + أ_{مـ} ع^{مـ}.$$

لهذا فان متسلسلة القوى هي تعميم للحدودية.

وفي هذا الفصل سوف ندرس متسلسلات القوى لاهميتها الذاتية . ولكن هذه المتسلسلات هامة اذ تستعمل في العمليات الحسابية . على سبيل المثال، نعرف انه اذا كان يمكن تمثيل اقتران ما بمتسلسلة قوى فانه يمكن ايجاد تقريب جيد للاقتران بأخذ عدد من حدود (١) الاوائل، هذا على فرض ان $أ_{ن}$ مناسبة و |ع| صغير .

المثال ١ .

من متسلسلة ذات الحدين ، اذا كان س عددا حقيقيا و |س| < ١ فان

$$(١ - س)^{-\frac{١}{٢}} = ١ + \frac{س}{٢} + \frac{٣}{٨} س^{٢} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

فاذا كتبنا $\sqrt{٢} = \frac{٧}{٥} \times (\frac{٥٠}{٤٩})^{\frac{١}{٢}} = \frac{٧}{٥}(١ - \frac{١}{٥٠})^{-\frac{١}{٢}}$، فانه بوضع $س = \frac{١}{٥٠}$ في (٢) وبأخذ الحدود الثلاثة الاولى نحصل على $\sqrt{٢} = ١,٤١٤٢١$ وهذا صحيح لخمس منازل عشرية .

المثال ٢ .

(١) $\sum ع^{ن}$ هي احدى المتسلسلات التي درسناها (في الفصل ٥، البند ١). وهي ذات تقارب مطلق اذا كان |ع| < ١ وتباعدية اذا كان |ع| ⩾ ١ .

(٢) $\sum \frac{ع^{ن}}{(ن + ١)^{٢}}$ ذات تقارب مطلق اذا كان |ع| ⩽ ١ ، وتباعدية اذا كان |ع| > ١

لانه بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$|ع| \frac{(ن + ١)^{٢}}{(ن + ٢)^{٢}} \leftarrow |ع| \; (ن \leftarrow \infty)،$$

لهذا نحصل على تقارب مطلق اذا كان $|ع| < ١$، وتباعد اذا كان $|ع| > ١$. ويجب دراسة $|ع| = ١$ على حدة : فان

$$\sum \left| \frac{ع^{ن}}{(ن + ١)^{٢}} \right| = \sum \frac{١}{(ن + ١)^{٢}} < \infty$$

حسب نتيجة المثال ٦ في الفصل ٥ .

(٣) $\sum ن^{ن} ع^{ن}$ تقاربية اذا وفقط اذا كان ع = ٠ . اما ان ع = ٠ شرط كاف لأن تكون $\sum ن^{ن} ع^{ن}$ تقاربية فواضح . فلا ثبات انه شرط لازم افرض ان $\sum ن^{ن} ع^{ن}$ تقاربية فيكون $(ن ع)^{ن} \leftarrow ٠$ $(ن \leftarrow \infty)$، وهذا يتضمن ان ع = ٠، لانه اذا كان $|ع| > ٠$ فان $ن > \frac{١}{|ع|}$ تعطي $|(ن ع)^{ن}| > ١$ مما يناقض $(ن ع)^{ن} \leftarrow ٠$.

(٤) $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن!}{ن^{ن}} ع^{ن}$ ذات تقارب مطلق اذا كان $|ع| < e$ ، وتباعدية اذا كان $|ع| > e$. نحصل على هذا من تطبيق اختبار النسبة واستخدام $(١ + \frac{١}{ن})^{ن} \leftarrow e$ $(ن \leftarrow \infty)$.

تبقى حالة $|ع| = e$. ليس من الصعب اثبات ان المتسلسلة تباعدية لِـ $|ع| = e$ (انظر السؤال ٣ من التمارين ٨ ـ ١).

(٥) $\sum \frac{ع^{ن}}{ن!} = ١ + ع + \frac{ع^{٢}}{٢!} + \ldots$ ذات تقارب مطلق لجميع الاعداد المركبة ع . وهذا واضح من تطبيق اختبار النسبة . ان متسلسلة هذا المثال تعرف أحد أهم اقترانات التحليل (الاقتران الاسي) . وسوف ندرسه بالتفصيل في الفصل القادم .

تبين الامثلة السابقة ان متسلسلة القوى قد تكون تقاربية فقط عند ع = ٠، وقد تكون تقاربية لجميع $ع \in \mathbb{C}$ وقد تكون تقاربية لبعض حالات ع ≠ ٠، لا لجميعها .

النظرية ١ .

افرض ان $\sum$ أ$_ن$ ع^ن متسلسلة قوى وخذ المتتالية (| أ$_ن$ |$^{\frac{1}{ن}}$) = (| أ$_1$ | ، | أ$_2$ |$^{\frac{1}{2}}$ ، . . .) من الاعداد غير السالبة . هناك حالتان

(١) (| أ$_ن$ |$^{\frac{1}{ن}}$) غير محصورة .

(٢) (| أ$_ن$ |$^{\frac{1}{ن}}$) محصورة .

في الحالة (١) تكون $\sum$ أ$_ن$ ع^ن تقاربية اذا وفقط اذا كان ع = ٠ . وفي الحالة الثانية تكون $\sum$ أ$_ن$ ع^ن ذات تقارب مطلق اذا كان | ع | ل $<$ ١ وتباعدية اذا كان | ع | ل $>$ ١ حيث

ل = $\overline{نها}$ | أ$_ن$ |$^{\frac{1}{ن}}$ . . . . (٣)

فاذا كان ل $>$ ٠ ، فان نق = ل$^{-1}$ يدعى نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى .

واذا كان ل = صفرا فاننا نتعارف على كتابة نق = ∞ لتعني ان متسلسلة القوى ذات نصف قطر التقارب اللانهائي هي متسلسلة ذات تقارب مطلق لكل ع .

البرهان .

(١) اذا كان ع = ٠ فان $\sum$ أ$_ن$ ع^ن تكون تقاربية . وبالعكس اذا كانت $\sum$ أ$_ن$ ع^ن تقاربية وكانت (| أ$_ن$ |$^{\frac{1}{ن}}$) غير محصورة فان ع = ٠ . والا فيكون | ع | $>$ ٠ وبما ان (| أ$_ن$ |$^{\frac{1}{ن}}$) غير محصورة فان

$$| أ_ن |^{\frac{1}{ن}} > \frac{1}{| ع |}$$

لعدد لا نهائي من ن ، اذن | أ$_ن$ ع^ن | $>$ ١ ، لعدد لا نهائي من ن مما يناقض ان $\sum$ أ$_ن$ ع^ن تقاربية

(٢) في هذه الحالة فان النهاية العليا في (٣) موجودة ومحصورة وبتطبيق اختبار الجذر النوني في صورته التي تحوي النهاية العليا على $\sum$ | $أ_ن$ $ع^ن$ | نحصل على

$\overline{نها}$ | $أ_ن$ $ع^ن$ $|^{\frac{1}{ن}}$ = | ع | ل .

اذن نحصل على تقارب مطلق اذا كان | ع |.ل < ١ وتباعد اذا كان | ع | ل > ١ . فاذا كان ل = ٠ فان | ع | . ٠ < ١ لكل ع، واذا كان ل > ٠ فان | ع | ٠ ل < ١ تكافيء | ع | < نق

حيث نق = $\frac{١}{ل}$

اذا فسرنا (١) على ان نق = ٠ ، فانه يوجد لكل متسلسلة دائرة تقارب ، في داخلها يكون التقارب مطلقا وفي خارجها تباعد . يجب ان نتذكر ان نق = ٠ تعني دائرة نقطة ، وان نق = ∞ تعطي المستوى المركب باكمله .

وبدراسة المثال ٢ مرة ثانية نرى ان نق = ١ في (١) وَ(٢)، نق = ٠ في (٣)، نق = e في (٤)، نق = ∞ في (٥).

من المهم ان نلاحظ انه مع ان المعادلة (٣) تعطي نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum$ $أ_ن$ $ع^ن$ الا انه قد يكون من غير السهل حساب قيمة النهاية العليا . وعادة يكون من الأسهل تطبيق اختبار النسبة . فاذا وجدنا عند تطبيق اختبار النسبة انه يوجد عدد ما حـ بحيث ان المتسلسلة تكون ذات تقارب مطلق اذا كان | ع | < حـ وتباعدية اذا كان | ع | > حـ فان حـ يجب ان تكون هي نق . ويمكن اثبات ذلك بسهولة بفرض ان نق > حـ ، نق < حـ والحصول على تناقض في الحالتين.

اذا كان ٠ < نق < ∞ فانه من الصعب تحديد سلوك $\sum$ $أ_ن$ $ع^ن$ على محيط دائرة التقارب ، وخصوصا عندما لا يكون التقارب مطلقا . وسنوضح ذلك .

المثال ٣ .

لنأخذ متسلسلة القوى

$$\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{ع^{ن٢}}{ن ٢}$$

فباستخدام اختبار النسبة نجد ان نق = ١ . ففي الدائرة $|ع| = ١$ لا تكون المتسلسلة ذات تقارب مطلق، لأن

$$\sum \left| \frac{ع^{ن٢}}{ن ٢} \right| = \sum \frac{١}{ن ٢}$$

وهذه متسلسلة تباعدية قياسية . كذلك اذا كان $ع^٢ = ١$ ، اي ان $ع = \pm ١$ فان المتسلسلة تكون تباعدية . تبقى حال، $|ع| = ١$ ولكن $ع^٢ \neq ١$. لحل هذا الجزء نطبق النظرية ١٠، الفصل ٥، البند ٢ . حيث يعالج التقارب المشروط . فبأخذ $أ_ن = ع^{ن٢}$، $ب_ن = \frac{١}{ن ٢}$ في النظرية، كل ما نحتاجه هو اثبات ان المجاميع الجزئية لِـ $\sum أ_ن$ محصورة، لانه من الواضح ان $ب_ن$ تنازلي الى الصفر. الآن

$$|أ_١ + أ_٢ + \ldots + أ_ن| = |ع^٢ + ع^٤ + \ldots ع^{ن٢}|$$

$$= \left| \frac{١ - ع^{ن٢}}{١ - ع^٢} \right| \leqslant \frac{١ + |ع|^{ن٢}}{|١ - ع^٢|} = \frac{٢}{|١ - ع^٢|}$$

لجميع قيم ن، لان $|ع| = ١$، $ع^٢ \neq ١$.

اذن فان المتسلسلة ذات تقارب مطلق في $|ع| < ١$ وتقارب مشروط على $|ع| = ١$، $ع^٢ \neq ١$، وتباعدية لِـ $|ع| > ١$ و $ع = \pm ١$.

تمارين ٨ - ١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - جد قيمة $\sqrt{٣}$ صحيحة لخمس منازل عشرية .

٢ ـ جد نصف قطر التقارب لما يلي:

(١) $\sum$ ع $^{ن!}$ ،

(٢) $\sum \frac{ن!}{ن^{ن}}$ ع ^{ن}

(٣) $\sum \frac{(-١)^{ن}}{(٢ن)!}$ ع ^{٢ن}

(٤) $\sum$ (ن + ١)^{حـ} ع ^{ن}، حـ عدد نسبي ثابت

(٥) ١ + أع + $\frac{أ(أ-١)}{٢!}$ع^{٢} + $\frac{أ(أ-١)(أ-٢)}{٣!}$ع^{٣} + . . . حيث أ عدد ثابت في $\mathbb{C}$.

٣ ـ اثبت بالاستقراء انه لكل ن $\in$ N فان ن! $e^{ن} \geqslant$ ن ^{ن} e . استنتج ان المتسلسلة

$$\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن!}{ن^{ن}} ع^{ن}$$

تكون تباعدية على محيط دائرة التقارب.

٤ ـ عرّف س$_{ن}$ = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ + . . . + أ$_{ن}$ لـ ن = ٠ ، ١ ، . . . ، حيث أ$_{ن}$ اعداد مركبة. افرض ان س$_{ن}$ $\neq$ ٠ لكل ن. فاذا كان $\frac{أ_{ن}}{س_{ن}}$ $\leftarrow$ ٠ (ن $\leftarrow \infty$)، فاثبت ان نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum س_{ن} ع^{ن} = س_{٠} + س_{١} ع + \ldots$$

يساوي ١ . اثبت كذلك ان

$$\sum أ_{ن} ع^{ن} = (١ - ع) \sum س_{ن} ع^{ن} \quad لـ |ع| < ١.$$

استخدم هذه النتيجة لايجاد مجموع المتسلسلة $\sum$ (ن + ١)ع^{ن} لـ |ع| < ١.

٥ ـ ناقش التقارب المطلق، والتقارب المشروط والتباعد لِـ

$$\sum \frac{ع^{٤ن}}{\sqrt{ن+١}}$$

٦ ـ اكتب $سه = \{ أ = (أ_ن) \,|\, |أ_ن|^{\frac{١}{ن}} \leftarrow ٠ \ (ن \leftarrow \infty) \}$ وعرّف $أ + ب = (أ_ن + ب_ن)$، $حـ$
$٠ \ أ = (حـ أ_ن)$ لاي عدد مركب $حـ$، كذلك $أ * ب = (أ_٠ ب_ن + أ_١ ب_{ن-١} + \ldots +$
$أ_ن ب_٠)$.

اثبت ان $أ \in سه$ اذا وفقط اذا كانت المتسلسلة $\sum أ_ن ع^ن$ تقاربية لجميع الاعداد المركبة $ع$.
اثبت كذلك ان $(سه ، + ، *)$هي جبرية مركبة.

٢ . التفاضل

من السهل مفاضلة الحدودية $أ_٠ + أ_١ ع + \ldots + أ_ن ع^ن$. وبما ان متسلسلة القوى هي تعميم للحدودية فان المرء يتوقع (أو يأمل) ان تكون عملية مفاضلة متسلسلات القوى عملية سهلة. ويأمل أيضا ان يكون

$$\frac{د}{دع} \sum_{ن=٠}^{\infty} أ_ن ع^ن = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{د}{دع} (أ_ن ع^ن) = \sum_{ن=١}^{\infty} ن \, أ_ن ع^{ن-١} \quad \ldots\ldots (٤)$$

على الاقل لقيم $ع$ التي تكون عندها المتسلسلة $\sum أ_ن ع^ن$ تقاربية.

ان (٤) صحيحة، وهذا احد الاسباب التي تجعل متسلسلات القوى ذات فائدة في التحليل. وقبل اثبات (٤) نشير الى انها تحتاج فعلا الى برهان. ان (٤) تعني ان

$$\frac{د}{دع} (نها_{ر \leftarrow \infty} \sum_{ن=٠}^{ر} أ_ن ع^ن) = نها_{ر \leftarrow \infty} \sum_{ن=٠}^{ر} \frac{د}{دع} (أ_ن ع^ن).$$

فمع ان هذا الاستبدال لعملية التفاضل وعملية اخذ النهايات احداهما بالاخرى بالنسبة لمتسلسلات القوى يصح عندما تكون $ع$ في دائرة التقارب، فانه لا يصح اعتباطا مع اي اقتران

قابل للتفاضل.

المثال ٤.

لنأخذ س عددا حقيقيا، ولأي ر = ٠ ، ١ ، . . . نعرف

$$ق_ر(س) = \frac{س}{١ + (رس)^٢} .$$

فلأن $(١ - ر|س|)^٢ \geqslant ٠$ تتضمن ان $١ + (رس)^٢ \geqslant ٢ ر|س|$ ، يكون $|ق_ر(س)| \leqslant \frac{١}{٢ ر}$ لكل $س \in R$ ، لكل $ر > ٠$. لهذا، فانه لكل س، $ق_ر(س) \leftarrow ٠$ $(ر \leftarrow \infty)$، ومنه

$$\frac{د}{د س}(نها_{ر \leftarrow \infty} ق_ر(س)) = ٠ .$$

ولكن لكل س،

$$\frac{د}{د س}(ق_ر(س)) = \frac{١ - (رس)^٢}{(١ + ر^٢س^٢)^٢} ،$$

لهذا، فان $نها_ر قَ_ر(٠) = ١$، $نها_ر قَ_ر(س) = ٠$ لكل $س \neq ٠$. اذن تكون المعادلة

$$\frac{د}{د س} نها_ر ق_ر(س) = نها_ر \frac{د}{د س} ق_ر(س)$$

خطأ عند س = ٠.

النظرية ٢.

افرض ان نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{ن=٠}^{\infty} أ_ن ع^ن$ هو نق > ٠. اذن $\sum_{ن=١}^{\infty} ن أ_ن ع^{ن-١}$ ذات تقارب مطلق لكل $|ع| <$ نق ويكون

$$\frac{د}{دع} \sum_{ن=0}^{\infty} أ_ن ع^ن = \sum_{ن=1}^{\infty} ن أ_ن ع^{ن-1} \quad . . . . (٥)$$

البرهان.

سنفترض ان نق $<\infty$. (ببرهان مماثل جوهرياً نثبت الحالة عندما يكون نق $=\infty$).
سنطبق اختبار الجذر النوني بصورته التي تحوي على النهاية العليا للمتسلسلة $\sum |ن أ_ن ع^{ن-1}|$
لنحصل على

$$\overline{نها}\, ن^{\frac{1}{ن}} |أ_ن|^{\frac{1}{ن}} |ع|^{1-\frac{1}{ن}} = |ع|\, \overline{نها}\, |أ_ن|^{\frac{1}{ن}} = \frac{|ع|}{نق} ،$$

لكل $|ع| <$ نق ، لأن $ن^{\frac{1}{ن}} \leftarrow 1$ و $|ع|^{1-\frac{1}{ن}} \leftarrow |ع|$ (ن $\leftarrow \infty$) انظر (الفصل ٤ البند ٤). اذن $\sum |ن أ_ن ع^{ن-1}| < \infty$ اذا كان $|ع| <$ نق مما يثبت الجزء الاول من النظرية.

الآن نكتب ق (ع) $= \sum أ_ن ع^ن$ وهـ (ع) $= \sum ن أ_ن ع^{ن-1}$ لكل $|ع| <$ نق.
لاثبات (٥) يجب ان نثبت انه لِـ $|ع| <$ نق ، $|ع + و| <$ نق، و $\neq 0$ فان

$$ك (ع ، و) = \frac{ق (ع + و) - ق (ع)}{و} - هـ (ع) \leftarrow 0 \quad (و \leftarrow 0) \quad . . . (٦)$$

خذ $|ع| <$ نق، عين حـ بحيث ان $|ع| <$ حـ $<$ نق وخذ $0 < |و| <$ حـ $- |ع|$ ، لهذا فان $|ع + و| \leqslant |ع| + |و| <$ حـ $<$ نق. اذن

$$|ك (ع ، و)| \leqslant \sum_{ن=2}^{\infty} \left|\frac{أ_ن}{و}\right| \left|(ع + و)^ن - ع^ن - ن ع^{ن-1} و\right| . . . . . . (٧)$$

ومن نظرية ذات الحدين نحصل على

$$\left|(ع + و)^ن - ع^ن - ن ع^{ن-1} و\right| \leqslant \binom{ن}{2} |ع|^{ن-2} |و|^2 + . . . + |و|^ن$$
$$= (|ع| + |و|)^ن - |ع|^ن - ن |ع|^{ن-1} |و| .$$

وبتطبيق نظرية تايلورعلى ى (س) = $س^ن$ نحصل على

$ى(|ع| + |و|) = ى(|ع|) + |و| ىَ(|ع|) + \frac{|و|^{٢}}{٢}$ ىً(د)، حيث |ع| < د

< |ع| + |و| . اذن لِـ ن ≥ ٢ .

$$|(ع + و)^{ن} - ع^{ن} - ن ع^{ن-١} و| \leqslant \frac{|و|^{٢}}{٢} ن(ن - ١)(|ع| + |و|)^{ن-٢} \quad . \quad (٨)$$

من (٧) و(٨) نحصل على |ع| + |و| < حـ،

$$|ك(ع ، و)| \leqslant \frac{|و|}{٢} \sum_{ن=٢}^{\infty} ن(ن - ١)|أ_{ن}| حـ^{ن-٢} \quad . . . . \quad (٩)$$

وبتطبيق اختبار الجذر النوني على المتسلسلة في (٩) نحصل على

$$\overline{نها}_{ن} [ن(ن- ١)]^{\frac{١}{ن}} |أ_{ن}|^{\frac{١}{ن}} حـ^{١ - \frac{٢}{ن}} = حـ \overline{نها}_{ن} |أ_{ن}|^{\frac{١}{ن}} = \frac{حـ}{نق} .$$

لكن $\frac{حـ}{نق}$ < ١ ، اذن المتسلسلة تقاربية. ومجموع هذه المتسلسلة لا يعتمد على و، ويعتمد فقط على |أ$_{ن}$| ، حـ. اذن عندما و ← ٠ في (٩) نحصل على ك(ع ، و) ← ٠ مما يثبت (٦) والنظرية.

النتيجة ١ .

(١) افـرض ان $\sum$ أ$_{ن}$ع^{ن} لها نصف قطر تقـاربي نق > ٠ . اذن اقـتران مجمـوعهـا المعرف بـ ق(ع) = $\sum$ أ$_{ن}$ ع^{ن} له مشتقة لجميع الرتب على |ع| < نق،و

ق$^{(ر)}$(٠) = ر! أ$_{ر}$ لِـ ر = ٠ ، ١ ، . . . . (١٠)

(٢) ق متصل على |ع| < نق.

البرهان.

(١) أثبتنا في النظرية ان ق$^{(١)}$(ع) = $\sum$ ن أ$_{ن}$ع$^{ن-١}$ لِـ |ع| < نق، والمتسلسلة ذات

تقارب مطلق. فيمكن اذن تطبيق النظرية ثانية على $\sum$ ن $أ_ن$ ع $^{ن-1}$ ونحصل على

$$ق^{(2)}(ع) = \frac{د}{دع} ق^{(1)} ع = \sum_{ن=2}^{\infty} ن (ن - 1) أ_ن ع^{ن-2}$$

وبهذه الطريقة نحصل على

$$ق^{(ر)}(ع) = \sum_{ن=ر}^{\infty} ن (ن - 1) \ . \ . \ . \ (ن - ر + 1) أ_ن ع^{ن-ر} لِـ |ع| < نق$$. واذا عوضنا ع = • في هذه المعادلة، فان ع $^{ن-ر}$ = • لكل ن > ر ومن هذا تنتج (١٠).

من (١٠) نرى انه بالامكان كتابة اقتران المجموع على صورة

$$ق (ع) = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{ق^{(ن)}(0)}{ن!} ع^ن لِـ |ع| < نق.$$

(٢) هذا ينتج مباشرة لأن قابلية التفاضل تعطي الاتصال (الفصل ٧ البند ١).

النتيجة ٢ (نظرية تطابق متسلسلات القوى).

اذا كان لِـ $\sum$ $أ_ن$ ع ^{ن} و $\sum$ $ب_ن$ ع ^{ن} نفس نصف قطر التقارب نق > •

وكان $\sum$ $أ_ن$ ع ^{ن} = $\sum$ $ب_ن$ ع ^{ن} لكل |ع| < نق فان $أ_ن$ = $ب_ن$ لكل ن .

البرهان.

ضع ع = •، تحصل على $أ_0$ = $ب_0$. لاي ر ∈ N . فاضل ر من المرات طرفي $\sum$ $أ_ن$ ع ^{ن} = $\sum$ $ب_ن$ ع ^{ن} وضع ع = • نحصل على ر! $أ_ر$ = ر! $ب_ر$ اذن $أ_ر$ = $ب_ر$.

المثال ٥.

لنسأل السؤال التالي: هل يوجد اقتران مشتقته هي $\frac{1}{1 + ع}$؟ من الواضح انه يجب

وضع تحديدات على ع، سنفعل ذلك فيما بعد. وسبب طرح هذا السؤال أنه ليست أي مشتقة من مشتقات $(١ + ع)^{ن}$ مساوية $\frac{١}{١ + ع}$ لأي ن ∈ Z . وبما انه يمكن تمثيل $(١ + ع)^{-١}$ على صورة متسلسلة لِـ |ع| < ١ فانه يمكن البحث عن اقتران ق بحيث ان ق (ع) = $\sum أ_{ن} ع^{ن}$ لِـ |ع| < ١ وَقَ (ع) = $\frac{١}{١ + ع}$. وهذا يكافيء

$$\sum_{ن=١}^{\infty} ن أ_{ن} ع^{ن-١} = (١ + ع)^{-١} = \sum_{ن=٠}^{\infty} (-ع)^{ن}.$$

فمن النتيجة ٢ نحصل على $أ_{١} = ١$ ، $٢ أ_{٢} = -١$ ، $٣ أ_{٣} = ١$ ، . . . ، لهذا، وبوضع ($أ_{٠} = ٠$) نحصل على

$$ق (ع) = ع - \frac{ع^{٢}}{٢} + \frac{ع^{٣}}{٣} - \frac{ع^{٤}}{٤} + \ldots \quad لكل |ع| < ١ \quad . . . . (١١)$$

اذا عكسنا خطواتنا فبدأنا بالمتسلسلة في (١١) نرى ان نصف قطر التقارب لها هو ١ (من اختبار النسبة). لهذا فانها تعرف إقتراناً ق على |ع| < ١ مشتقته من النظرية ٢ هو $\frac{١}{١ + ع}$.

المثال ٦ .

لأي عدد نسبي حـ ولأي عدد صحيح ن ≥ ٠ اكتب

$$أ_{ن}^{حـ} = \frac{(حـ + ١)(حـ + ٢) \ldots (حـ + ن)}{ن!} \quad لكل ن \geq ١، \; أ_{٠}^{حـ} = ١.$$

اذا كان حـ عددا صحيحا ≥ ٠ فان $أ_{ن}^{حـ}$ هو معامل ذات الحدين $\binom{ن + حـ}{حـ}$ فلاي عددين نسبيين حـ ، د فاننا سنثبت ان

$$\sum_{ر=٠}^{ن} أ_{ر}^{حـ} أ_{ن-ر}^{د} = أ_{ن}^{حـ+د+١} \quad . . . . \quad (١٢)$$

تستخدم هذه النتيجة كثيرا في نظرية سيزار وللتجميع .

فلكل $|س| < 1$، وباستخدام متسلسلة ذات الحدين نحصل على

$$(1-س)^{-ح-1}(1-س)^{-د-1} = \left(\sum أ_ن^{ح} س^ن\right)\left(\sum أ_ن^{د} س^ن\right) \quad \dots\dots (13)$$

فالطرف الايمن من (١٣) يساوي

$$(1-س)^{-(ح+د+1)-1} = \sum أ_ن^{ح+د+1} س^ن \quad \dots\dots (14)$$

والطرف الايسر من (١٣) هو، حسب قاعدة كوشي للضرب،

$$\sum_{ن=0}^{\infty} \sum_{ر=0}^{ن} \left(أ_ر^{ح} أ_{ن-ر}^{د}\right) س^ن \quad \dots\dots (15)$$

وبما ان (١٤)، (١٥) متساويتان لكل $|س| < 1$ فان نظرية تطابق المتسلسلات تعطي (١٢).

تمارين ٨ ـ ٢

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ عرّف $ق_ن(س) = ن س (1-س)^ن$ لكل $0 \leqslant س \leqslant 1$، اثبت ان $نها_{ن\to\infty} ق_ن(س) = 0$ لكل $س \in [0 ، 1]$. اثبت كذلك ان المعادلة

$$\frac{د}{د س}\left(نها_ن ق_ن(س)\right) = نها_ن\left(\frac{د}{د س} ق_ن(س)\right)$$

غير صحيحة لكل $س \in [0 ، 1]$.

٢ ـ افرض ان $\sum_{ن=2}^{\infty} ن|أ_ن| \leqslant 1$. اثبت ان متسلسلة القوى

$ع + أ_2 ع^2 + أ_3 ع^3 + \dots$ اقتران تبايني على $|ع| < 1$.

٣ - (١) أثبت أن $\frac{د}{دع} \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ع^{ن}}{ن!} = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ع^{ن}}{ن!}$ لكل ع $\in \mathbb{C}$.

(٢) اثبت ان $\sum$ (ن + ١)ع ^{ن} و $\sum \binom{ن+٢}{٢}$ ع ^{ن} لهما نصف قطر تقارب هو ١ ثم جد مجموعيهما.

٤ ـ استخدم نظرية تطابق متسلسلات القوى لاثبات انه لكل $\in N$ فان

$$\sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر}^{٢} = \binom{٢ن}{ن}$$

٥ ـ جد اقترانا ق معرفاً على |ع| < ١ بمتسلسلة قوى بحيث ان ق (٠) = ٠ وقَ (ع) = $(١ + ع^{٢})^{-١}$ لِـ |ع| < ١.

٦ ـ على فرض ان س عدد حقيقي ، جد اقترانا ق معرفا على -١ < س < ١ بحيث ان ق (٠) = ٠ و

$$قَ (س) = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}} \text{ لِـ } -١ < س < ١.$$

٧ ـ لاي عدد حقيقي أ، واي عدد صحيح ن $\geqslant$ ٠، عرّف

$$\binom{أ}{٠} = ١، \binom{أ}{ن} = \frac{أ(أ - ١) \ldots (أ - ن + ١)}{ن!} \text{ لِـ ن } \geqslant ١.$$

اكتب ق (ع) = $\sum \binom{أ}{ن}$ ع ^{ن}. اثبت ان المتسلسلة تقاربية لكل |ع| < ١، وفاضلها حدا حدا لتثبت ان (١ + ع) قَ (ع) = أ ق (ع)، لِـ |ع| < ١.

في الحالة الخاصة عندما يكون ع حقيقيا (ع = س) وأ عددا نسبيا (تكون $(١ + س)^{أ}$ معرفة). استنتج ان .

$ق(س) = (1 + س)^{أ}$ لكل $-1 < س < 1$.

لاحظ ان هذا يعطي متسلسلة ذات الحدين لِـ $(1 + س)^{أ}$، $|س| < 1$، أ عدد نسبي دون استخدام نظرية تايلور.

٣. نظرية النهاية لآبل

لقد اثبتنا في النتيجة ١، للنظرية ٢، في البند السابق انه اذا كانت $\sum أ_ن ع^ن$ متسلسلة قوى نصف قطر تقاربها نق $>$ ٠ فان اقتران مجموعها المعرف بـ $ق(ع) = \sum أ_ن ع^ن$ يكون متصلا على $|ع| <$ نق. هذا يكافيء

$$\text{نها}_{ع \leftarrow ع_0} \sum أ_ن ع^ن = \sum أ_ن ع_0^ن \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

لكل $ع_0$ داخل دائرة التقارب، اي لكل $|ع_0| <$ نق.

من المثير للاهتمام، والمفيد احيانا، ايجاد شروط تجعل (١٦) صحيحة لـ$ع_0$ على محيط دائرة التقارب. اي عندما تكون $|ع_0| =$ نق. لتبسيط الامور سوف نعتبر ع حقيقيا فقط، فتصبح دائرة التقارب فترة تقارب على خط الاعداد الحقيقية، لان $\{س \,|\, |س| < نق\} =$ (-نق ، نق). في هذه الحالة فان النقط التي على محيط دائرة التقارب هي نق، -نق. فاذا كانت (١٦) لها معنى عند $ع_0 =$ نق فانه يجب ان تكون المتسلسلة $\sum أ_ن نق^ن$ تقاربية. كان الرياضي النرويجي المعروف ن. هـ. آبل أول من اثبت ان تقارب $\sum أ_ن نق^ن$ كاف لتحقيق (١٦) على الاعداد الحقيقية.

النظرية ٣ (نظرية النهاية لأبل).

افرض ان نق $>$ ٠، وان $\sum أ_ن نق^ن$ تقاربية. اذن $\sum أ_ن س^ن$ ذات تقارب مطلق

لِـ | س | < نق و

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{نق}-} \sum \text{أ}_{\text{ن}}\, \text{س}^{\text{ن}} = \sum \text{أ}_{\text{ن}}\, \text{نق}^{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٧)$$

البرهان.

نذكر اولا ان س ← نق – تعني ان س ← نق ودائما تكون اقل من نق . لنكتب $\text{ب}_{\text{ن}}$ = $\text{أ}_{\text{ن}}$ $\text{نق}^{\text{ن}}$ و $\text{ص}_{\text{ن}}$ = $\text{ب}_{٠}$ + $\text{ب}_{١}$ + . . . + $\text{ب}_{\text{ن}}$ ، لنفرض ان $\sum$ $\text{ب}_{\text{ن}}$ تقاربية الى ص . اذن $\text{ص}_{\text{ن}}$ ← ص (ن ← ∞) .

لهذا فان ($\text{ص}_{\text{ن}}$) محصورة ، واذن يوجد م > ٠ بحيث ان

$$|\text{ص}_{\text{ن}}| \leqslant \text{م لكل ن} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٨)$$

اذن | $\text{ب}_{\text{ن}}$ | = | $\text{ص}_{\text{ن}}$ – $\text{ص}_{\text{ن}-١}$ | ⩽ | $\text{ص}_{\text{ن}}$ | + | $\text{ص}_{\text{ن}-١}$ | ⩽ ٢م لكل ن . كذلك بما ان $\text{ص}_{\text{ن}}$ ← ص (ن ← ∞) ، فان (١٨) تعطي | ص | ⩽ م . اذن | $\text{ص}_{\text{ن}}$ – ص | ⩽ | $\text{ص}_{\text{ن}}$ | + | ص | ⩽ ٢م لكل ن . كذلك بما ان $\text{ص}_{\text{ن}}$ ← ص (ن ← ∞) فانه لأي ∈ > ٠ يوجد

δ بحيث ان | $\text{ص}_{\text{ن}}$ – ص | < $\frac{\epsilon}{٢}$ لكل ن ⩾ مـ .

الآن لِـ | س | < نق نحصل على

$$\sum |\text{أ}_{\text{ن}}\, \text{س}^{\text{ن}}| = \sum |\text{ب}_{\text{ن}}|\, \left|\frac{\text{س}}{\text{نق}}\right|^{\text{ن}} \leqslant ٢\,\text{م} \sum \left|\frac{\text{س}}{\text{نق}}\right|^{\text{ن}} < \infty$$

هذا يثبت ان $\sum$ $\text{أ}_{\text{ن}}$ $\text{س}^{\text{ن}}$ ذات تقارب مطلق لكل | س | < نق .

لاثبات (١٧) يجب ان نثبت انه لأي ∈ > ٠ يوجد δ > ٠ بحيث ان نق – δ < س < نق تعطي

$$\left|\sum \text{أ}_{\text{ن}}\, \text{س}^{\text{ن}} - \text{ص}\right| < \epsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٩)$$

كما سنرى فيما بعد فان :

δ = أص $\{ \frac{\epsilon \text{ نق}}{\text{٤ مـ م}} ، \frac{\text{نق}}{٢} \}$

تصلح . لانه اذا كان نق − δ > س > نق وكتبنا ل = $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ ، فان ٠ > ١ − $\frac{\delta}{\text{نق}}$ > ل > ١ ، ومنه

$$\text{ل} > ٠ \text{ و } ٠ > ١ - \text{ل} > \frac{\delta}{\text{نق}} > \frac{\epsilon}{\text{٤مـ م}} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (٢٠)$$

وبتطبيق صيغة أبل للمجموع الجزئي (الفصل ٥، البند ٢) نحصل على

$$\sum_{\text{ن}=٠}^{\text{ر}} \text{أ}_{\text{ن}} \text{س}^{\text{ن}} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\text{ر}} \text{أ}_{\text{ن}} \text{ل}^{\text{ن}} = \text{ص}_{\text{ر}} \text{ل}^{\text{ر}} + \sum_{\text{ن}=٠}^{\text{ر}-١} \text{ص}_{\text{ن}} (١ - \text{ل}) \text{ل}^{\text{ن}} . \qquad (٢١)$$

من (١٨) والمتباينة ٠ > ل > ١ نحصل على $|\text{ص}_{\text{ر}} \text{ل}^{\text{ر}}| \leqq$ م ل$^{\text{ر}}$ ← ٠ (ر ← ∞). واذن عندما ر ← ∞ في (٢١) نحصل على

$$\sum \text{أ}_{\text{ن}} \text{س}^{\text{ن}} = \sum \text{ص}_{\text{ن}} (١ - \text{ل}) \text{ل}^{\text{ن}} \ldots\ldots \qquad (٢٢)$$

باستخدام (٢٢)، وبما ان $\sum \text{ل}^{\text{ن}} = \frac{١}{١ - \text{ل}}$ فاننا نحصل على

$$|\sum \text{أ}_{\text{ن}} \text{س}^{\text{ن}} - \text{ص}| = |\sum \text{ص}_{\text{ن}} (١ - \text{ل}) \text{ل}^{\text{ن}} - \text{ص}|$$

$$= |\sum \text{ص}_{\text{ن}} (١ - \text{ل}) \text{ل}^{\text{ن}} - \text{ص} \sum (١ - \text{ل}) \text{ل}^{\text{ن}}|$$

$$\leqq \sum |\text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}| (١ - \text{ل}) \text{ل}^{\text{ن}}$$

$$= \sum_{\text{ن}=٠}^{\text{مـ}-١} |\text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}| (١ - \text{ل}) \text{ل}^{\text{ن}} + \sum_{\text{ن}=\text{مـ}}^{\infty} |\text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}| (١ - \text{ل}) \text{ل}^{\text{ن}} .$$

الآن $|\text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}| \leqq$ ٢م لكل ن، وكذلك $|\text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}| > \frac{\epsilon}{٢}$ لكل ن $\leqslant$ مـ.

كذلك ل^{ن} < ١ و ١ − ل < $\frac{\epsilon}{٢مـ م}$ من (٢٠). من ذلك ينتج ان

$$\left| \sum أ_{ن} س^{ن} - ص \right| \leqslant ٢م (١ - ل) \sum_{ن=٠}^{ب-١} ل^{ن} + \frac{\epsilon}{٢} + \sum_{ن=ب}^{\infty} (١ - ل) ل^{ن} .$$

$$\leqslant ٢م (١ - ل) مـ + \frac{\epsilon}{٢} \sum_{ن=٠}^{\infty} (١ - ل) ل^{ن}$$

$$\leqslant ٢م \frac{\epsilon}{٤مـ م} مـ + \frac{\epsilon}{٢} = \epsilon .$$

هذا يثبت (١٩) فالنظرية.

المثال ٧.

افرض ان أ > ٠ عدد نسبي. فاذا كان أ عددا صحيحا فانه يمكن كتابة $(١ - س)^{أ}$ كمتسلسلة ذات الحدين المنتهية والصحيحة لكل س. واذا لم يكن أ عددا صحيحا فانه حسب البند السابق

$$(١ - س)^{أ} = ١ - أ س + \frac{أ(أ - ١)}{١٢} س^{٢} - \ldots \ldots \ldots \quad (٢٣)$$

لكل | س | < ١.

لندرس صحة (٢٣) عند س = ١؛ فبما ان أ > ٠ فان

$$نها_{س \leftarrow ١-} (١ - س)^{أ} = ٠ .$$

واذا استطعنا اثبات ان المتسلسلة في (٢٣) هي تقاربية عند س = ١ فانه يكون بامكاننا تطبيق نظرية النهاية لآبل ونحصل على ان (١٣) صحيحة عند س = ١، اي ان

$$٠ = ١ - أ + \frac{أ(أ - ١)}{١٢٠} - \ldots \ldots$$

يفشل اختبار النسبة في اعطاء نتيجة للمتسلسلة ١ − أ + $\frac{أ(أ - ١)}{١٢}$ − . . . . فلنحاول

اختبار رابي (الفصل ٥، البند ٢) ونكتب

$$ب_ن = \frac{(-1)^ن أ(أ-1)\ldots(أ-ن+1)}{ن!}$$

لنحصل على انه لكل ن > أ،

$$ن\left(\left|\frac{ب_{ن+1}}{ب_ن}\right| - 1\right) = ن\left(\frac{ن-أ}{ن+1} - 1\right) \leftarrow -أ-1 \text{ عندما } (ن \leftarrow \infty)$$

. بما ان أ > ٠، -أ-١ < -١ فانــه وبــاستخــدام اختبـار رابي نحصـل على ان المتسلسلة ذات تقارب مطلق. اذن، ومن نظرية أبل نحصل على ان (٢٣) صحيحة لكل -١ < س ≤ ١. ويمكن اثبات ان (٢٣) صحيحة عند س = -١ بنفس الطريقة. وعندها يكون

$$٢^أ = ١ + أ + \frac{أ(أ-1)}{2!} + \ldots$$

استخدم أبل نظريته لاثبات النتيجة التالية التي تتعلق بضرب كوشي للمتسلسلات التقاربية.

النظرية ٤ [نظرية الضرب لأبل].

افرض ان $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ تقاربيتان. وافرض ان متسلسلة الضرب الكوشي $\sum حـ_ن$ تقاربية حيث $حـ_ن = أ_0 ب_ن + أ_1 ب_{ن-1} + \ldots + أ_ن ب_0$.
اذن

$$\left(\sum أ_ن\right)\left(\sum ب_ن\right) = \sum حـ_ن.$$

البرهان.

سوف نطبق نظرية النهاية لأبل، حيث نق = ١ لكل من $\sum أ_ن$، $\sum ب_ن$. فبما ان

$\sum |أ_ن س^ن| < \infty$ و $\sum |ب_ن س^ن| < \infty$ لـ $|س| < ١$. من التقارب المطلق والنظرية ١٤، الفصل ٥، نحصل على

$$(\sum أ_ن س^ن)(\sum ب_ن س^ن) = \sum حـ_ن س^ن \quad \text{. .} \qquad (٢٤)$$

لـ $|س| < ١$.

عندما $س \leftarrow ١-$ في (٢٤) فان نظرية ابل تعطي

$$(\sum أ_ن)(\sum ب_ن) = \sum حـ_ن$$

لان $\sum أ_ن$، $\sum ب_ن$، $\sum حـ_ن$ تقاربيات.

كذلك تستخدم نظرية الضرب عندما يكون $أ_ن = ب_ن$ لكل ن فيكون

$حـ_ن = أ_٠ أ_ن + أ_١ أ_{ن-١} + \ldots$ واذا كانت $\sum أ_ن$، $\sum حـ_ن$ تقاربيتين فان

$$(\sum أ_ن)^٢ = \sum حـ_ن .$$

المثال ٨.

نعرف ان المتسلسلة $١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \ldots$ تقاربية باستخدام اختبار ليبنتس (الفصل ٥ البند ٢). سوف نثبت فيما بعد ان مجموعها هو لو٢. واذا رمزنا للحد العام بالرمز $أ_ن$،

فان الحد العام لمتسلسلة الضرب الكوشي لـ $(\sum أ_ن)^٢$ يكون

$$حـ_ن = \sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر أ_{ن-ر} = \sum_{ر=٠}^{ن} \frac{(-١)^ن}{(ر+١)(ن-ر+١)}$$

$$= \frac{(-1)^{ن}}{(ن+2)} \sum_{ر=0}^{ن} \left(\frac{1}{ر+1} + \frac{1}{ن-ر+1} \right)$$

$$= \frac{2(-1)^{ن}}{ن+2} \sum_{ر=0}^{ن} \frac{1}{ر+1} = (-1)^{ن} د_{ن} \quad . \; . \; . \; . \qquad (25)$$

وعلى فرض ان $\sum$ حـ $_{ن}$ تقاربية فانه يمكن تطبيق نظرية الضرب لآبل ونحصل على

$$(لو 2)^{2} = 2 \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(-1)^{ن}}{ن+2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{ن+1}\right).$$

الآن $\sum$ حـ $_{ن}$ تقاربية من اختبار ليبنتس لانه من (25) نحصل على

$$د_{ن} - د_{ن+1} = \frac{2}{(ن+2)(ن+3)} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{ن+1} - 1\right) \geqslant 0،$$

اذن (د $_{ن}$) وتيرية متناقصة. كذلك $\frac{1}{ر+1} \leftarrow 0$ عندما ر $\leftarrow \infty$ ، والوسط الحسابي

$$و_{ن} = \frac{1}{ن+1} \sum_{ر=0}^{ن} \frac{1}{ر+1} \leftarrow 0 \; (ن \leftarrow \infty).$$

(انظر التمارين 4 - 1). اذن

$$د_{ن} = 2 \frac{(ن+1)}{ن+2} و_{ن} \leftarrow 0 \; (ن \leftarrow \infty).$$

وهكذا فان (د $_{ن}$) متناقصة وتقترب من الصفر، اذن $\sum$ حـ $_{ن}$ = $\sum (-1)^{ن}$ د $_{ن}$ تقاربية.

تمارين 8 - 3

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

1 - (تعميم لنظرية النهاية لآبل). افرض ان $\sum$ أ $_{ن}$ تقاربية.

وافرض انه لكل ن، هـ $_{ن}$: (0 ، 1) $\leftarrow R$ وان

(١) $نها_{س \leftarrow ١^-} هـ_ن (س) = ١$ لكل ن

(٢) $ص.ح.ع._{٠ < س < ١} \sum | هـ_ن (س) - هـ_{ن+١} (س) | < \infty$

اثبت ان $نها_{س \leftarrow ١^-} \sum أ_ن هـ_ن (س) = \sum أ_ن$.

في الحالة الخاصة عندما يكون $هـ_ن (س) = س^ن$ بين ان (١)، (٢) تتحققان واستنتج نظرية النهاية لأبل عندما $س \leftarrow ١^-$.

٢ ـ افرض ان س عدد حقيقي وإفرض ان نصف قطر التقارب لـ $أ_ن س^ن$ هو نق > ٠. اثبت ان كل نقطة تكون عندها المتسلسلة تقاربية هي نقطة اتصال.

٣ ـ من نظرية النهاية لأبل فانه اذا كانت $\sum أ_ن$ تقاربية فان $ق (س) = \sum أ_ن س^ن$ تقاربية لكل $| س | < ١$ و$نها_{س \leftarrow ١^-} ق (س)$ موجودة وتساوي $\sum أ_ن$.

(١) قد يحدث ان تكون ق (س) تقاربية لكل $| س | < ١$ و$نها_{س \leftarrow ١^-} ق (س)$ موجودة مع ان $\sum أ_ن$ تباعدية. بين ان هذه هي الحال عندما يكون $أ_ن = (-١)^ن$.

(٢) اعط مثالا لمتسلسلة $\sum أ_ن س^ن$ تكون تباعدية لكل $٠ < س \leqslant ١$

(٣) افرض ان $أ_ن \geqslant ٠$ لكل $ن \geqslant ٠$ وافرض ان المتسلسلة $ق (س) = \sum أ_ن س^ن$ تقاربية لكل $٠ < س < ١$ ولكن $أ_ن$ تباعدية. اثبت ان $ق (س) \leftarrow \infty$ $(س \leftarrow ١^-)$.

(٤) اكتب $ص_ن = أ_٠ + أ_١ + \ldots + أ_ن$ و$ل_ن = ص_٠ + ص_١ + \ldots + ص_ن$ اذا كان $\frac{ل_ن}{ن + ١} \leftarrow ٠$ عندما $ن \leftarrow \infty$ فاثبت ان $\frac{ص_ن}{ن + ١} \leftarrow ٠$ و $\frac{أ_ن}{ن + ١} \leftarrow ٠$ عندما $ن \leftarrow \infty$.

استنتج ان لكل $| س | < ١$ فان $\sum أ_ن س^ن$ تكون تقاربية وان

$\sum$ أ$_{ن}$ س^{ن} = (١ - س) $\sum$ ص$_{ن}$ س^{ن} = (١ - س)^{٢} $\sum$ ل$_{ن}$ س^{ن} .

كذلك برهن على انه اذا كان

$$\frac{ص_{٠} + ص_{١} + \ldots + ص_{ن}}{ن + ١} \leftarrow ص \text{ عندما } ن \leftarrow \infty$$

فان

نها$_{س \leftarrow ١-}$ $\sum$ أ$_{ن}$ س^{ن} = ص .

(٥) افرض ان أ$_{ن}$ = (-١)^{ن} (ن + ١) وص$_{ن}$ = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ + . . . + أ$_{ن}$. اثبت ان المتتالية ($\frac{ص_{٠} + ص_{١} + \ldots + ص_{ن}}{ن + ١}$) تباعدية ، ولكن نها$_{س \leftarrow ١-}$ $\sum$ أ$_{ن}$ س^{ن} = $\frac{١}{٤}$.

(٦) اثبت ان ق (س) = ١ - س^{٢} + س^{٣} - س^{٥} + س^{٦} - س^{٨} + س^{٩} - س^{١١} + . . . لها نصف قطر تقارب = ١ ، واثبت ان

نها$_{س \leftarrow ١-}$ ق (س) = $\frac{٢}{٣}$.

٤ ـ اكتب ق (س) = $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{س^{ن}}{ن^{٢}}$. اثبت ان هذه المتسلسلة ذات تقارب مطلق لكل | س | $\leqslant$ ١ ، وتباعدية لكل | س | > ١ . اذن ق : [-١ ، ١] $\leftarrow$ R . اثبت ان ق قابل للتفاضل على الفترة المفتوحة (-١ ، ١) ولكن غير قابل للتفاضل عند س = ١ ، اي اثبت ان

نها$_{س \leftarrow ١-}$ $\frac{ق (س) - ق (١)}{س - ١}$ غير موجودة .

٥ ـ افرض ان $\sum$ ن أ$_{ن}$ = أ$_{١}$ + ٢ أ$_{٢}$ + ٣ أ$_{٣}$ + . . . ذات تقارب مطلق . اثبت ان ق (س) = $\sum$ أ$_{ن}$ س^{ن} = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ س + . . . ذات تقارب مطلق لكل | س | $\leqslant$ ١ ، واثبت ان ق قابل للتفاضل على | س | $\leqslant$ ١ .

(لاحـظ ان السؤ ال ٤ يبـين ان نقـاط التقارب قد لا تكون نقاط تفاضل وان السؤ ال ٥

يعطي شروطا لكي تكون هذه النقاط نقاط تفاضل).

٦ ـ افرض ان المجاميع الجزئية لِـ $\sum$ أ$_{ن}$ ع^{ن} محصورة على دائرة الوحدة، اي ان

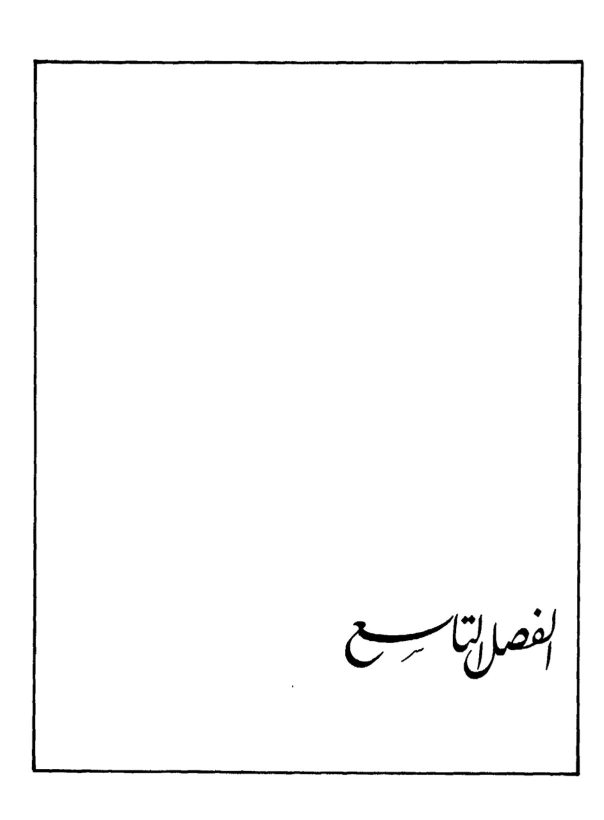
$$| أ_{٠} + أ_{١}ع + \ldots + أ_{ن}ع^{ن} | \leqslant م$$

لكل ن، لكل ع بحيث ان |ع| = ١ ولعدد ما م > ٠، لا يعتمد على ن أو ع. اثبت ان ق (ع) = $\sum$ أ$_{ن}$ ع^{ن} تقاربية لِـ |ع| < ١. باخذ حاصل الضرب الكوشي لِـ ق (ع) بـ $\sum$ |ع|^{ن} ، اثبت ان |ق (ع)| $\leqslant$ م لِـ |ع| < ١، اي ان ق محصورة على قرص الوحدة المفتوح.

٧ ـ اثبت ان المتسلسلة س ـ $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{س^{٥}}{٥}$ ـ $\frac{س^{٧}}{٧}$ + . . . تقاربية لِـ ‎-١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ١.

افـرض ان مجمـوعهـا هو ص عنـدمـا يكـون س = ١. سوف نثبت في الفصل القادم ان ص = $\frac{\pi}{٤}$. استخدم نظرية الضرب لآبل لاثبات ان

$$ص^{٢} = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(-١)^{ن}}{ن + ١} (١ + \frac{١}{٣} + \ldots + \frac{١}{٢ن + ١}).$$



الفصل التاسع

الاقترانات الابتدائية

١ ـ الاقتران الاسي

هناك عدد من الاقترانات تظهر بكثرة في معظم فروع الرياضيات وتطبيقاتها، لهذا فهي جديرة بعرض مفصل. ويمكن بالطبع اعتبار اي اقتران معروف لدينا اقترانا ابتدائيا. أما ما نقصده هنا فهو الاقترانات الاسية والمثلثية ومعكوساتها. فهذه الاقترانات تذكر عادة وتستعمل قبل ان يدرس الطالب مادة التحليل، ولذا فمن المحتمل ان تكون خصائصها قد درست عن طريق التفكير الهندسي البديهي. ولا يجوز ان نستهين بالتفكير الهندسي البديهي، طالما هو يوحي بنتائج صحيحة وهامة. ولكن المقاييس المنطقية الراهنة تقتضي اعطاء برهان يعتمد فقط على مسلمات الاعداد الحقيقية والمركبة، ونتائجها المنطقية. ولدينا الآن كل النظريات التي

نحتاج اليها في التحليل، لنتمكن من تعريف هذه الاقترانات الابتدائية ودراستها.

وفي مقدمة الاقترانات الاساسية الابتدائية: الاقتران الأسي، لانه يمكن تعريف الاقترانات المثلثية بدلالته.

وهناك طرق عديدة لتوضيح هذا الاقتران. ولكننا سوف نختار طريقة دقيقة رياضياً، ولها أهمية فيزيائية.

لقد تم التوصل بالتجربة الى انه اذا تركت كمية من الراديوم تنحل، فان سرعة الانحلال تتناسب طرديا مع الكمية الباقية. فاذا رمزنا بالرمز ق (ن) لكمية الراديوم الباقية بعد زمن ن، وفسرنا سرعة الانحلال على انها قَ (ن)، فانه يمكن كتابة المعادلة التفاضلية

قَ (ن) = حـ ق (ن) . . . . (١)

حيث حـ ثابت التناسب. والهدف هنا هو حل (١) لايجاد ق (ن) بصيغة اقتران صريح في ن.
ونحصل ايضا على معادلة مثل (١) اذا كان هناك وضع به يزداد عدد البكتيريا بسرعة تتناسب مع العدد الموجود منها في لحظة ما.

وللتبسيط سوف ندرس (١) عندما يكون حـ = ١، ق (٠) = ١.

النظرية ١.

اذا وجد اقتران ق : $R \longrightarrow R$ بحيث ان قَ موجود على R ويحقق قَ (س) = ق (س) لكل س $\in R$ وق (٠) = ١، فان ق يكون على الصورة:

$$\text{ق (س)} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} \quad . . . . (٢)$$

لكل س $\in R$.

وبالعكس، ان المتسلسلة في (٢) تقاربية لجميع قيم س وتعرف اقترانا يحقق قَ (س) = ق (س) وَق (٠) = ١.

البرهان.

لنفرض ان ق موجود ويحقق الشروط المذكورة. سوف نثبت اولا ان ق يحقق العلاقة

ق (س + ص) = ق (س) · ق (ص) . . . . . . (٣)

لكل س ، ص. هناك طريقة أخرى لتفسير (٣) وهي القول ان ق هو اقتران محافظ بين الزمرتين (R ، +) ، (R^+ ، ·) (انظر الفصل ١، البند ٣).

لبرهان (٣) خذ حـ، و ∈ R واكتب أ = حـ + و. فبما ان قَ (س) = ق (س) فان

$\frac{د}{د س}$[ق (س) ق (أ − س)] = −ق (س) ق (أ − س) + ق (أ − س) ق (س) = ٠

لكل س، اذن ق (س) · ق (أ − س) = ثابتا = ق (٠) ق (أ). فاذا وضعنا س = حـ، نحصل على ق (حـ) ق (و) = ق (حـ + و)، لان ق (٠) = ١. وبما ان حـ ، و اختياريان فان (٣) صحيحة.

وهناك نتيجة مباشرة ومثيرة للاهتمام لِـ (٣): وهي ان ق (س) > ٠ لكل س. لأن ق ($\frac{س}{٢}$ + $\frac{س}{٢}$) = (ق ($\frac{س}{٢}$))^٢ ≥ ٠، اذن ق (س) ≥ ٠ لكل س. فاذا وجد س بحيث ان ق (س) = ٠ فاننا، ومن (٣)، نحصل على:

١ = ق (٠) = ق (س + (−س)) = ق (س) · ق (−س) = ٠

وهذا تناقض. اذن ق (س) > ٠ على R . وبما ان قَ (س) = ق (س) نحصل على قَ (س) > ٠ على R . واذن فمن نتيجة في الفصل ٧، البند ٣، نحصل على ان ق متزايد فعلا.

الآن من قَ (س) = ق (س)، نحصل على ان قً موجود ويحقق قً (س) = ق (س). وبشكل عام فان ق $^{(ن)}$ (س) = ق (س) لكل ن ∈ N ، لكل س ∈ R . ومن نظرية تايلور: نكتب متسلسلة تايلور حول س = ٠ ونحصل على

ق (س) = ق (٠) + س قَ (٠) + . . . + $\frac{س^ن}{ن!}$ ق $^{(ن)}$ (حـ)

= ١ + س + . . . + $\frac{س^ن}{ن!}$ ق (حـ)،

حيث حـ بين الصفر وس. ولاثبات (٢)، التي تكافيء

$$\text{نها}_{\text{ن} \leftarrow \infty} \left| \text{ق (س)} - \sum_{\text{ر}=\cdot}^{\text{ن}-1} \frac{\text{س}^{\text{ر}}}{\text{ر}!} \right| = \cdot$$

يجب ان نثبت ان $\text{نها}_{\text{ن}} \left| \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} \text{ق (حـ)} \right| = \cdot$ لكل س. لكننا نعرف ان $\left| \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} \right| \leftarrow \cdot$

عندما ن $\leftarrow \infty$ لكل س، (الفصل ٤، البند ٤)، اذن يكفي ان نثبت ان | ق (حـ) | لا يصبح كبيرا بازدياد ن. مع اننا لم نشدد على ان حـ تعتمد على س ون، الا ان هذا واضح. فَ ق متزايد. اذن س $>$ ٠ تعطي | ق (حـ) | = ق (حـ) $<$ ق (س) ؛ وكذلك س $<$ ٠ تعطي | ق (حـ) | = ق (حـ) $<$ ق (٠) = ١. اذن لأي س $\neq$ ٠، فان :

$$\left| \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} \text{ق (حـ)} \right| \leqslant \left| \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} \right| (1 + \text{ق (س)}) \leftarrow \cdot$$ عندما ن $\leftarrow \infty$، مما يثبت (٢)

في هذه الحالة. وعندما يكون س = ٠ فان (٢) تكون بديهية.

خلاصة ما توصلنا اليه اننا بينا ان للاقتران الذي يحقق المعادلة التفاضلية متسلسلة قوى في (٢). وكذلك توصلنا الى ان هذا الاقتران يحقق (٣) وهو موجب ومتزايد فعلا.

الآن نعود الى عكس النظرية : بعد ان وجدنا المتسلسلة (٢) من الجزء الاول يصبح من السهل اثبات ان هذه المتسلسلة تعرف اقترانا يحقق المعادلة التفاضلية. وبالطبع كان بالامكان البدء بكتابة المتسلسلة (٢)، وبذا نوفر الوقت. ولكن الفائدة تكون أقل.

من اختبار النسبة لأي عدد حقيقي (اومركب) س $\neq$ ٠ فان

$$\left| \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{س}^{\text{ن}}} \cdot \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}+1)!} \right| = \frac{|\text{س}|}{\text{ن}+1} \leftarrow \cdot \quad (\text{ن} \leftarrow \infty)،$$

اذن $\sum \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}$ ذات تقارب مطلق (واذن تقاربية). والمتسلسلة تقاربية بالطبع عند س = ٠. وهذه المتسلسلة تعرف اقترانا ق على R (أو $\mathbb{C}$) الى R (أو $\mathbb{C}$) اعتمادا على كون س عددا حقيقيا أو مركبا. يسمى هذا الاقتران الاقتران الأسي، ويرمز له بالرمز سا، فيكون

$$سا(س) = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^ن}{ن!} = ١ + س + \frac{س^٢}{٢!} + \ldots\ldots\ldots \qquad (٤)$$

لجميع الاعداد الحقيقية او المركبة س. وبوضع س = ٠ نحصل على سا (٠) = ١. ومن النظرية ٢، الفصل ٨، وبما ان المتسلسلة تقاربية، فانه يمكن مفاضلة الحدود ونحصل على

$$\frac{د}{د س}(سا(س)) = ٠ + ١ + س + \frac{س^٢}{٢!} + \ldots = سا(س).$$

لقد اثبتنا الآن ان سا هو اقتران يحقق شروط الجزء الاول من النظرية. ومن الجزء الاول نحصل على الخواص العادية للاقتران سا، مثل نظرية الجمع:

$$سا(س + ص) = سا(س) \cdot سا(ص)$$

ان الامر الجوهري في النظرية ١ هو انه يوجد اقتران وحيد، يحقق $قَ(س) = ق(س)$ و$ق(٠) = ١$ هو الاقتران المعرف بـ (٤).

نستطيع الآن اعطاء الحل العام للمعادلة التفاضلية (١).

النظرية ٢.

افرض ان ق قابل للتفاضل على R وان حـ ثابت. فيكون

$$قَ(س) = حـ ق(س)$$

اذا وفقط اذا كان ق (س) = أ سا (حـ س) حيث أ = ق (٠).

البرهان.

اذا كان ق (س) = أ سا (حـ س)، فان ق (٠) = أ وَقَ (س) = حـ أ سا (حـ س) = حـ ق (س).

افرض ان $\acute{ق}$ (س) = حـ ق (س)، فبما ان سا (حـ س) > ٠ فانه يمكن اخذ مشتقة

$\frac{ق (س)}{سا (حـ س)}$. ونحصل على

$$\frac{سا (حـ س) \acute{ق} (س) - حـ سا (حـ س) ق (س)}{سا^{٢} (حـ س)} = ٠$$

لأن $\acute{ق}$ (س) = حـ ق (س). اذن $\frac{ق (س)}{سا (حـ س)}$ = ثابت = $\frac{ق (٠)}{سا(٠)}$ = ق (٠). اي ان

ق (س) = ق (٠) سا (حـ س).

المثال ١.

تتفاعل مادة كيماوية بحيث ان سرعة التفاعل في اي لحظة تساوي ضعف الكمية الموجودة آنئذ. فاذا وجد ان ١٠ غرامات من المادة بقيت بعد نصف ساعة من بدء التفاعل، ما هي كمية المادة التي كانت موجودة في البداية؟

اذا فرضنا ان ق (س) هي الكمية الموجودة عند زمن س (ساعات) فان المعادلة هي $\acute{ق}$ (س) = ٢ ق (س). فمن النظرية ٢، نحصل على ق (س) = أ سا (٢ س)، ومن المعلومات المعطاة فان ق ($\frac{١}{٢}$) = ١٠ = أ سا (١). والكمية الاولية ق (٠) = أ. اذن ق (٠) = $\frac{١٠}{سا(١)}$. فلمعرفة قيمة ق (٠) يجب معرفة سا (١). وهناك جداول لِـ سا (س) ذات فائدة ومعروفة منذ سنين عديدة.

للعدد سا (١) المذكور في المثال ١ أهمية كما سنرى، وسنحاول الآن ايجاده لعدد من المنازل العشرية.

حساب e = سا (١).

نرمز عادة لِـ سا (١) بالرمز e . وقيمته هي مجموع المتسلسلة اللانهائية (٤) عند س = ١، اي ان

$$e = ١ + ١ + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \ldots$$

لنجد اول خمس منازل عشرية في تمثيل e ككسر عشري . نكتب $أ_٠ = ١$ ، $أ_١ = ١$ ، $أ_٢ = \frac{١}{٢!}$ ، . . . وَ$س_ن = أ_٠ + أ_١ + \ldots + أ_ن$ ، $e = س_ن + ب_ن$ حيث $ب_ن$ الباقي بعد أخذ ن + ١ حدا. اذن لأي ن موجب، $e > س_ن$ وَ

$$ب_ن = \sum_{ر=ن+١}^{\infty} \frac{١}{ر!} < \frac{١}{(ن+١)!} \sum_{ر=٠}^{\infty} \frac{١}{(ن+١)^ر} = \frac{ن+١}{ن(ن+١)!} = \frac{١}{ن \cdot ن!}$$ ، اذن

$$س_ن < e < س_ن + \frac{١}{ن \cdot ن!} \quad \ldots\ldots \quad (٦)$$

فلكي نحصل على الدقة المطلوبة فلا بد ان يكون $\frac{١}{ن \cdot ن!}$ اصغر من $١٠^{-٦}$. نجد ان $١٠(١٠!) = ٣١٢٨٨٠٠٠ > ٢ \times ١٠^٧$ ، لهذا نأخذ ن = ١٠ في (٦) . اذن يجب ان نحسب قيمة $س_{١٠}$ وهذا سهل . $س_٣ = ٢,٥$ ، $أ_٣ = \frac{٠,٥}{٣} = ٠,١٦٦٦$ ، $أ_٤ = \frac{أ_٣}{٤} = ٠,٠٤١٦٦٦$ ، . . . ، $أ_{١٠} = \frac{أ_٩}{١٠} = ٠,٠٠٠٠٠٠٢٧$. فلكي نحصل على تقريب دقيق نقرب جميع $أ_ن$ الى سبع منازل عشرية :

$$أ_٣ = ٠,١٦٦٦٦٦٧ - م_٣$$
$$أ_٤ = ٠,٠٤١٦٦٦٧ - م_٤$$
$$أ_٥ = ٠,٠٠٨٣٣٣٣ + م_٥$$
$$أ_٦ = ٠,٠٠١٣٨٨٩ - م_٦$$

. . . .

حيث $م_ن$ موجبة $< \frac{١}{٢} \times ١٠^{-٧}$. وبتكملة ذلك الى $أ_{١٠}$ وبجمع النتائج نحصل على

س$_{١٠}$ = ٢,٧١٨٢٨١٩ - ٢ مـ$_{٣}$ - مـ$_{٦}$ - مـ$_{٩}$ - مـ$_{١٠}$ + مـ$_{٧}$ + مـ$_{٨}$

$$< ٢,٧١٨٢٨١٩ + ٢ \frac{١}{٢ \times ١٠^{٧}} = ٢,٧١٨٢٨٢$$

وبطريقة مشابهة

$$س_{١٠} > ٢,٧١٨٢٨١٩ - \frac{٣}{١٠^{٧}} = ٢,٧١٨٢٨١٦ .$$

ينتج الآن من (٦)، وبما ان الباقي ب$_{١٠}$ < $\frac{١}{٢ \times ١٠^{٧}}$ ، ان:

$$٢,٧١٨٢٨١٦ < e < ٢,٧١٨٢٨٢١ .$$

اذن e =٢,٧١٨٢٨... ؛ وجميع الأرقام المكتوبة صحيحة.وباخذ س$_{١٢}$ نحصل على e لسبع منازل عشرية. وهذا متروك كتمرين.

المثال ٢ .

العــدد e هوعدد غير نسبي. ويمكن اثبــات ذلــك باستخــدام (٦). فبما ان e = ٢,٧١٨... فهوعدد غير صحيح. افرض ان امكن ان e عدد نسبي. مثلا e = $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ∋ N ، ب ⩾ ٢. وبأخذ ن = ب في (٦) نحصل على

$$٠ < \frac{أ}{ب} - س_{ب} < \frac{١}{ن \cdot ن!} .$$

وبضرب اطراف المتباينة في ب! نحصل على ٠ < أ(ب - ١)! - ب! س$_{ب}$ < $\frac{١}{٢}$ ولكن ب! س$_{ب}$ = ٢ ب! + . . . + ١، لهذا فان المتباينة الاخيرة تنص على ان أ ٠(ب - ١)! - ب! س$_{ب}$ هو عدد صحيح موجب اقل من $\frac{١}{٢}$، وهذا التناقض يتضمن ان e عدد غير نسبي.

المثال ٣ .

سا (س) = $e^{س}$ للاعداد النسبية س . واذا كان س عددا غير نسبي فان الطرف الايمن من هذه المعادلة له معنى لان سا معرف على R . ولكن الطرف الايسر لا معنى له . فمثلا e^{e} غير معرف . ولكن كتابة $e^{س}$ كرمز لِـ سا (س) يسهل الامور لاي عدد حقيقي او (مركب) س . لاثبات ان سا (س) = $e^{س}$ لاي عدد نسبي س نستخدم نظرية الجمع (٥). وينتج مباشرة من (٥) ان سا ($س_١$ + $س_٢$ + . . . + $س_ن$) = سا ($س_١$) . . . سا ($س_ن$) لاي $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$ ، اعداد حقيقية ، اذن سا (ن) = $e^{ن}$. واذا كان م $\in$ N فان

$$e = سا(١) = سا\left(\frac{١}{م} + \frac{١}{م} + \ldots + \frac{١}{م}\right) = \left(سا\left(\frac{١}{م}\right)\right)^{م}،\ اذن\ سا\left(\frac{١}{م}\right)$$

$= e^{\frac{١}{م}}$. لهذا اذا كان م ، ن $\in$ N فان

$$سا\left(\frac{ن}{م}\right) = سا\left(\frac{١}{م} + \frac{١}{م} + \ldots + \frac{١}{م}\right) = \left(سا\left(\frac{١}{م}\right)\right)^{ن} = e^{\frac{ن}{م}}$$

اخيرا اذا كان س = $\frac{-ن}{م}$ حيث ن ، م $\in$ N فان

$$سا\left(\frac{-ن}{م}\right) سا\left(\frac{ن}{م}\right) = سا(٠) = ١$$

اذن

$$سا\left(\frac{-ن}{م}\right) = \frac{١}{e^{\frac{ن}{م}}} = e^{\frac{-ن}{م}}$$

مما يثبت النتيجة .

لقد ذكرنا ان سا هو اقتران محافظ بين الزمرتين (R ، +) و(R^{+} ، ٠) وهو في الحقيقة تشاكل .

النظرية ٣.

سا: $(R ، +) \leftarrow (R^{+} ، \cdot)$ هو تشاكل.

البرهان.

من نظرية الجمع (٥) نستنتج ان سا اقتران محافظ. كذلك سا اقتران واحد لواحد لانه اقتران متزايد فعلا. يبقى ان نثبت انه اقتران شامل. لنأخذ ص $\in R^{+}$. فمن (٤) نحصل على ان سا (ص) = ١ + ص + . . . > ص وان سا $(\frac{١}{ص}) > \frac{١}{ص}$، اذن (٥) تعطي

$$\text{سا}\left(-\frac{١}{ص}\right) = \frac{١}{\text{سا}\left(\frac{١}{ص}\right)} < ص.$$

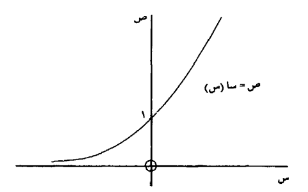
اذن سا $(\frac{-١}{ص})$ < ص < سا (ص). اي ان ص عدد بين قيمتين لِـ سا. ولكن سا قابل للتفاضل على R، اذن هو متصل على R ومن نظرية القيم الوسطى، الفصل ٦، البند ٣ نرى انه يوجد س بحيث ان $-\frac{١}{ص}$ < س < ص وسا (س) = ص. وهذا يثبت ان سا اقتران شامل.

ان برهان النظرية ٣ يبين ان سا (س) ← ∞ عندما س ← ∞ . وسا (س) ← ٠ عندما س ← -∞ . ومن الواضح من متسلسلة سا (س) ان

$$\frac{\text{سا}(س)}{س^{و}} \leftarrow \infty \text{ عندما } س \leftarrow \infty$$

لأي عدد صحيح موجب و.

لقد حصلنا على جميع خواص الاقتران الأسي التي نحتاج اليها عادة. وفي الشكل التالي بيان ص = سا (س).



تمارين ٩ ـ ١

(تجد في آخر الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ افرض ان ق اقتران شامل ومحافظ من الزمرة (R ، +) الى الزمرة (R^+ ، ٠) بحيث ان ق قابل للتفاضل عند س = ٠. اثبت ان ق (٠) = ١، ق قابل للتفاضل على R وقَ (٠) ≠ ٠. اذا كان قَ (٠) = −١، جد ق وارسم مخططا لبيان ص = ق (س).

٢ ـ اثبت انه يوجد اقتران وحيد ق بحيث ان ق (٠) = ١، قَ (س) = ٢ س ق (س) لكل س عدد حقيقي.

٣ ـ افرض ان ق اقتران محافظ من الزمرة (R ، +) الى الزمرة (R^+ ، ٠)، بحيث ان ق محصور من اعلى. اثبت ان ق ثابت.

٤ ـ افرض ان $ع_1$ ، $ع_2$ اعداد مركبة. استخدم تعريف سا $ع_1$، سا $ع_2$ كمتسلسلات لاثبات ان

(١) $\overline{سا\, ع_1} = سا\, \overline{ع_1}$

(٢) متسلسلة حاصل الضرب الكوشي لِـ سا $ع_1$ وسا $ع_2$ هي

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(ع_1 + ع_2)^{ن}}{ن!} .$$

استنتج نظرية الجمع:

$سا (ع_1 + ع_2) = سا (ع_1) سا (ع_2)$.

اثبت كذلك ان سا (ع) $\neq$ ٠ لاي ع $\in \mathbb{C}$.

(٣) استخدم (١) ونظرية الجمع في (٢) لاثبات ان | سا (ت س) | = ١ لأي عدد حقيقي س.

أعط مثالا تبين فيه ان هذا غير صحيح لِـ س عدد مركب.

٥ ـ مكثف سعته حـ، شحن من بطارية ل فولت. ثم فصل عن البطارية وترك ليفرغ شحنته عبر مقاومة م. اثبت ان الشحنة ك في الدائرة تتناقص أسيا مع الزمن.

٦ ـ أثبت ان e = ٢,٧١٨٢٨١٨ صحيح لسبع منازل عشرية.

٧ ـ اثبت ان $نها_{ن \to \infty} (1 + \frac{ع}{ن})^{ن}$ = سا ع لكل ع $\in \mathbb{C}$.

٨ ـ (١) لأي س $\in R$ ، اثبت ان $e^{س} \geqslant 1 + س$، $e^{س} \geqslant 1 + س + \frac{س^2}{2} + \frac{س^3}{6}$،

حيث المساواة تصح اذا وفقط اذا كان س = ٠

(٢) اثبت ان $e^{س} \geqslant 1 + س + \frac{س^2}{2}$ اذا وفقط اذا كان س $\geqslant$ ٠.

٩ ـ (١) اثبت انه لأي عدد مركب ع، $| e^{ع} - 1 | \leqslant e^{|ع|} - 1$، واستنتج ان $| e^{ع} | \leqslant e^{|ع|}$

اذ كان س عددا حقيقيا فاثبت ان $| e^{س} - 1 | = e^{|س|} - 1$ اذا وفقط اذا كان س $\geqslant$ ٠.

(٢) اذا كان | ع | $\leqslant$ ١ فاثبت ان ٤ $| e^{ع} - 1 | \leqslant$ ٧ | ع |.

(٣) لأي عدد حقيقي س اثبت ان $e^{س} + e^{-س} \geqslant 2$، ونحصل على المساواة اذا وفقط اذا كان س = ٠.

١٠ ـ ما هو مجال الاقتران ق المعرف بـ ق (س) = $\frac{e^{س}}{\sqrt{س}}$؟ اثبت ان ق (س) $\geqslant \sqrt{2e}$

لاي س ∋ سه ، حيث سه هو مجال الاقـتران . ناقش سلوك ق (س) عنـدمـا س ← ∞ ، وعندما س ← ٠ . ارسم مخطط ص = ق (س) .

١١ ـ (١) عرف ق : R ← R بـ ق (س) = سا (−س$^{-٢}$) لأي س ≠ ٠ وَق (٠) = ٠ . اثبت ان ق$^{(ن)}$ (٠) = ٠ لاي ن . ومنـه اثبت ان متسلسلة تايلور لِـ ق حول س = ٠ تكـون تقـاربيـة ولكن لا تتقارب الى ق (س) الا عند س = ٠

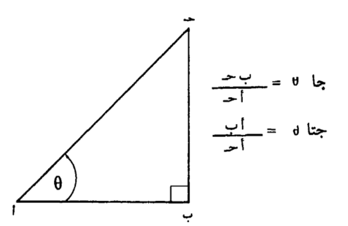
(٢) اذا كان ع عددا تخيليا صرفا فاثبت ان سا (−ع$^{-٢}$) ← ∞ عندما س ← ٠ قارن مع الجزء (١) من هذا السؤال .

١٢ ـ اكتب أ$_ن$ = ن! ن$^{-ن}$ لكل ن ∋ N . استخدم نتيجة السؤال ٧ لتثبت ان $\frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}$ ← e (ن ← ∞) . استنتج ان

$$\frac{\sqrt[ن]{ن!}}{ن} \leftarrow \frac{١}{e} \quad (ن \leftarrow \infty) .$$

٢ . الاقترانات المثلثية

يصـادف الطـالب عنـد دراسـة الهنـدسـة والمثلثـات كلمات زاوية ، وجيب الزاوية ، وجيب تمام الزاوية وما شابه . (انظر الشكل)



لا تعرف الزاوية عادة في المراحل الاولى من الدراسة، ويكتفى بأن يكوّن عند الطالب مفهوم بديهي غامض لطبيعتها. ويتم تعريف الجيب وجيب التمام باستخدام مثلث قائم الزاوية، ونظرية فيثاغورس، ونحصل على نتائج مثل

$$جا^{2}\ \theta + جتا^{2}\ \theta = ١$$

$$جا\ (\theta + \alpha) = جا\ \theta\ جتا\ \alpha + جتا\ \theta\ جا\ \alpha\ .$$

$$جتا\ (\theta + \alpha) = جتا\ \theta\ جتا\ \alpha - جا\ \theta\ جا\ \alpha$$

لاحظ اننا استخدمنا الرموز المتعارف عليها جا للجيب، وجتا لجيب التمام وكتبنا جا^{2} θ لتعني (جا θ)^{2}.

ولا بد من حساب $نها_{س \to ٠}\ \frac{جاس}{س}$ عندما نحتاج الى ايجاد مشتقة جاس.

ولكي نحسب هذه النهاية (التي تساوي ١) لا بد من استخدام الاشكال وافكار بديهية عن مساحات قطاعات الدائرة.

ومع ان الطريقة الاولية لدراسة الاقترانات المثلثية غير مقبولة من وجهة رياضية بحتة، الا أنها، اي الطريقة، تعطي معلومات هامة عن خواص هذه الاقترانات التي هي مفيدة كطرق وكتطبيقات.

بعد هذا النقد صار لزاما علينا ان نقدم عرضا دقيقا يوصل في النهاية الى الافكار الهندسية الأولية.

يمكننا البدء، كما فعلنا عند دراسة الاقتران الأسي، بان نأتي بالاقترانات المثلثية عن طريق حل معادلات تفاضلية تظهر بصورة طبيعية، مثل $\text{ق}''(\text{س}) = -\text{و}^{٢}\,\text{ق}(\text{س})$، وهي معادلة الحركة التوافقية البسيطة، (حيث ق (س) تمثل نقطة موضع الجسيم على خط مستقيم بعد زمن س، وثابت التناسب). ونكمل هذه الطريقة تماما كما في البند ١، ولكن سنترك هذا كتمرين.

ولكننا نفضل ان نحلل متسلسلة القوى لِـ سا (ت ع) ونحصل على الغلاقة المشهورة

$$\text{سا}(\text{ت ع}) = \text{جتا ع} + \text{ت جا ع} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧)$$

التي كان العالم السويسري اويلر (١٧٠٧ ـ ١٧٨٣) اول من اكتشفها. من وجهة نظرنا فان هذه العلاقة، عندما نحصل عليها، ستعرف الجيب وجيب التمام (لأي عدد مركب ع) على انهما متسلسلات قوى. كما انها تبين ان هناك صلة (غير متوقعة) بين جاس، جتاس الحقيقيتين و سا (ت س).

فمن (٤) في البند ١، لاي عدد مركب ع

$$\text{سا}(\text{ت ع}) = ١ + \text{ت ع} + \frac{(\text{ت ع})^{٢}}{٢!} + \frac{(\text{ت ع})^{٣}}{٣!} + \ldots$$

$$= (١ + \text{ت ع}) + \left(\frac{-\text{ع}^{٢}}{٢!} - \frac{\text{ت ع}^{٣}}{٣!}\right) + \ldots$$

$$= \left(١ - \frac{\text{ع}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{ع}^{٤}}{٤!} - \ldots\right) + \text{ت}\left(\text{ع} - \frac{\text{ع}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{ع}^{٥}}{٥!} - \ldots\right)$$

لاحظ اننا استخدمنا بعض الحقائق عن المتسلسلات التقاربية اعلاه (وضع اقواس في متسلسلة تقاربية، واضافة الحدود حداً حداً لمتسلسلتين تقاربيتين، وضرب المتسلسلة حداً حداً بعدد).

الآن نعرف ما يلي لأي عدد $\text{ع} \in \mathbb{C}$.

$$\text{جتا ع} = ١ - \frac{\text{ع}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{ع}^{٤}}{٤!} - \frac{\text{ع}^{٦}}{٦!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨)$$

$$\text{جا ع} = \text{ع} - \frac{\text{ع}^{٣}}{!٣} + \frac{\text{ع}^{٥}}{!٥} - \frac{\text{ع}^{٧}}{!٧} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩)$$

وهاتان المتسلسلتان تقاربيتان لكل ع ∋ ℂ حسب اختبار النسبة. وبهذا نكون حصلنا على معادلة اويلر (٧).

وينتج مباشرة من (٨) و(٩) ان جتا (−ع) = جتا ع، اي ان جتا هو اقتران زوجي، وان جا (−ع) = −جا ع، اي ان جا هو اقتران فردي. اذن من (٧) نحصل على سا (−ت ع) = جتا ع − ت جا ع، ولهذا فان

$$\text{جتا ع} = \frac{e^{\text{ت ع}} + e^{-\text{ت ع}}}{٢} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٠)$$

$$\text{جا ع} = \frac{e^{\text{ت ع}} - e^{-\text{ت ع}}}{٢\,\text{ت}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١١)$$

وتبين المعادلتان (١٠) و(١١) ان جا ع، جتا ع معرفان بدلالة الاقتران الأسي فقط. وبما ان نظرية الجمع سا (ع + ل) = سا (ع) سا (ل) صحيحة وباستخدام (١٠)، (١١) فاننا نحصل على

$$\text{جتا}^{٢}\,\text{ع} + \text{جا}^{٢}\,\text{ع} = ١$$

لاي عدد مركب ع. وبطريقة مشابهة، وباستخدام خواص الاقتران الأسي فقط، يمكن استنتاج نظريات الجمع لِـ جا(ع + ل)، جتا (ع + ل) الخ، التي ذكرناها في بداية البند. لاحظ ان معالجتنا لِـ جا وجتا لا تستخدم فكرة الزاوية. واستطعنا بمجهود بسيط ان نعامل جا، جتا كاقترانات مركبة (والفضل لأويلر).

ويمكن استنتاج جميع خواص الاقترانات المثلثية العادية بطريقة مباشرة. ومعظم هذه الخواص معروف من وجهة نظر هندسية. وسنذكر هذه الخواص للفائدة:

النظرية ٤.

لأي ع، ل ∋ ℂ

(١) $جا^{٢}ع + جتا^{٢}ع = ١$

(٢) جا (ع + ل) = جا ع جتا ل + جتا ع جا ل

(٣) جتا (ع + ل) = جتا ع جتا ل - جا ع جا ل

(٤) $\frac{د}{دع}$ جا ع = جتا ع، $\frac{د}{دع}$ جتا ع = -جا ع

(٥) يوجد اصغر عدد موجب، يرمز له بـ $\frac{\pi}{٢}$ ، حيث ان جتا $\frac{\pi}{٢}$ = ٠

(٦) جتا (ع + ٢π) = جتاع ؛ جا (ع + ٢π) = جاع ، سا (ع + ٢π ت) = سا (ع).

البرهان.

تنتج (١) - (٣) من نظرية الجمع للاقتران الأسي فعلى سبيل المثال اذا كتبنا الطرف الايسر من (٢) بدلالة $e^{تع}$ ، $e^{-تع}$ نحصل على الصورة الأسية لـ جا (ع + ل) بعد اجراء بعض الاختصارات.

ونحصل على (٤) بمفاضلة حدود المتسلسلتين (٨) و(٩)،لان كلا من المتسلسلتين ذات تقارب مطلق لكل ع.

سنثبت الآن (٥): لنعتبر ع = س عددا حقيقيا. فمن (٨) نحصل على جتا (٠) = ١. وبما ان جتا قابل للتفاضل على R فانه متصل على R . فاذا بينا انه يوجد $س_٠$ > ٠ بحيث ان جتا $س_٠$ < ٠، فان جتا سوف يأخذ القيمة ٠ في الفترة (٠ ، $س_٠$) (من نظرية القيم الوسطى للاقترانات المتصلة). تبين المناقشة التالية قوة نظرية تايلور.

لأي س > ٠،

$$جتا س = ١ - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٤}}{٢٤} جتا أ \quad (٠ < أ < س)$$

$$\leqslant ١ - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٤}}{٢٤} ،$$

لان جتا^{٢} أ = ١ - جا^{٢} أ ≥ ١ . اذن جتا٢ ≥ -١ + $\frac{٢}{٣}$ > ٠ . اذن يوجد حـ ∋ (٠ ، ٢)

بحيث ان جتا حـ = ٠ لاثبات ان حـ هي اصغر صفر لِـ جتا ، خذ ٠ < و < حـ. سوف نثبت ان جتا و > ٠ . اذا كان س ∋ (٠ ، ٢) فان

جا س = س - $\frac{س^{٢}}{٢}$ جا ب (٠ < ب < س)

≥ س - $\frac{س^{٢}}{٢}$ = $\frac{س (٢ - س)}{٢}$ > ٠ . . . . (١٢)

اذن جتا و = جتا حـ - (و - حـ) جا θ .

= - (و - حـ) جا θ حيث و < θ < حـ. من (١٢) نحصل على حا θ > ٠ . اذن جتا و > ٠ .

ومن المتعارف عليه كتابة أصغر صفر لِـ جتا على صورة $\frac{\pi}{٢}$، حيث π = ٣,١٤١٥٩ . . . هو العدد اللانسبي المشهور الذي يظهر عند دراسة الدائرة هندسيا.

اخيرا، نثبت (٦)، التي تتحدث عن دورية الاقترانات المثلثية.

فبما ان جتا $\frac{\pi}{٢}$ = ٠ وَجا $\frac{\pi}{٢}$ > ٠ فمن (١٢) فان (١) تعطي جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١ .

ومن (٣) يكفي ان نثبت ان جا ٢ π = ٠ ، جتا ٢ π = ١ .

من (٢) نحصل على جا ٢ π = ٢ جا π جتا π = ٤ جا $\frac{\pi}{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٢}$ جتا π = ٠ ،

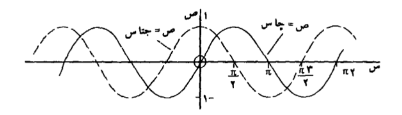
ومن (٣)، جتا π = جتا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ = -١ ، جتا ٢ π = ٢ جتا^{٢} π - ١ = ١ . وهذا يثبت جتا (ع + ٢ π) = جتا ع . وبالمثل، فان (٢) تعطي جا (ع + ٢ π) = جا ع .

واخيرا، من معادلة اويلر ونظرية الجمع والنتائج التي حصلنا عليها نستنتج ان

سا (ع + ٢ π ت) = سا ع ٠ سا (٢ π ت)

= ساع (جتا ٢ π + ت جا ٢ π) = سا (ع) .

وباستخدام المعلومات التي حصلنا عليها في النظرية ٤ وبرهانها فان بالامكان رسم مخطط ص = جاس وَص = جتاس حيث س عدد حقيقي .



المثال ٤ .

لاي س عدد حقيقي ، س > ٠ ، فان

(١) جاس > س

(٢) جتاس > ١ - $\frac{س^٢}{٢}$

(٣) | e ^{تس} - ١ | > س .

هذه المتباينات مفيدة . والمتباينة الاولى واضحة من الرسم لان ص = س هو مماس لِـ ص = جاس عند س = ٠ . ويمكن اثبات ذلك تحليليا باستخدام نظرية القيمة المتوسطة .

لاثبات (١) نكتب ق (س) = س - جاس لكل س ⩾ ٠ . فمن نظرية القيمة المتوسطة فان ق (س) = س قَ (حـ) = س (١ - جتا حـ) حيث ٠ > حـ > س . فاذا كان ٠ > س ⩾ ٢π فان ١ - جتا حـ > ٠ ، ومنه ق (س) > ٠ . واذا كان س > ٢π فان س - جاس > ٢π - جاس ⩾ ٢ π - ١ > ٠ . وهذا يثبت (١) . وبطريقة مشابهة فان

هـ (س) = ١ - $\frac{س^٢}{٢}$ - جتاس = س (جاو - و) ، حيث ٠ > و > س ، اذن هـ (س)

> ٠ من (١).

أخيرا: | e ^ت س^ - ١ |^٢^ = (جتاس - ١)^٢^ + جا^٢^س

= ٢ - ٢ جتاس > س^٢^ من (٢). وبما ان | e ^ت س^ - ١ | ⩾ ٠ وس > ٠ فان

(٣) تتحقق. وسوف نذكر التفسير الهندسي لِـ (٣) فيما بعد عندما نربط تعريف الاقترانات المثلثية التحليلي مع التعريف الهندسي.

وفي المثال التالي نعطي الحل العام للمعادلة التفاضلية قً (س) = - حـ^٢^ ق (س) التي ذكرناها في بداية البند.

المثال ٥.

افرض ان قً موجود على R ، وافرض ان حـ ثابت حـ ≠ ٠. اذن قً (س) = -حـ^٢^ ق (س) على R ، اذا وفقط اذا كان ق (س) = أ جتا (حـ س) + ب جا (حـ س) حيث أ = ق (٠)، ب = ق َ(٠) / حـ .

اما الشرط الكافي فواضح: فاذا كان ق (س) = أ جتا (حـ س) + ب جا (حـ س) فاننا نحصل على المطلوب مباشرة لأن (جتا (حـ س))َ = - حـ جا (حـ س)، (جتا (حـ س))ً = -حـ^٢^ جتا (حـ س)، الخ.

لأيضاح الشرط اللازم: اكتب هـ (س) = ق َ(س) / حـ. فبعملية حسابية بسيطة ينتج ان

(ق (س) جتا (حـ س) - هـ (س) جا (حـ س))َ = ٠

(هـ (س) جتا (حـ س) + ق (س) جا (حـ س))َ = ٠

لكل س، واذن

ق (س) جتا (حـ س) - هـ (س) جا (حـ س) = ثابت = ق (٠)

هـ (س) جتا (حـ س) + ق (س) جا (حـ س) = ثابت = هـ (٠).

بحذف هـ (س) من هاتين المعادلتين واستخدام جا^{2} (حـ س) + جتا^{2} (حـ س) = ١ نحصل على

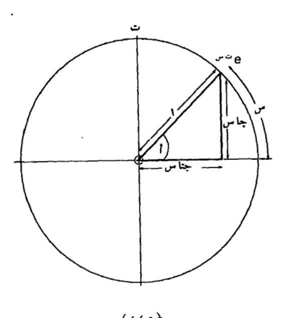
ق (س) = ق (٠) جتا (حـ س) + هـ (٠) جا (حـ س).

المعادله ع (θ) = $e^{ت θ}$ = جتا θ + ت جا θ

اذا كان θ عددا حقيقيا فان

| ع (θ) | = $\sqrt{\text{جتا}^2 θ + \text{جا}^2 θ}$ = ١. اذن اذا كانت د = { ع | | ع | = ١ } دائرة الوحدة في المستوى المركب، فان الاقتران ع المعرف اعلاه هو اقتران يحقق ع : R ← د. وبما ان ع (٠) = ع (٢π) فان الاقتران ليس واحدا لواحد. ولكن ع : [٠ ، ٢π) ← د هو واحد لواحد. والاقتران الأخير اقتران شامل ايضا، لانه يمكن حل المعادلة ع = جتا θ + ت جاθ عندما | ع | = ١. لايجاد قيما θ ∋ [٠ ، ٢π) بمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية.

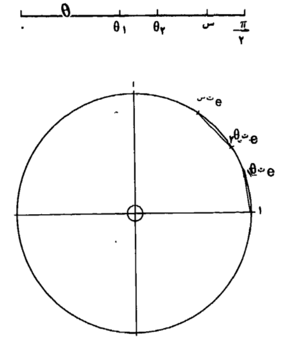
وهناك ترابط واحد لواحد بين نقاط [٠ ، ٢π) ونقاط د.واذا فكرنا هندسيا، فانه بازدياد θ من ٠ الى ٢π فان النقطة ع (θ) تتحرك على الدائرة بعكس اتجاه عقارب الساعة من ١ عبرت، -١ وعوداً الى ١ ثانية. على سبيل المثال ٠ < س < $\frac{\pi}{2}$ تعطي ان $e^{ت س}$ كما هو مبين بالرسم.



لنستعمل افكارا هندسية بدائية، ولنرمز بـ أ الى «الزاوية» بين الخط الواصل بين نقطة الاصل وَ $e^{تس}$ والخط الواصل بين نقطة الاصل وجتاس. اذن طول وتر المثلث القائم الزاوية هو أ ونحصل على جا أ = جاس ، جتا أ = جتاس. ان تساوي أ ، س يسهل الامور ولكنه غير دقيق منطقيا. ولكن ليس من الصعب تمثيل العدد س على الرسم. سوف نبين ان س هو طول قوس دائرة الوحدة الذي يصل من ١ الى $e^{تس}$ كما هو مبين بالشكل السابق.

بقي ان نعطي تعريفا رياضيا معقولا ودقيقا للقوس وطوله. ويمكن اعطاء هذا التعريف للاقواس غير الدائرية ولكن لن نفعل ذلك. وسنركز اهتمامنا على مسألة الاقواس الدائرية.

اولا سنأخذ تجزئة ج للفترة [٠ ، ١]. بهذا نعني ان ج مجموعة منتهية من نقاط { θ ، θ ، ... ، $\theta_ن$ } في [٠ ، س] بحيث ان ٠ = $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_ن$ = س. هذه التجزئة تولد مجموعة نقاط { ١ ، $e^{ت\theta_1}$ ، $e^{ت\theta_2}$ ... ، $e^{تس}$ } على دائرة الوحدة. فعلى سبيل المثال:



اول تقريب لطول القوس من ١ الى $e^{ت س}$ هو هندسيا مجموع اطوال المستقيمات التي تصل النقاط كما هو مبين، اي ان

$$|١ - e^{ت\theta_١}| + |e^{ت\theta_١} - e^{ت\theta_٢}| + |e^{ت\theta_٢} - e^{ت س}| .$$

ويأخذ نقاط اكثر في التجزئة فاننا نأمل ان نقترب اكثر واكثر (هندسيا) من طول القوس.

وكي نكون دقيقين، فاننا نعرف طول القوس ط (س) على دائرة الوحدة من ١ الى $e^{ت س}$ على انه

$$ط (س) = ص.ح.ع \sum_{ر=١}^{ن} |e^{ت\theta_{ر-١}} - e^{ت\theta_ر}| ،$$

حيث نأخذ اصغر حاصر علوي لجميع التجزئات على [٠ ، س]. وسوف نثبت ان ط (س) = س، اي اننا سنبين ان

$$\sum_{ر=١}^{ن} |e^{ت\theta_{ر-١}} - e^{ت\theta_ر}| \leq س \text{ لكل ج } \quad .... \quad (١٣)$$

وانه لكل و > ٠ يوجد تجزئة ج بحيث ان

$$\sum_{ر=١}^{ن} |e^{ت\theta_{ر-١}} - e^{ت\theta_ر}| > س - و \quad .... \quad (١٤)$$

لاثبات (١٣) افرض ان ج = { $\theta_٠$ ، $\theta_١$ ، ... ، $\theta_ن$ } تجزئة على [٠ ، – س]

اذن المجموع في (١٣) يساوي

$$\sum_{ر=١}^{ن} |e^{ت\theta_{ر-١}} (١ - e^{ت(\theta_ر - \theta_{ر-١})})|$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} |١ - e^{ت(\theta_ر - \theta_{ر-١})}|$$

$$< \sum_{ر=١}^{ن} (\theta_ر - \theta_{ر-١}) = س ،$$

ذلك لأن $|١ - e^{ت ص}| = |e^{ت ص} - ١| < ص$ لأي ص > ٠ من مثال ٤ (٣).

افرض ان و $>$ ٠. خذ اي تجزئة $ج_{ن}$ على [٠ ، س] من ن من الأجزاء المتساوية:

$$ج_{ن} = \{ ٠ ، \frac{س}{ن} ، \frac{٢ س}{ن} ، \ldots ، \frac{(ن - ١) س}{ن} ، س \}$$

فمجموع المسافات بالنسبة لـ $ج_{ن}$ هو

$$\sum_{ن} = \sum_{ر=١}^{ن} \left| e^{ت \frac{س}{ن}} - ١ \right| = ن \left| e^{ت \frac{س}{ن}} - ١ \right|$$

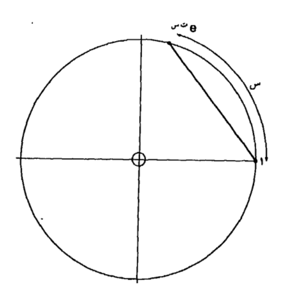
$$= ن \left| ت \frac{س}{ن} + \frac{ت^{٢} س^{٢}}{٢ ن^{٢}} + \frac{ت^{٣} س^{٣}}{٦ ن^{٣}} + \ldots \right|$$

$$= س \left| ت + \frac{ت^{٢} س}{٢ ن} + \frac{ت^{٣} س^{٢}}{٦ ن^{٢}} + \ldots \right|$$

$$\leftarrow س \quad (ن \leftarrow \infty).$$

وبأخذ ن كبيرا، نحصل على $\sum_{ن} >$ س - ومما يثبت (١٤).

يمكن الآن اعطاء تفسير هندسي للمتباينة $| e^{ت س} - ١ | <$ س لأي س $>$ ٠ التي استخدمناها في البرهان، فما تعنيه هو ان المسافة من ١ الى $e^{ت س}$ على القوس اطول من المسافة من ١ الى $e^{ت س}$ على الخط المستقيم.



وطبيعة الاقترانات المثلثية التذبذبية تعطينا مثالا عن اقتران حقيقي قابل للتفاضل على فترة مفتوحة، وله عدد لا نهائي من القيم العظمى والصغرى المحلية.

المثال ٦.

عرف ق : (٠ ، ١) ← R بـ ق (س) = جتا $\frac{\pi}{س}$. فمجموعة اصفار ق هي { $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٢}{٧}$ ، . . . } . ونحصل على قيم عظمى مطلقة لقيم س عندما ق(س) = ١ أي { $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، . . . } . والقيم الصغرى المطلقة عند { $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، . . . } . ومن السهل ان نرى ان القمم المطلقة هي ايضا قمم محلية. وعلى القارىء ان يرسم مخطط ص = ق (س)، وهويتكون من متسلسلة من الامواج عرض كل منها ٢ وتقترب بعضها من بعض قرب س = ٠ .

ومن الواضح ان ق (س) لا تقترب من اي نهاية عندما س ← ٠ . ولاثبات ذلك افرض ان امكن ان ق (س) ← م عندما س ← ٠ . اذن | ق (س) − م | < $\frac{١}{٢}$ عندما يكون ٠ < س < δ لعدد ما δ > ٠ . اذن | ق (س) − ق (ص) | < ١ عندما ٠ < س < ص < δ . لنأخذ عددا صحيحا موجبا بحيث ان $\frac{١}{٢ن}$ < δ . خذ س = $\frac{١}{٢ن + ١}$ ، ص = $\frac{١}{٢ن}$. اذن ٠ < س < ص < δ . لهذا فان | ق (س) − ق (ص) | < ١ . ولكن ق (س) = −١ ، ق (ص) = ١ مما يعطي | ق (س) − ق (ص) | = ٢ ، وهذا تناقض.

تمارين ٩ ـ ٢

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ افرض انه يوجد اقتران ق : R ← R بحيث ان قً موجود على R وقً (س) = − ق (س) ،
ق (٠) = ١ ، قَ (٠) = ٠ . اثبت ان ق يجب ان يكون على صورة

$$ق (س) = ١ - \frac{س^٢}{٢!} + \frac{س^٤}{٤!} - \ldots ،$$

وان المتسلسلة تقاربية لكل س .

٢ ـ (١) استخدم متسلسلة جاع لاثبات ان

$$\frac{جاع}{ع} \leftarrow ١ \quad (ع \leftarrow ٠) .$$

(٢) اثبت نفس النتيجة باستخدام $\frac{د}{دع}$ جاع = جتاع .

٣ ـ على فرض ان س ، ص ، ل اعداد حقيقية قيمتها المطلقة اقل من $١٠^{-٣}$. فاذا كان جتا ل = جتا س جتا ص فاثبت ان $ل^٢ = س^٢ + ص^٢ + و$، حيث $|و| < ١٠^{-١٢}$.

٤ ـ اثبت انه لأي عددين مركبين ع ، ل

(١) $جاع + جال = ٢ جا \frac{ع + ل}{٢} جتا \frac{ع - ل}{٢}$ ،

(٢) $جتاع + جتال = ٢ جتا \frac{ع + ل}{٢} جتا \frac{ع - ل}{٢}$ ،

(٣) $جا (\frac{\pi}{٢} - ع) = جتاع$ ،

(٤) $جا٣ع = ٣ جاع - ٤ جا^٣ع$ ،

(٥) $جا \frac{\pi}{٤} = جتا \frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $جا \frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $جتا \frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢}$

(٦) $جتا٢ع = ٢جتا^٢ع - ١$

٥ ـ (١) اثبت انــه لأي عدد حقيقي س فان جا س = ٠ اذا وفقــط اذا كان س = ن π لعــدد صحيح ن .

(٢) اذا كان س $\in$ R فاثبت ان جتا س = ٠ اذا وفقط اذا كان س = (٢ن + ١) $\frac{\pi}{2}$

لعدد صحيح ما ن .

(٣) افرض ان ع $\in$ $\mathbb{C}$ استخدم (١) و(٢) لاثبات ان $e^{ع}$ = ١ اذا وفقط اذا كان ع = ٢ π ن ت لعدد صحيح ما، ن. (اكتب ع = س + ت ص واستخدم | $e^{ت ص}$ | = ١).

(٤) على فرض ان ع $\in$ $\mathbb{C}$ ، اثبت ان جاع = ٠ اذا وفقط اذا كان ع = نπ . وان جتا ع = ٠ اذا وفقط اذا كان ع = (٢ن + ١) $\frac{\pi}{2}$.

٦ ـ اثبت ان جا^{2}س $\leqslant$ س^{2} لكل س $\in$ R وضح برسم مخطط ص = جا^{2}س ومخطط ص = س^{2}.

٧ ـ عرف ق:[٠ ، $\frac{\pi}{2}$] $\leftarrow$ R بـ ق (٠) = ١، ق (س) = $\frac{جاس}{س}$ لِـ ٠ < س $\leqslant$ $\frac{\pi}{2}$. اثبت ان ق قابل للتفاضل على مجاله (يجب معالجة س = ٠ على حدة). اثبت ان قَ (س) < ٠ لِـ ٠ < س $\leqslant$ $\frac{\pi}{2}$ واستنتج المتباينة التالية المعروفة باسم متباينة جوردان:

$\frac{٢س}{\pi}$ $\leqslant$ جا س $\leqslant$ س لِـ ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ $\frac{\pi}{2}$.

٨ ـ عرف ق : [٠ ، ١] $\leftarrow$ R بـ ق (٠) = ٠، ق (س) = س جا $\frac{\pi}{س}$ لِـ ٠ < س $\leqslant$ ١ .

اثبت ان ق متصل على [٠ ، ١] قابل للتفاضل على (٠ ، ١] ولكن غير قابل للتفاضل عند س = ٠ . جد القمم المحلية لِـ ق وارسم مخطط ص = ق (س).

٩ ـ اثبت بالاستقراء ان | جا (ن س) | $\leqslant$ ن | جا س | لكل ن $\in$ N لكل س $\in$ R .

١٠ ـ اثبت انه لكل س $\in$ R ، | جا س | $\leqslant$ ١، | جتا س | $\leqslant$ ١. هل صحيح ان | جا ع | $\leqslant$ ١ لكل ع $\in$ $\mathbb{C}$ ؟

١١ ـ افرض ان ع عدد مركب. اثبت ان المتتالية (جا (ن ع)) تكون تقاربية اذا وفقط اذا كان ع = مـ π . حيث مـ عدد صحيح. [عند برهنة الشرط الضروري افرض ان جا (ن ع) ⟵ م (ن ⟵ ∞) ولكن ع ≠ مـ π]. { ادرس جا ((ن + ٢) ع) - جا ن ع = ٢ جتا ((ن + ١) ع) جا ع واستخدم جتا (٢ ن ع) = ٢ جتا^{٢} (ن ع) - ١ } .

١٢ ـ بدأ جسيم بالحركة من نقطة م، ويتحرك على خط مستقيم يمر في م بحيث أن التسارع يساوي بعد الجسيم عند نقطة م واتجاه التسارع الى م.

فاذا كانت السرعة الابتدائية ع$_{٠}$ ، فاثبت ان المسافة المقطوعة بعد زمن ن هي ع$_{٠}$ جا ن .

صف حركة الجسيم.

١٣ ـ اكتب هـ (س) = جتاس لأي عدد حقيقي س . افرض ان س$_{٠}$ عدد حقيقي وعرف س$_{ن+١}$ = هـ (س$_{ن}$) لِـ ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . . اثبت ان المتتالية (س$_{٠}$ ، س$_{١}$ ، . . .) تقارب نهاية ما، بين الصفر و١ .

٣. اقترانات ابتدائية اخرى

هناك اقترانات اخرى مفيدة تعرف بواسطة الاقتران الأسي والجيب وجيب التمام، ونستخلص خواصها من النتائج المعروفة للاقترانات الابتدائية الاساسية. وسوف نذكر هذه الاقترانات وخواصها بقصد الرجوع اليها عند الحاجة وسنترك البراهين كتمرين سهل.

وهي ظا ، ظتا ، قا ، قتا ، جتاز ، جاز ، ظاز ، . . .

فلأي ع (عادة مركب)، حيث يكون المقام لا يساوي صفرا، فاننا نعرف

$$\text{ظاع} = \frac{\text{جاع}}{\text{جتاع}} \text{ ، ظتاع} = \frac{١}{\text{ظاع}} \text{ ، قاع} = \frac{١}{\text{جتاع}} \text{ ، قتاع} = \frac{١}{\text{جاع}} .$$

ولجميع قيم ع، نعرف

جتاز (ع) = $\frac{e^{ع} + e^{-ع}}{٢}$ ، جاز (ع) = $\frac{e^{ع} - e^{-ع}}{٢}$

وعندما يكون المقام لا يساوي صفرا نعرف

ظاز (ع) = $\frac{جاز(ع)}{جتاز(ع)}$ ، ظتاز (ع) = $\frac{١}{ظاز(ع)}$ ، قاز (ع) = $\frac{١}{جتاز(ع)}$ ، قتاز (ع) = $\frac{١}{جاز(ع)}$.

تسمى الاقترانـات جتاز، جاز، الخ اقترانات زائدية . لهذا فان جتاز (ع) يسمى جيب التمام الزائدي لِـ ع (ومن هنا اخذ الرمز جتاز = جتا زائدي) . وسبب استخدام كلمة زائدي ان الجزء الايمن من القطع الزائد س^{٢} − ص^{٢} = ١ يعطى بالمعادلات الوسيطية س = جتاز (و) ، ص = جاز (و) حيث و حقيقية . ونعـرف بالطبـع ان المعادلتين س = جا (و)، ص = جتا (و)، حيث و عدد حقيقي ، تعطيـان معـادلـة الـدائـرة س^{٢} + ص^{٢} = ١ . لهذا فاننـا احيـانـا نسمي الاقترانات المثلثية اقترانات دائرية .

وجميـع الاقـترانات المذكورة اعلاه قابلة للتفاضل في مجال تعريفها . وسوف نضع جدولا للنتائج ونبرهن النتيجة الاولى .

المثال ٧ .

عرف ق (ع) = ظا ع . اذن ق معرف على جميع الاعداد المركبة ع ، الا عند كون جتاع = ٠ ، اي عدا ع = (٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$ ، ن = ٠ ، ± ١ ، ± ٢ ، . . . عدا هذه الـقـيـم فان ق يكون كسرا بسطه ومقامه اقترانان قابلان للتفاضل ، واذن

$$ق'(ع) = \frac{جتاع \, جتاع - جاع (- جاع)}{جتا^{٢}ع} = \frac{١}{جتا^{٢}ع} = قا^{٢}ع .$$

وبصورة خاصة اذا كان س ≠ (٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$ وكان س عددا حقيقيا فان ق' (س) > ٠ . لهذا فان ظاس (كـاقـتران حقيقي) هومتـزايـد فعـلا على الفـترات المفتوحة $(-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢})$ ، $(\frac{\pi}{٢} ، ٣ \frac{\pi}{٢})$ ، . . .

الاقتران	المشتقة	المجال
ظا ع	قا^{2}ع	ع $\neq$ (٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$
ظتا ع	- قتا^{2}ع	ع $\neq$ ن π
قا ع	قا ع ظا ع	ع $\neq$ (٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$
قتا ع	- قتا ع ظتا ع	ع $\neq$ ن π
جتاز(ع)	جاز(ع)	$\mathbb{C}$
جاز(ع)	جتاز(ع)	$\mathbb{C}$
ظاز(ع)	قاز^{2} (ع)	ع $\neq$ (٢ن + ١) $\frac{\pi ت}{٢}$
ظتاز(ع)	- قتاز^{2} (ع)	ع $\neq$ ن π ت
قاز(ع)	-قاز(ع) ظاز(ع)	ع $\neq$ (٢ن + ١) $\frac{\pi ت}{٢}$
قتاز(ع)	- قتا(ع) ظتاز(ع)	ع $\neq$ ن π ت

من (١٠) وَ(١١) نرى ان

جتا (ت ع) = جتاز (ع) ، جا (ت ع) = ت جاز (ع) . . . . (١٥)

لهذا فان

جتاز^{2} (ع) − جاز^{2} (ع) = ١ .

كذلك، من تعريف جاز وجتاز نحصل على

جتاز (ع) = ١ + $\frac{ع^{2}}{٢!}$ + $\frac{ع^{4}}{٤!}$ + . . . ، جاز (ع) = ع + $\frac{ع^{3}}{٣!}$ + $\frac{ع^{5}}{٥!}$ + . . .

وباستخدام (١٥) يمكن الحصول على نظرية الجمع لهذه الاقترانات.

على سبيل المثال:

جتاز (ع + ل) = جتا (ت ع + ت ل)

= جتا (ت ع) جتا (ت ل) − جا (ت ع) جا (ت ل)

= جتاز (ع) جتاز (ل) − ت^{2} جاز (ع) جاز (ل)

= جتاز (ع) جتاز (ل) + جاز (ع) جاز (ل) .

لاحظ ان ت^{2} = −١ تجعل صيغة جتاز (ع + ل) تختلف قليلا عن صيغة جتا (ع + ل) .

تمارين ٩ - ٣

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - اثبت نتائج الجدول السابق .

لاي عدد حقيقي س، ارسم مخططات ص = ظاس ، ص = ظاز (س) .

٢ - مع اي من الاعداد الحقيقية س تكون الاقترانات التالية معرفة؟

جد المشتقة عندما تكون موجودة

(١) قا^{٢}س - ظا^{٢}س

(٢) جاز س جتاز س

(٣) جا ز^{٢}(س) + جتاز^{٢} (س)

(٤) جا (e ^{س})

(٥) سا (جا س)

(٦) [جاز (س)]$^{\frac{١}{٢}}$ ،

(٧) e ^{س} جا^{٢}س .

٣ - (١) اثبت ان جتاز (س) $\geqslant$ ١ لكل س $\in$ R ، وان جتاز متزايد فعلا لكل س $\geqslant$ ٠ .

اثبت كذلك ان جتاز (س) $\leftarrow \infty$ عندما س $\leftarrow \infty$. ارسم مخطط ص = جتاز (س) .

(٢) اثبت ان جتاز (ع) = ٠ اذا وفقط اذا كان ع = (٢ن + ١) $\frac{\pi ت}{٢}$

٤ - اكتب سه = { (س ، ص) | س ، ص $\in$ R ، س $\geqslant$ ١ ، س^{٢} - ص^{٢} = ١ } . اذن سه هو الجزء الايمن من القطع الزائد س^{٢} - ص^{٢} = ١ . ارسم سه في مستوى (س ، ص) .

عرّف ق : R $\leftarrow$ سه بـ ق (و) = (جتاز (و) ، جاز (و)) . اثبت ان ق هو اقتران تقابل .

٥ - افرض ان ق : R $\leftarrow$ R بحيث ان قً موجود على R . اثبت ان قً (س) = ق (س) اذا وفقط اذا كان:

ق (س) = أ جتاز (س) + ب جاز (س)

حيث أ = ق (٠) ، ب = قَ (٠).

٦ - اثبت بوضع تحديدات على ع ، ل ان

$$ظا (ع + ل) = \frac{ظاع + ظال}{١ - ظاع\ ظال}$$

٧ - افرض ان أ ، ن اعداد حقيقية ثابتة وان ق (س) = أ جاس + ب جتاس. جد القيم العظمى والصغرى لِـ ق على R

٨ - افرض ان أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$ ∋ R وان $س_١^٢ + س_٢^٢ + . . . + س_ن^٢$ =

١ . اثبت ان

(جتاز (أ $س_١$)) (جتاز (أ $س_٢$)) . . . (جتاز (أ $س_ن$)) ⩾ سا ($أ^٢$).

٤ . معكوسات الاقترانات الابتدائية والقوى العامة

هناك قاعدة واحدة مشتركة لايجاد معكوسات الاقترانات الابتدائية. لهذا فاننا سنعالج بالتفصيل معكوسات الاقترانات : الأسي ، والجيب ، وجيب التمام فقط.

القاعدة هي ان نجد مجالا مناسبا يكون عنده الاقتران ق اقتران تقابل. نعرف من نتيجة الفصل الاول، البند ٢ ان $ق^{-١}$ يكون موجودا ويكون اقتران تقابل ايضا.

ان معالجة معكوسات الاقترانات الابتدائية المركبة اصعب نوعا من معالجة معكوسات الاقترانات الاولية الحقيقية. ولتبسيط الامور فسوف ندرس هنا الاقترانات الحقيقية فقط. لكن هناك بعض المعلومات عن اللوغريثم المركب في التمارين.

سوف ندرس اولا معكوس الاقتران الأسي الحقيقي ويسمى الاقتران اللوغريثمي (لاسباب تاريخية) وهناك نبذة تاريخية عن اللوغريثم في نهاية البند، فليرجع اليها من شاء.

الاقتران اللوغريثمي

نعرف من النظرية ٣، البند ١، من هذا الفصل،ان سا : $R \leftarrow R^{+}$ هو اقتران تقابل. اذن يوجد اقتران نظير (معكوس الاقتران سا) هو سا$^{-1}$: $R^{+} \leftarrow R$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فان هذا الاقتران يسمى الاقتران اللوغريثمي (الطبيعي)، وبعبارة ادق : الاقتران اللوغريثمي للاساس e . حيث e = ٢,٧١٨٠٠٠ . اذن سوف نكتب لو بدلا من سا$^{-1}$ وللتأكيد نسرد المعلومات التالية :

سا : $R \leftarrow R^{+}$ ، لو : $R^{+} \leftarrow R$

ص = $e^{س}$ (س $\in R$ ، ص > ٠) يكافيء س = لوص (ص > ٠ ، س $\in R$).

بما ان $e^{\cdot}$ = ١ و $e^{١}$ = e فان لو١ = ٠ ، لوe = ١ . نشدد هنا على ان مجال اللوغاريثم ذي القيم الحقيقية هو R^{+} ، لهذا فان لو(١ + س) مثلا معرف فقط على قيم س، بحيث أن ١ + س > ٠ ، اي ان س > -١ .

وقد اكتشف نابيير الخواص التالية للوغريثم

لو(أ ب) = لوأ + لوب (أ > ٠ ، ب > ٠) . . . . (١٦)

لو($\frac{أ}{ب}$) = لوأ - لوب (أ > ٠ ، ب > ٠) . . . . (١٧)

لاثبات (١٦) اكتب حـ = لوأ، د = لوب . اذن $e^{حـ}$ = أ ، $e^{د}$ = ب ومن نظرية الجمع للاقتران الأسي [(٥)، الفصل ٩، البند ١] نحصل على $e^{(حـ+د)}$ = أ ب، اذن حـ + د = لو (أ ب) وهذه (١٦). ولاثبات (١٧) اكتب لوأ = لو(أ ٠ ب أ$^{-1}$) ثم استخدم (١٦)

والمعادلتان (١٦) ، (١٧) تجعلان اللوغريثمات مفيدة لانها تحول عمليات ضرب وقسمة الاعداد الى عمليات اسهل وهي عمليات الجمع والطرح. وقد اخذت عملية حساب جداول اللوغريثمات، التي كانت الاعمال في الفلك والملاحة بحاجة ماسة لها،معظم وقت نابيير وبرجز في السنوات الاولى من القرن السابع عشر. وقد ظهرت جداول نابيير في ايدنبرغ عام ١٦١٤ . واما جداول برجز، وقد كانت لوغريثمات للاساس ١٠ ، فظهرت في عام ١٦١٧ . وسوف نذكر

فيما بعد اللوغريثمات لاساس غير e مع إن الفكرة ليست ذات اهمية نظرية.

وبما اننا نعرف ان $\frac{د}{دس}$ e^{س} = e^{س} > ٠ على R فان e^{س} متزايد فعلا على R ، ويمكن تطبيق النظرية ٥، من الفصل ٧، البند ١، وتنص على ان الاقتران العكسي، لو، متزايد فعلا على R^+. كذلك اذا كان ص = لوس (س > ٠) فان س = e^{ص} وَصَ (س) =

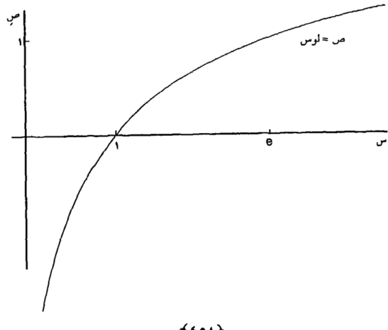
$\frac{١}{سَ (ص)}$ = $\frac{١}{e^{س}}$ = $\frac{١}{س}$، اي ان

$\frac{د}{دس}$ لوس = $\frac{١}{س}$، لاي س > ٠.

وسوف نبين الآن ان لوس ← ∞ عندما س ← ∞ ، وان لوس ← −∞ عندما س ← ٠ +

خذ اي عدد حقيقي حـ > ٠، واكتب س$_٠$ = e^{حـ}. اذن س>س$_٠$ تعطي لوس > لوس$_٠$ = حـ، واذن لوس ← ∞ عندما س ← ∞ . كذلك اذا كان ٠ < س < e$^{-حـ}$ فان لو س < −حـ ومنه لوس ← −∞ عندما س ← ٠ + .

بجمع المعلومات السابقة يصبح بالامكان رسم مخطط ص = لوس، كما في الشكل.



المثال ٨.

اذا كان س > ٠ فان لو س ≥ س − ١، ونحصل على مساواة اذا وفقط اذا كان س = ١. وهذا واضح من المخطط. ولاثبات ذلك اكتب ق (س) = س − ١ − لو س لِـ س > ٠.

اذن قَ (س) = $\frac{س - ١}{س}$ وهذا يساوي الصفر اذا وفقط اذا كان س = ١. وعندما يكون س = ١ فان ق (س) = ٠، وعندما س > ١ فان ق (س) = (س − ١) قَ (مـ)، من نظرية القيمة المتوسطة، حيث ١ < مـ < س. اذن ق (س) > ٠ عندما س > ١. وبشكل مشابه ق (س) > ٠ عندما س < ١. وهذا يثبت المتباينة.

المثال ٩.

لاي | س | < ١ نحصل على المتسلسلة

$$لو(١ + س) = \sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{س^ن}{ن}$$

$$= س - \frac{س^٢}{٢} + \frac{س^٣}{٣} \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (١٩)$$

اسهل طريقة لاثبات (١٩) هي استخدام النظرية ٢ من الفصل ٨، البند ٢. إن نصف قطر تقارب المتسلسلة (١٩) هو ١ (من اختبار النسبة). لهذا اذا كان | س | < ١ اي ان −١ < س < ١ فان س + ١ > ٠، ومن ١٨ نحصل على

$$\frac{د}{د س}[لو(١ + س) - (س - \frac{س^٢}{٢} + \ldots)] = \frac{١}{١ + س} - (١ - س + س^٢ - \ldots) = ٠،$$

لان $\frac{١}{١ + س}$ = ١ − س + س^٢ − ... لِـ | س | < ١. اذن لو(١ + س) = (س − $\frac{س^٢}{٢}$ + ...) + ثابت. وبوضع س = ٠ نحصل على لو١ = ٠ ومنه (١٩).

والمتسلسلة (١٩) تقاربية عندما س = ١، من اختبار ليبنتس، لانها تصبح ١ − $\frac{١}{٢}$ +

$\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}$ . . . . وبتطبيق نظرية النهاية لآبل، الفصل ١، البند ٣، وبما ان لو(١ + س)

متصل على س > -١ فان

$$لو٢ = نها_{س \leftarrow -١} لو(١ + س) = ١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \ldots \qquad (٢٠)$$

عندما يكون س = -١ فان المتسلسلة (١٩) تكون تباعدية الى $-\infty$ مما يؤكد الحقيقة $نها_{س \leftarrow -١^+} لو(١ + س) = -\infty$.

ومع ان متسلسلة لو٢ في (٢٠) تبدو سهلة الا ان التقارب بطيء جدا ولا تستعمل في حساب الصورة العشرية لِـ لو٢ . هناك طرق اخرى افضل سنذكرها فيما بعد .

القوة العامة

حتى الآن لم نعط معنى لتعابير مثل $أ^{س}$ حيث أ عدد حقيقي و س عدد غير نسبي، مثلا: π^{e} ما تزال مجرد علامة على صفحة الورقة. ولكن بامكاننا الآن تعريف القوة العامة $أ^{س}$ لأي أ > ٠ ولأي عدد حقيقي س. فبما انه اذا كان $س_١$ ، $س_٢$ اعدادا نسبية، أ > ٠ نحصل على :

$$أ^{س_١} \cdot أ^{س_٢} = أ^{س_١ + س_٢} \text{ و } (أ^{س_١})^{س_٢} = أ^{س_١ س_٢} ،$$

فان تعريفنا لـ $أ^{س}$ يجب ان يتمتع بهذه الخواص لاي $س_١$ ، $س_٢ \in R$ والتعريف التالي يوفر لنا كل ما نطلبه .

تعريف $أ^{س}$.

لاي عدد حقيقي أ > ٠ ولاي عدد حقيقي س تعرف

$$أ^{س} = e^{س لوأ} \ldots \qquad (٢١)$$

نذكر هنا ان $e^{ص}$ ما هي الا مجرد رمز لِـ سا (ص)، فبما ان سا $(ص_١ + ص_٢)$ = سا $(ص_١)$ · سا $(ص_٢)$ فانه يمكن كتابة الخاصية الاساسية للاس على صورة

$$e^{ص_١ + ص_٢} = e^{ص_١} \cdot e^{ص_٢} .$$

والنظرية التالية تبين ان $أ^{س}$ يتمتع بالخواص المطلوبة للقوى.

النظرية ٥.

افرض ان أ > ٠ ، $س_١$ ، $س_٢$ ∈ R . اذن

(١) $أ^{س_١} \cdot أ^{س_٢} = أ^{س_١ + س_٢}$

(٢) $لو أ^{س_١} = س_١ \, لو أ$

(٣) $(أ^{س_١})^{س_٢} = أ^{س_١ س_٢}$.

البرهان.

(١) من التعريف (٢١) ونظرية الجمع للاقتران الاسي نحصل على

$أ^{س_١} \cdot أ^{س_٢} = e^{س_١ \, لوأ} \cdot e^{س_٢ \, لوأ} = e^{(س_١ + س_٢) لوأ}$ ،

(٢) $لو أ^{س_١} = لو(e^{س_١ \, لوأ}) = س_١ \, لوأ$.

(٣) $(أ^{س_١})^{س_٢} = e^{س_٢ \, لو أ^{س_١}} = e^{س_١ س_٢ \, لوأ} = أ^{س_١ س_٢}$.

ولمعظم التعاريف نقاط ضعف، ولا نستثني (٢١) - فهو لا يشمل الحالات أ = ٠ ، أ < ٠ ، على فرض التقيد بالاعداد الحقيقية.

فعلى سبيل المثال $(-١)^٣ = -١$. ولكن لا نستطيع تطبيق (٢١) لان لو(-١) غير معرف. ونحن نحتاج لدراسة الاقتران الأسي المركب والاقتران اللوغريثمي المركب لمعالجة جميع الحالات. ولا يشمل اي من التعاريف حالة $(صفر)^{صفر}$. وهذه سوف نتجنبها، او نفسرها حسب مقتضى الحال. فعلى سبيل المثال: المتتالية $(ن^{ن})$ حيث ن تبدأ من الصفر نفسرها على انها (٠ ، ١ ، ٤ ، . . .). وهناك دافع «معقول» لتعريف $(صفر)^{صفر} = ١$ ، لأن

$نها_{س \leftarrow ٠+} س^{س} = نها_{س \leftarrow ٠+} e^{س \, لوس} = ١$ ،

هذا لان $| س \, لوس | = س \, لو \frac{١}{س} < \sqrt{٢ س}$ ، لِـ ٠ < س < ١ ومنه س لوس ← ٠ عندما س ← ٠+ .

وقـد جرت العـادة على تعـريف (صفـر)^{م} = ٠، لاي عدد حقيقي موجب م. وسـوف نتبنى هذا التعريف فيما يتبع.

نلاحظ ان (٢١) تعريف مناسب للقوى العامة لان

$$\frac{د}{د س} س^{أ} = أس^{أ-١} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٢)$$

لأي س > ٠ واي أ عدد حقيقي. لهذا فان (٢٢) تعمم نتيجة سابقة حيث كان أ عددا نسبيا.

لاثبات (٢٢)، حيث نعتبر أ عددا حقيقيا ثابتا، نأخذ ق : $R^{+} \longrightarrow R$ ، ق (س) = س^{أ}، اذن

$$\frac{د}{د س} س^{أ} = \frac{د}{د س} e^{أ لوس} = \frac{أ}{س} e^{أ لوس}$$

$$= \frac{أ}{س} \cdot س^{أ} = أس^{أ-١}$$

لان

$$\frac{د}{د س} (أ لوس) = \frac{أ}{س} .$$

اللوغريثم لأي أساس.

لقد عرفنا لوص (لوغريثم ص للأساس e) ويكتب ايضا لو$_{e}$ص وذلك بأخذ معكوس ص = e^{س}. وبطـريقـة مشـابهـة نعرف لو$_{أ}$ص (اي لوغريثم ص للاساس أ) باخذ معكوس ص = أ^{س}. وهذا له معنى اذا كان أ > ٠، أ ≠ ١. ولاننا نحتاج ان يكون أ > ٠ في تعريف أ^{س}. فاذا كان أ = ١ فان ص = أ^{س} = ١^{س} = e = ١ لكل س، لهذا فان الاقتران ليس واحدا لواحد. واذا كان أ > ١ فان لوأ > ٠، ومنه

$$\frac{د}{د س} أ^{س} = \frac{د}{د س} e^{س لوأ} = أ^{س} لوأ > ٠،$$

اذن $ق_أ$: $R \leftarrow R^+$ المعرف بـ $ق_أ$(س) = $س^أ$ هو واحد لواحد. وبما ان $أ^س \leftarrow \infty$ عندما س $\leftarrow \infty$ و $أ^س \leftarrow$ ٠، عندما س $\leftarrow -\infty$ ، فان $ق_أ$ يكون شاملا. اذن ص = $أ^س$ تعطي س = $لو_أ$ ص، والاقتران $لو_أ$: $R^+ \leftarrow R$. تعالج حالة ٠ > أ > ١ بنفس الاسلوب.

المثال ١٠.

افرض ان س > ٠، أ > ٠، أ ≠ ١. اذن،

لوس = ($لو_أ$ س) لو أ . . . . (٢٣)

لاثبات (٢٣)، اكتب حـ = لوس، د = $لو_أ$س. اذن يكون س = $e^{حـ}$ = $أ^د$ = $e^{د لوأ}$.

وبما ان سا واحد لواحد، فانه ينتج ان حـ = د لوأ وهو المطلوب.

لايجاد اللوغريثم للاساس ١٠ (لوغريثمات برجز) من اللوغريثمات للاساس e (لوغريثمات نابير أو اللوغريثمات الطبيعية) نضرب الاخيرة بـ $\frac{١}{لو ١٠}$ وهذا العدد يساوي ٠,٤٣٤ ٢٩٤ ٠٠٠ .

معكوس اقتران الجيب

نعرف من البند ٢ ان الجيب هو اقتران جا : $R \leftarrow$ [−١ ، ١]. فمن الواضح انه شامل. وفي الحقيقة لاي ص ∈ [−١ ، ١]، يوجد عدد لا نهائي من القيم س ∈ R بحيث ان جاس = ص. ولكن يوجد س واحد فقط في [− $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]، بحيث ان جاس = ص. لهذا فانه اذا حددنا اقتران الجيب على الفترة المغلقة [− $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$] ليصبح جا : [− $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$] ← [−١ ، ١] اقتران تقابل، فانه يوجد اقتران عكسي، نرمز له بالرمز $جا^{-١}$، بحيث ان $جا^{-١}$: [−١ ، ١] ← [− $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]. ويستعمل بعض المؤلفين قوجاس، ليشير، وبشكل غير دقيق، الى الزاوية (القوس) التي جيبها هو س.

وعلى القاريء ان لا يخلط بين $جا^{-1}$ س وَ $\frac{1}{جاس}$ التي سنكتبها على هذه الصورة، او بالصورة قتاس.

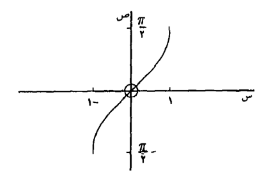
نشدد هنا على ان $جا^{-1}$ تستعمل هنا لتعني معكوس الجيب، محددا على الفترة المغلقة $[-\frac{\pi}{2}، \frac{\pi}{2}]$. فاذا تم تحديد الجيب على فترة اخرى يكون فيها تقابلا، مثلا $[\frac{\pi}{2}، \frac{3\pi}{2}]$، وحصلنا على اقتران عكسي فاننا لن نستعمل الرمز $جا^{-1}$ له.

ولايجاد مشتقة $جا^{-1}$ فاننا نتبع الطريق العادية، فإذا كان ص = جاس، $-\frac{\pi}{2} \leqslant$ س $\leqslant \frac{\pi}{2}$ فان س = $جا^{-1}$ص، $-1 \leqslant$ ص $\leqslant 1$. اذن لاي $-\frac{\pi}{2} <$ س $< \frac{\pi}{2}$ يكون صَ (س) = جتاس > 0 و $-1 <$ س < 1. بما ان $جا^2$س + $جتا^2$س = 1 فان جتاس = $\sqrt{1 - جا^2س}$ ومنه

$$سَ (ص) = \frac{1}{صَ (س)} = \frac{1}{\sqrt{1 - ص^2}}،$$ اي ان

$$\frac{د}{د ص} \; حا^{-1}ص = \frac{1}{\sqrt{1 - ص^2}}$$ لكل $-1 <$ ص < 1.

وباستخدام الرموز العادية وكتابة ص = $جا^{-1}$س والمعلومات السابقة نحصل على المخطط التالي.



المثال ١١ .

اذا حددنـا الجيب على ف = [$-\frac{٣\pi}{٢}$ ، $-\frac{\pi}{٢}$]. فان ص = جاس يحقق ص : ف ⟵ [-١ ، ١] هو اقـتران تقـابـل . اذن يوجـد اقـتران عكسي ولكن من الخطأ ان نكتبـه بالصـورة س = جا$^{-1}$ص لان قيم جا$^{-1}$ تكـون في [$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$] وليس في ف . وهنـاك طبعا علاقة بين س وجا$^{-1}$ص. فاذا كان س ∈ ف فان -س - π ∈ [$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$] و

ص = جاس = جا ($-\pi$ - س)،

واذن

$-\pi$ - س = جا$^{-1}$ ص . أو س = $-\pi$ - جا$^{-1}$ص.

ونحصل على معكوس جيب التمام، ومعكوس الظل . . . الخ بنفس الطريقة السابقة تماما. ولكن بالنسبة لجيب التمام نختار الفترة [٠ ، π] لتكون الفترة المغلقة التي يكون عندها جتا متناقصا فعلا ويأخذ جميع القيم بين ١ و-١ . وبالنسبة للظل نختار الفترة المفتوحة ($-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$)، حيث يكـون ظا متـزايـدا فعـلا ويأخـذ جميـع القيم الحقيقيـة . والجـدول التالي يبين معكـوسـات الاقـترانـات المثلثية ومعكوسات الاقترانات الزائدة، ومجالاتها المقابلة . وفي حالة المشتقات يجب تحديد س بالطريقة الواضحة . فعلى سبيل المثال مشتقة جتا لها صفر عند س = ٠، وصفر عند س = π ، اذن لا يوجد مشتقة لِـ جتا$^{-1}$ عند ١ وعند -١ .

ننصح القاريء باثبات جميع النتائج بالتفصيل.

الاقتران	المجال	المجال المقابل	المشتقة
جا$^{-1}$س	[-١ ، ١]	[$-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$]	$\frac{1}{\sqrt{1 - س^2}}$
جتا$^{-1}$س	[-١ ، ١]	[٠ ، π]	$\frac{-1}{\sqrt{1 - س^2}}$
ظا$^{-1}$س	R	($-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$)	$\frac{1}{1 + س^2}$
جاز$^{-1}$س	R	R	$\frac{1}{\sqrt{1 + س^2}}$
جتاز$^{-1}$س	[١ ، ∞)	[٠ ، ∞)	$\frac{1}{\sqrt{س^2 - 1}}$
ظاز$^{-1}$س	(-١ ، ١)	R	$\frac{1}{1 - س^2}$

المثال ١٢.

خذ ص = ظاز(س) = $\frac{e^{2س} - 1}{e^{2س} + 1}$ إذن ص : R ⟵ (-١ ، ١) وص′(س) = قا ز^{2}س

< ٠، اذن ص متزايد فعلا. كذلك ص ⟵ ١ عندما س ⟵ ∞ و ص ⟵ -١ عندما س ⟵ -∞ . اذن ص اقتران تقابل. لهذا فانه يوجد س = ظاز$^{-1}$ص. في هذه الحالة يمكن ايجاد س بدلالة ص:

$$(e^{2س} + 1) ص = e^{2س} - 1،$$

$$e^{2س} = \frac{1 + ص}{1 - ص}$$

ومنه

$$س = \frac{1}{2} لو \frac{1 + ص}{1 - ص} = ظاز^{-1} (ص).$$

بما ان (لو و)′ = $\frac{1}{و}$ فاننا نحصل على

$$\bar{س}(ص) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+ص} + \frac{1}{1-ص}\right] = \frac{1}{1-ص^2}$$

لـ | ص | < ١.

نبذة تاريخية عن اللوغريثمات

اصلها غير واضح، وما سنقدمه هنا غير كامل. كان جون نابيير (١٥٥٠ - ١٦١٧) بارونا اسكتلنديا وهو اول من نشر جداول لوغريثمات وذلك في عام ١٦١٤. ولكن طريقة حسابه للوغريثمات لم تنشر الا بعد وفاته.

يبدو ان نابيير اخذ كلمة لوغريثم من الاغريقية وهي تعني ارقام الحساب.

لم يتوصل نابيير الى اللوغريثم بالطريقة التي استخدمناها. ومن المحتمل انه لم يكن يعرف شيئا عن التفاضل. ولكن كانت عنده فكرة عن الاقتران والسرعة (ما ندعوه المشتقة). وسوف نحاول وضع فكرة نابيير بلغة حديثة لمساعدة القاريء: اراد نابيير ان يجد اقترانا ق : $R^+ \leftarrow R^+$ بحيث ان ق (س ص) = ق (س) + ق (ص) لكل س ، ص $\ni R^+$. وهذا يعطي ق (١) = ٢ ق (١)، واذن ق (١) = ٠ وعلى فرض ان ق متصل عند ١ نحصل على

$$\frac{ق(س+و) - ق(س)}{و} = \frac{ق(1+\frac{و}{س})}{س\ \frac{و}{س}} \leftarrow \frac{\bar{ق}(1)}{س} \quad (و \leftarrow 0).$$

اذن $\bar{ق}$ (س) = $\frac{حـ}{س}$ لكل س > ٠. وقد قرر نابيير اخذ حـ = ١. ومعرفتنا بـ لوس تعطي (ق (س) - لوس)$'$ = ٠، ومنه ق (س) - لوس = ثابتا = ق (١) - لو١ = ٠، اي ان ق (س) = لوس. ولهذا اختار نابيير اللوغاريثم للاساس e من حيث لا يعلم.

كان برجز استاذ الرياضيات في لندن، وقد اقنع نابيير ان الاساس ١٠ يكون افضل للعمليات الحسابية التي بها اعداد على صورة عشرية كما يحدث عادة عمليا. لانه يكون من السهل تحريك الفاصلة العشرية كما نرغب. على سبيل المثال، وباستخدام جداول اربعة

ارقام، فان لو١٫٠ ١٥٩ = لو١٫٠ (١,٥٩ × ١٠^٢) = ٢ + لو١٫٠ ١,٥٩ = ٢,٢٠١٤ . فاذا أردنا (١٥٩)^٢ فاننا ننظر الى ٢ لو١٫٠ ١٥٩ = ٤,٤٠٢٨ . ولكن لو١٫٠ ٢,٥٢٨ = ٠,٤٠٢٨ اذن (١٥٩)^٢ = ٢,٥٢٨ × ١٠^٤ = ٢٥٢٨٠ .

ان هذه الحسابات تبين ما قد ساعد برجز على السير فيه . ان الشائع في الرياضيات التطبيقية ان نكتب اشياء مثل لو١٫٠ ١,٥٩ = ٠,٢٠١٤ . هذا خطأ ويؤدي الى النتيجة المغلوطه (١٥٩)^٢ = ٢٥٢٨١ .

المقصود طبعا ان المعادلةتكون صحيحة ضمن مجال دقة الجدول. وكان برجز على علم بها فعل وكان يشير الى هذا الخطأ باسم (آفة الارقام العشرية).

---

* قول المؤلف عن ان اصل اللوغريثمات غير معروف وأن اصل كلمة لوغريثم يوناني، يمثل رأيا يتجه اليه من لم يتوسعوا في دراسة تاريخ الرياضيات في العصور الوسطى، أو يجهلون، او يتجاهلون، دور العرب في تطويرها.

هناك امران أرى ضمهما الى الصورة الموجزة التي اعطاها المؤلف لنشأة فكرة اللوغريثم.

اولهما ان عمليتي الضرب والقسمة كانتا تصعبان على الحاسب قبل انتشار الحساب الهندي، على يد العرب، وبقيتا صعبتين، حتى بعد انتشار هذا الحساب. فلما وضع العرب قواعد المثلثات ومنها امثال

٢ جا أ جتاب = جا (أ + ب) + جا (أ − ب)

حيث يتحول الضرب الى جمع، كان طبيعيا ان يطرح السؤال: هل يمكن تحويل الضرب الى جمع، في الاعداد، كما تحول الى النسب المثلثية. من هذا المنطلق بدأ نابير بحثه.

الامر الثاني الذي ارى ضمه الى الصورة ان لوغرثم والغورثم والغوريثم، وكلمات غيرها، انتشرت لدى الاوروبيين الذين تتلمذوا على الرياضيين العرب، على وجه التحديد، والكلمات كلها تتعلق بالارقام الهندية التي دخلت اوروبا مع حساب الخوارزمي، فكان كل بحث لديهم يستعمل هذه الارقام يوصف بانه لوغريثمي، اي خوارزمي. نضيف أن الكسور العشرية ابتكار عربي وأن أول كتاب أوروبي بحث فيها نشر سنة ١٥٨٥، في عصر نابير و برجز.

فان يكن ما نشير اليه ترجيحا، لا نقطع فيه، فهو ترجيح أقوى من الظن بأن أصل الكلمة إغريقي.

المدقق

تمارين ٩ ـ ٤

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين).

١ ـ عين النقاط التي تكون عندها الاقترانات التالية معرفة، وجد مشتقاتها

(١) لو$e^{س}$ ، (٢) $e^{لوس}$ ، (٣) $e^{س لو \pi}$ ،

(٤) $e^{\pi لوس}$ ، (٥) $e^{س لوس}$ ، (٦) لو(١ + س^{٢})،

(٧) لو| س | ، (٨) لو(جا س) (٩) لو(قاس + ظاس)

(١٠) لو { س + $\sqrt{س^{٢} + ١}$ } (١١) لو(ظا $\frac{س}{٢}$).

٢ ـ انقد ما يلي:

٠ = لو١ = لو(-١) (-١) = لو(-١) + لو(-١) = ٢ لو(-١). اذن لو(-١) = ٠.

٣ ـ (١) اثبت انه اذا كان | س | < ١ فان

$$لو \frac{١ + س}{١ - س} = ٢ (س + \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٥}}{٥} + \ldots).$$

هل هذا صحيح عند س ≠ ± ١ ؟

(٢) باختيار قيمة مناسبة لِـ س، احسب لو٢ صحيحا لِـ ثلاث منازل عشرية.

(٣) اثبت أنه اذا كان ٠ ≤ س < ١ فإن

$$س \leqslant \frac{١}{٢} لو \frac{١ + س}{١ - س} \leqslant س + \frac{س^{٣}}{٣ (١ - س^{٢})}$$

(٤) اثبت انه لأي ن موجب يكون

$$\frac{٢}{٢ن + ١} < لو (١ + \frac{١}{ن}) < \frac{٢}{٢ن + ١} + \frac{١}{٦(٢ن + ١)(ن^{٢} + ن)}$$

٤ ـ هل يوجد ن ∋ N بحيث ان لو ن = ٢؟

٥ ـ اذا كان أ > ب > ٠، فاثبت ان لو $\frac{أ}{ب}$ < $\frac{(أ - ب)}{\sqrt{أ ب}}$.

٦ ـ لِـ | س | ⩽ ١ ون = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . عرّف $ل_ن$ (س) = جتا (ن $جتا^{-1}$ س). اثبت ان $ل_{ن+١}$ (س) = ٢س $ل_ن$ (س) − $ل_{ن-١}$ (س) لِـ ن ⩾ ١ واستنتج ان $ل_ن$ (س) حدودية في س درجتها ن. اكتب $ل_ن$ على صورة حدودية لكل ٠ ⩽ ن ⩽ ٤. جد كذلك اصفار $ل_ن$ لكل ن ⩾ ١.

تعـرف $ل_ن$ باسم حدوديـات تشبيتشيف نسبـة الى الرياضي الروسي المشهور تشبيتشيف (١٨٢١ ـ ١٨٩٤). وتستعمل هذه الحدوديات في نظرية التقريب والتحليل العددي.

لأي ك عرّف || ك || بانها اكبر قيمة لِـ | ك (س) | لكل س ∋ [−١ ، ١]. ثبّت ن ∋ N وخذ الحدوديات من النوع

$ك_ن$ (س) = $س^ن$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + . . . + $أ_٠$ ،

التي يكون معامل $س^ن$ فيها يساوي ١. اثبت ان $٢^{-ن+١}$ $ل_ن$ يحقق || $٢^{-ن+١}$ $ل_ن$ || ⩽ || $ك_ن$ || لكل $ك_ن$. ارشاد: افرض ان $ك_ن$ يحقق || $ك_ن$ || < || $٢^{-ن+١}$ $ل_ن$ || وخذ الحدودية $٢^{-ن+١}$ $ل_ن$ − $ك_ن$ التي درجتها لا تزيد عن ن − ١. ثم توصل الى تناقض.

٧ ـ اثبت ان الاقـتران الاسي المـركب سا : $\mathbb{C}$ ⟵ $\mathbb{C}$ / { ٠ } ليس واحـدا لواحـد ولكن اذا حددنا سا على سه = { ع | − π > تخ (ع) ⩽ π } فانه يصبح واحدا لواحد. كذلك اذا كان م = أ + ت حـ ≠ ٠ فانه يمكن حل سا (ع) = م حيث ع = س + ت ص ونجد س = لو | م |. وهناك ايضا ص مناسبة في سه، نكتب بالصورة ص = سعم (م)، أعني { سعة العدد المركب م}.

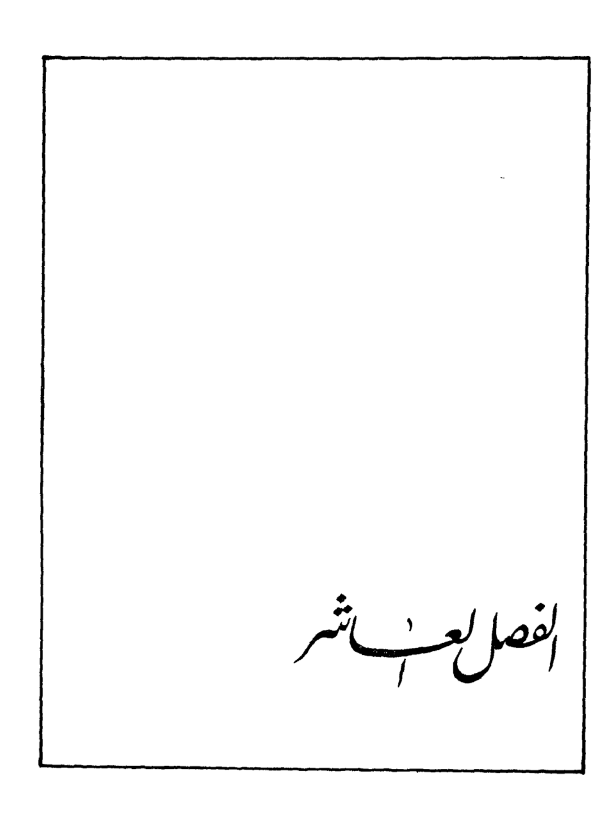
فيكون سا (ع) تقابلا على سه ، وحل سا (ع) = م هو الاقتران اللوغريثمي المركب:

ع = لوم = لو | م | + ت سعم (م).

ويمكن ان نعرف القوة المركبة

$م^أ$ = سا (أ لوم)

لأي عدد مركب أ ولأي عدد مركب م ≠ ٠. ما هو $ت^ت$؟


الفصل العاشر

التكامل

١ . تكامل نيوتن وتكامل ريمان

سوف نقصـر البحث في هذا البنـد على تكـامل الاقترانات الحقيقية المعرفة على فترات مغلقة على R .

هنـاك نمطـان من التكامل يظهران كثيرا في التحليل الابتدائي : تكامل نيوتن، وتكامل ريمان . أما تكامل نيوتن فيظهر عند عكس عملية التفاضل. وفي هذه الحالة فان الاقتران ق : [أ ، ب]⟵ R يكون معروفا. ونحاول ان نجد اقترانا ك : [أ ، ب]⟵ R بحيث ان كَ(س) = ق (س) لكـل س∈ [أ ، ب]. واذا كان ك موجـودا نسميـه الاقـتران البـدائي ، أو التكامل غير المحدود لِـ ق على [أ ، ب]. على سبيل المثال اذا كان ق (س) = س على [أ ،ب]

فان كَ (س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ هو اقتران بدائي له . كذلك اذا كان حـ ثابتا على [أ ، ب] فان ك + حـ هو بدائي ايضا لأن (ك + حـَ) = كَ + حَـ = ق لأن حَـ = ٠ .
اليك الآن التعريف الدقيق لتكامل نيوتن .

تكامل نيوتن .

افرض ان ق : [أ ، ب] ⟵ R . نقول ان ق قابل للتكامل على طريقة نيوتن على [أ، ب] اذا وفقط اذا كان لِـ ق اقتران بدائي (تكامل غير محدود) ك بحيث ان كَ (س) = ق(س) لكل س ∈ [أ ، ب] . وسنكتب

ك (س) = ∫ ق (س) د س أوك (س) = نيو ∫ ق (س) د س .أما تكامل نيوتن المحدود لِـ ق على [أ ، ب] فيعرف على انه ك (ب) − ك (أ) . حيث ك اي اقتران بدائي لِـ ق ونكتب

ك (ب) − ك (أ) = $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س أونيو $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س .

سوف نرمز لمجموعة جميع الاقترانات القابلة للتكامل على طريقة نيوتن بالرمز نيو[أ ، ب] .

نذكر هنا انه اذا كان ق ∈ نيو[أ ، ب] فانه يمكن كتابة تكامل نيوتن المحدود على صورة $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س أو $\int_{أ}^{ب}$ ق (ص) د ص، الخ لاننا نحصل على القيمة بحساب ك (ب) − ك (أ) ، وهذه القيمة لا تعتمد على المتغير سواء كان س أو ص، الخ .

وقد يبدو ان تعريف التكامل المحدود يعتمد على الاقتران البدائي الذي نختاره . هذا ظاهري فقط واليك الدليل :

النظرية ١ .

اذا كان ق ∈ نيو[أ ، ب] فان نيو $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س لا يعتمد على الاقتران البدائي

الذي نختاره.

البرهان.

افرض ان $ك_١$ ، $ك_٢$ اقترانان بدائيان لـ ق. اذن $ك'_١(س) = ق(س)$، $ك'_٢(س) = ق(س)$ لكل $س \in [أ ، ب]$، اي ان $(ك_١ - ك_٢)'(س) = ٠$. إذن $ك_١(س) - ك_٢(س) =$ ثابتا ومنه $ك_١(ب) - ك_٢(ب) = ك_١(أ) - ك_٢(أ)$، لهذا فان

$$ك_٢(ب) - ك_٢(أ) = ك_١(ب) - ك_١(أ) = \text{نيو} \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د\, س .$$

وهذا يثبت النظرية.

المثال ١.

على اي فترة [أ ، ب]: عرف $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، $ق_٤$ كما يلي: $ق_١(س) = س^{ن}$ ، ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ؛ $ق_٢(س) = \text{جتاس}$؛ $ق_٣(س) = e^{س}$ ؛ $ق_٤(س) = \frac{١}{١ + س^٢}$. فيكون

$د \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} = ق_١(س)$؛ $د(\text{جاس}) = ق_٢(س)$؛ $د(e^{س}) = ق_٣(س)$؛ $د(ظا^{-١}(س)) = ق_٤(س)$.

اذن،

$$\int_{أ}^{ب} س^{ن}\, د\, س = \frac{ب^{ن+١} - أ^{ن+١}}{ن + ١} ؛ \quad \int_{أ}^{ب} \text{جتاس}\, د\, س = \text{جاب} - \text{جاأ} ؛$$

$$\int_{أ}^{ب} e^{س}\, د\, س = e^{ب} - e^{أ} ؛ \quad \int_{أ}^{ب} \frac{د\, س}{١ + س^٢} = ظا^{-١}ب - ظا^{-١}أ$$

كذلك اذا كان ب > أ > ٠، فان

$$\int_{أ}^{ب} \frac{د س}{س} = لو \frac{ب}{أ}.$$

حيث جميع التكاملات هي تكاملات نيوتنية محدودة .

المثال ٢ .

اذا كان ق ∈ نيو[أ ، ب] وكان ق (س) > ٠ على (أ ، ب) فان نيو $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س > ٠ . لاثبات ذلك افرض ان كَ (س) = ق (س) لكل س ∈ [أ ، ب]. فمن نظرية القيمة المتوسطة فانه يوجد و ∈ (أ ، ب) بحيث ان ك (ب) − ك (أ) = (ب − أ) ق (و) > ٠، ومنه تنتج النتيجة المطلوبة.

وجدير بالذكر ان جميع الاقترانات في المثال ١ هي اقترانات متصلة على [أ ، ب]. وسوف نثبت فيما بعد ان كل اقتران متصل على [أ ، ب] هو قابل للتكامل على طريقة نيوتن على [أ ، ب]، اي ان م [أ ، ب] ⊂ نيو[أ ، ب]، حيث م [أ ، ب] هي مجموعة جميع الاقترانات الحقيقية المتصلة على [أ ، ب]. ويمكن اثبات ان الاحتواء هنا فعلي.

والنوع الثاني من التكامل الابتدائي يرتبط باسم الرياضي الالماني ريمان (١٨٢٦ - ١٨٦٦). لقد أوجد هذا التكامل في الاصل ليعطي معنى تحليليا دقيقا لفكرة المساحة تحت المنحنى ص = ق (س)، حيث أ ⩽ س ⩽ ب. وسنعطي التفاصيل فيما بعد، اما الآن فنذكر بعض الملاحظات العامة:

اذا كان تكامل ريمان لاقتران ما، ق : [أ ، ب] ⟵ R ، موجودا، فاننا سنرمز له في الوقت الحاضر بالرمز

$$ر \int_{أ}^{ب} ق (س) د س$$

وعند حساب تكامل ريمان لمنحنيات بسيطة، مثل المنحنى الدائري، ومنحنى القطع المكافيء، فان النتيجة تكون نفس التي نحصل عليها بالطرق الهندسية. لهذا فانه بالامكان تعريف

المساحة تحت المنحنى ص = ق (س) لكل أ ≥ س ≥ ب على انها قيمة تكامل ريمان. فاذا فعلنا ذلك فان الاقتران غير القابل للتكامل على طريقة ريمان على [أ ، ب] يكون لا مساحة تحته. وهذا يقتضي ان ينصب حديثنا عن مساحة ريمان كلما اردنا التحدث عن المساحة.

سوف يتبين لنا ان كل اقتران متصل على [أ ، ب] هو قابل للتكامل على طريقة ريمان على [أ ، ب] اي ان م [أ ، ب] ⊂ ر [أ ، ب]. وهناك امثلة توضح ان هذا الاحتواء فعلي. كذلك اذا كان ق ∈ م [أ ، ب] فاننا سنثبت فيما بعد ان

$$\text{نيو} \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = ر \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

إن العلاقة (١) خطأ بشكل عام: فقد يكون احد التكاملين موجوداً والآخر غير موجود. ولكنها صحيحة في الاقترانات المتصلة التي هي ذات فائدة كبيرة في التطبيقات. وهذا هام جداً لان ايجاد قيمة تكامل نيوتن المحدود اسهل من ايجاد تكامل ريمان.

ويعتمد برهان (١) على ما يسمى «النظرية الاساسية للتكامل» التي تربط التفاضل بالتكامل كما يلي

$$\frac{د}{د س}\left(ر \int_{أ}^{س} ق(ص)\, د ص\right) = ق(س) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

على شرط ان يكون ق متصلا عند س ∈ [أ ، ب] وان يكون قابلا للتكامل على طريقة ريمان على [أ ، ب]. ومن (٢)، التي سنبرهنها فيما بعد، نرى انه لكل ق ∈ م [أ ، ب] يوجد اقتران بدائي معرف بدلالة تكامل ريمان لِـ ق على [أ ، س].

ان العديد من الاقترانات العادية غير قابلة للتكامل، لا على طريقة نيوتن، ولا على طريقة ريمان، ومنذ زمن ريمان تم ايجاد طرق تكامل عديدة لكي تصبح هذه الاقترانات قابلة للتكامل.

ومن اهم هذه الطرق طريقة تعرف باسم الرياضي الفرنسي الشهير ليبيج (١٨٧٥ - ١٩٤١). ومع ان نظرية تكامل ليبيج تستعمل كثيراً في التحليل، الا انها قد تكون اصعب من

ان توضح في كتاب ابتدائي. وهناك طريقة حديثة للتكامل استنبطها هنستك وقد وضحها في كتاب له، يمكن لمن شاء ان يرجع اليه

ولتبسيط الامور فاننا لن نعرض تكامل ريمان بالطريقة التي اتبعها ريمان نفسه. بل سنتبع طريقة داربو (١٨٤٢ - ١٩١٧)، وهي تعطي نفس النتائج:

تكامل ريمان

سوف ندرس الاقترانات المحصورة ق : [أ ، ب] ← R ونكتب لكل س ∈ [أ ، ب]،

مـ = كـ.حـ.د [ق (س)]، م = ص.حـ.ع [ق (س)] . . . . (٣)

فيكون مـ ≽ ق (س) ≽ م لكل س ∈ [أ ، ب].

ونعرف مجموعة النقط ج = { أ ، س$_1$ ، س$_2$ ، . . . ، س$_{ن-1}$ ، ب } بانها تجزئة لـ[أ ، ب] اذا كان

أ = س. < س$_1$ < . . . < س$_{ن-1}$ < س$_ن$ = ب.

وندعو ف$_ر$ = [س$_{ر-1}$ ، س$_ر$] حيث ١ ≽ ر ≽ ن الفترة الجزئية الرائية لـج. فعلى سبيل المثال { أ ، ب } هي تجزئة لـ[أ ، ب]. فاذا كان أ < حـ < ب تكون { أ ، حـ ، ب } هي تجزئة محسنة لـ { أ ، ب } اي انها تحوي نقاطا اكثر.

وهذا مثال آخر: اذا وضعنا س$_ر$ = أ + ر $\frac{(ب - أ)}{ن}$ فان { س. ، س$_1$ ، . . . ، س$_ن$ } هي تجزئة لـ[أ ، ب]، إلى ن من الفترات الجزئية، طول كل منها $\frac{ب - أ}{ن}$

فاذا كانت ج تجزئة لـ[أ ، ب]، وكان س ∈ ف$_ر$ فاننا نكتب

مـ$_ر$ = كـ.حـ.د { ق (س) | س ∈ ف$_ر$ } ، . . . . (٤)

م$_ر$ = ص.حـ.ع { ق (س) | س ∈ ف$_ر$ }.

وينتج من (٣) و (٤) ان:

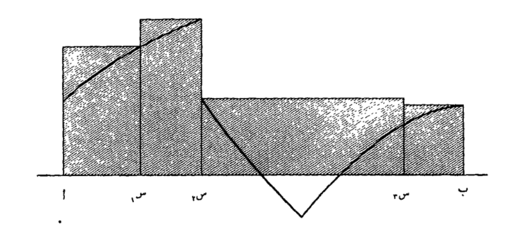
$$مـ \leqslant مـ_ر \leqslant م_ر \leqslant م \quad لـ ١ \leqslant ر \leqslant ن \quad . \quad . \quad . \qquad (٥)$$

ولأي تجزئة ج فاننا نعرف المجاميع السفلى والعليا كما يلي:

$$د(ج) = \sum_{ر=١}^{ن} مـ_ر (س_ر - س_{ر-١})$$

$$ع(ج) = \sum_{ر=١}^{ن} م_ر (س_ر - س_{ر-١}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (٦)$$

ويرينا الشكل هندسيا ان ع (ج) هو مجموع مساحات المستطيلات المظللة:



النظرية ٢.

المجاميع السفلى د (ج) محصورة من أعلى، والمجاميع العليا ع (ج) محصورة من اسفل، اذن يوجد (ص.ح.ع)$_ج$ (د (ج)) و (ك.ح.د)$_ج$ (ع (ج)).

البرهان.

لأي ج فان $س_ر - س_{ر-١} > ٠$ اذن، وبأخذ المجموع من ر = ١ الى ر = ن، نحصل من (٥) على:

$$د(ج) = \sum مـ_ر (س_ر - س_{ر-١}) \leqslant \sum م_ر (س_ر - س_{ر-١}) \leqslant م \sum (س_ر - س_{ر-١}).$$

ولكن $\sum$ س $_ر$ − س $_{ر-1}$ = ب − أ لان الحدود تختصر عدا س. وس $_ن$. لهذا فان د (ج) ≥ م(ب − أ) لأي تجزئة ج، اذن د (ج) محصورة من اعلى بـ م (ب − أ)، واذن يوجد

(ص.ح.ع)$_ج$ (د (ج))و

(ص.ح.ع)$_ج$ (د (ج)) ≥ م (ب − أ) . . . . (٧)

حيث تأخذ ص.ح.ع على جميع التجزئات الممكنة ج لِـ[أ ، ب]. كذلك، وبطريقة مشابهة ، فان ع (ج) ≤ د (ج) ≤ مـ (ب − أ)، واذن ع (ج) محصورة من اسفل بـ مـ (ب − أ) و

(ك.ح.د)$_ج$ (ع (ج)) ≤ مـ (ب − أ) . . . . (٨)

وهكذا يتم البرهان.

نعرف التكامل السفلي لأي اقتران محصور ق : [أ ، ب] ⟵ R كما يلي:

$\int_{أ_*}^{ب}$ ق (س) د س = (ص.ح.ع)$_ج$ (د (ج)) . . . . (٩)

ونعرف التكامل العلوي كما يلي:

$\int_{أ}^{ب^*}$ ق (س) د س = (ك.ح د)$_ج$ (ع (ج)) . . . . (١٠)

وبعبارة هندسية، فان التكامل السفلي يقارب المساحة الواقعة تحت منحنى ص = ق (س)، أ≥ س ≥ ب، بمستطيلات تنشأ تحت المنحنى. واما التكامل العلوي فيقارب المساحة من اعلى.

فنتوقع ان يكون:

$\int_{أ_*}^{ب}$ ق (س) د س ≥ $\int_{أ}^{ب^*}$ ق (س) د س . . . . (١١)

ولكن هذا الامر ليس بالبساطة التي يبدو بها.

وقبل برهنة (١١)، سنبرهن نتيجة سهلة ومفيدة.

النظرية ٣ .

ان تحسين التجزئة يزيد من قيمة المجموع السفلي وينقص قيمة المجموع العلوي . اي انه اذا كانت ج $\subset$ جَ فان د (جَ) $\geqslant$ د (ج) وع (جَ) $\leqslant$ ع (ج) .

البرهان .

سوف نبرهن العلاقة بالنسبة للمجاميع العليا . سوف نفترض ان جَ تحوي نقطة واحدة فقط اكثر من ج . عند اثبات ان ع (جَ) $\leqslant$ ع (ج) نضيف نقطة اخرى لِـ جَ ونحصل على جً وبهذا يكون ع (جً) $\leqslant$ ع (جَ) $\leqslant$ ع (جَ)، الخ .

افرض ان ج = { أ ، . . . ، $س_{ر-١}$ ، $س_{ر}$ ، . . . ، ب } ، وان جَ = { أ ، . . . ، $س_{ر-١}$ ، $سَ_{ر}$ ، $س_{ر}$، . . . ، ب } ، واكتب $مَ_{ر}$ = (ص.ح.ع) ق (س) حيث $س_{ر-١} \leqslant$ س $\leqslant$ $سَ_{ر}$، $مً_{ر}$ = (ص.ح.ع) مـ (س) حيث $سَ_{ر} \leqslant$ س $\leqslant$ $س_{ر}$. اذن $مَ_{ر} \leqslant م_{ر}$ و$مً_{ر} \leqslant م_{ر}$.

ان الفترتين [$س_{ر-١}$ ، $سَ_{ر}$] و[$سَ_{ر}$ ، $س_{ر}$] تساهمان في المجموع ع (جَ) . أما باقي الفترات فمساهمتها في ع (ج) هي نفس مساهمتها في ع (جً) ولكن

$$مَ_{ر}(سَ_{ر} - س_{ر-١}) + مً_{ر}(س_{ر} - سَ_{ر}) \leqslant م_{ر}(س_{ر} - س_{ر-١})$$

واذن ع (جَ) $\leqslant$ ع (ج) . وباستخدام $مـَ_{ر} \geqslant مـ_{ر}$، $مـً_{ر} \geqslant مـ_{ر}$ نبرهن النتيجة المتعلقة بالمجاميع السفلى . وهذا يتمم البرهان .

ملاحظة .

اذا كانت $ج_{١}$ ، $ج_{٢}$ تجزئتين لِـ [أ ، ب] فان اتحادهما يكون تجزئة محسنة لكل منهما . ولهذا فان

$$د (ج_{١} \cup ج_{٢}) \geqslant د (ج_{١})، ع (ج_{١} \cup ج_{٢}) \leqslant ع (ج_{١}).$$

النظرية ٤ .

اذا كان ق : [أ ، ب] ← R محصورا فان

$$م (ب - أ) \geqslant \underline{\int}_{أ}^{ب} ق (س) د س \leqslant \overline{\int}_{أ}^{ب} ق (س) د س \leqslant م (ب - أ) \quad . . . . . (١٢)$$

البرهان .

من (٥) و (٦) لأي ج

$$م (ب - أ) = \sum_{ر=١}^{ن} م (س_{ر} - س_{ر-١}) \geqslant \sum_{ر=١}^{ن} م_{ر} (س_{ر} - س_{ر-١}) = د (ج)$$ وبما ان د (ج) $\geqslant$ (ص.ح.ع)$_{ج}$ (د (ج))، فان التعريف (٩) يعطي المتباينة الاولى . وبنفس الطريقة نبرهن المتباينة الاخيرة .

الآن، علينا ان نبرهن (١١) . فمن التعريف (٩) وتعريف اصغر حاصر علوي ، فانه يوجد لكل و > ٠ تجزئة ج بحيث ان :

$$\underline{\int} ق (س) د س < د (ج) + و \quad . . . . (١٣)$$

كذلك من (١٠) يوجد جَ بحيث ان

$$ع (جَ) < \overline{\int}_{أ}^{ب} ق (س) د س + و \quad . . . . (١٤)$$

وباخذ التجزئة المحسنة ج U جَ ، والملاحظة السابقة ، نحصل على

د (ج) + و $\leqslant$ د (ج$_{١}$ U جَ) + و $\leqslant$ ع (ج U جَ) + و $\leqslant$ ع (جَ) +ووهذا، مع (١٣) و (١٤)، يعطي

$$\underline{\int}_{أ}^{ب} ق (س) د س < \overline{\int}_{أ}^{ب} ق (س) د س + ٢ و .$$

وبما ان و عدد اختياري، فان (١١) تكون صحيحة . وبهذا تكون النظرية قد برهنت .

ويبين المثال التالي انه في بعض الاقترانات المحصورة ، تكون العلاقة في (١١) علاقة

مساواة. وفي بعض الاقترانات المحصورة، تكون هذه العلاقة «اقل من».

المثال ٣.

(١) اذا كان ق (س) = حـ على [أ ، ب] فان $\underline{\int}_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = $\overline{\int}_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = حـ (ب − أ).

(٢) اذا كان هـ : [٠ ، ١] ← R حيث هـ (س) = ١ (س نسبي) وهـ (س) = ٠ (س غير نسبي) فان

$$٠ = \underline{\int}_{٠}^{١} هـ (س) د س < \overline{\int}_{٠}^{١} هـ (س) د س = ١ .$$

لاثبات (١)، خذ اي تجزئة ج لـ [أ ، ب]. اذن م ر = مـ ر = حـ ومنه د (ج) = ع (ج) = حـ (ب − أ). ومنه ينتج ان (ص.ح.ع)ج (د (ج)) = (ك.ح د)ج (ع (ج)) = حـ (ب − أ). وهذا يثبت (١).

ولاثبات (٢) خذ اي تجزئة ج ل [٠ ، ١] ولنأخذ م ر ، مـ ر لـ هـ. ففي [س ر−١ ، س ر] يوجد عدد نسبي د وبما ان هـ (س) ≤ ١ لأي س ∈ ف ر وهـ (د) = ١، فان م ر = ١. كذلك يوجد في ف ر عدد غير نسبي. اذن مـ ر = ٠

ينتج ان ع (ج) = $\sum$ ١ (س ر − س ر−١) = ١، د (ج) = $\sum$ ٠(س ر − س ر−١) = ٠.

لهذا فان (ص.ح.ع)ج (د (ج)) = ٠ و(ك.ح د)ج (ع (ج)) = ١. وهذا يثبت (٢).

وتوجد تكاملات عليا وسفلى لأي اقتران محصور على [أ ، ب]. والمثال ٣ (٢) يبين انها قد لا تكون متساوية. وتستعمل حالة التساوي في التعريف التالي:

قابلية التكامل على طريقة ريمان:

نقول ان الاقتران المحصور ق : [أ ، ب] ← R قابل للتكامل على طريقة ريمان على

[أ ، ب] اذا وفقط اذا كان

$$\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\int}}\text{ ق (س) د س} = \overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\int}}\text{ ق (س) د س.}$$

ونكتب القيمة المشتركة على صورة $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\int}}$ ق (س) د س أو ر $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\int}}$ ق (س) د س، اذا كانت هناك حاجة لتمييزه عن تكامل نيوتن. ويرمز لمجموعة جميع الاقترانات القابلة للتكامل على طريقة ريمان بالرمز ر[أ ، ب].

وقد جرت العادة على تسمية [أ ، ب] مدى التكامل، وَق الاقتران المكامل. اما النقاط أ و ب فتسمى نهايات التكامل: أ هي النهاية السفلى و ب هي النهاية العليا. ويجب ان لا يخلط الطالب بين هذه النهايات ونهايات المتتاليات او نهايات الاقترانات عند نقطة.

ومن الامور الرئيسية في نظرية التكامل معرفة هل الاقتران قابل للتكامل ام لا. واستخدام التعريف مباشرة قد يكون امرا صعبا في معظم الحالات. والطريقة الاخرى هي ايجاد قيمة التكامل. وسوف نناقش هذين الامرين فيما يلي:

يجب ان نتذكر ان الاقتران القابل للتكامل على طريقة ريمان على [أ ، ب] يكون محصورا على [أ ، ب]، حسب التعريف. لهذا وعلى سبيل المثال فان ق : [٠ ، ١] $\to$ R المعرف بـ ق (٠) = ٠ وق (س) = $\frac{1}{\text{س}}$، س $\neq$ ٠ لا ينتمي الى ر[٠ ، ١].

والنظرية التالية تعطي شرطا كافيا وضروريا للتكامل على طريقة ريمان.

النظرية ٥.

ق $\in$ ر[أ ، ب] اذا وفقط اذا كان لكل و $>$ ٠ يوجد تجزئة ج بحيث ان

ع (ج) − د (ج) $<$ و . . . . (١٥)

البرهان.

(١) افرض ان (١٥) تتحقق حيث و $>$ ٠ و(ج) تجزئة مناسبة. يجب ان نثبت ان التكامل

العلوي والتكامل السفلي متساويان. الآن

$$د(ج) \geqslant \underline{\int}_{أ}^{ب} ق(س)\, د س \text{ و } ع(ج) \leqslant \overline{\int}_{أ}^{ب} ق(س)\, د س$$

لهذا ومن النظرية ٤، نجد ان

$$٠ \leqslant \overline{\int}_{أ}^{ب} ق(س)\, د س - \underline{\int}_{أ}^{ب} ق(س)\, د س \leqslant ع(ج) - د(ج) < و.$$

وبما ان و عدد اختياري فان $\underline{\int}_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = \overline{\int}_{أ}^{ب} ق(س)\, د س$ واذن ق $\in$ ر[أ ، ب].

(٢) افرض ان ق $\in$ ر[أ ، ب] وخذ و > ٠. من تعريف (ص ح ع) و(ك ح د) فانه يوجد جَ ، جً بحيث ان

$$د(جَ) > \underline{\int}_{أ}^{ب} ق - \frac{و}{٢} = \int_{أ}^{ب} ق - \frac{و}{٢}،$$

$$ع(جً) < \overline{\int}_{أ}^{ب} ق + \frac{و}{٢} = \int_{أ}^{ب} ق + \frac{و}{٢}$$

اذا اخذنا ج = جَ $\cup$ جً فانه، وباستخدام الملاحظة المذكورة قبل النظرية ٣، ينتج ان

$$ع(ج) - د(ج) \leqslant ع(جً) - د(جَ) < و$$

اذن ج هي تجزئة مناسبة وهذا يثبت النظرية.

وهناك نمطان من الاقترانات القابلة للتكامل تظهر في النظرية التالية:

النظرية ٦.

(١) اذا كان ق متصلا على [أ ، ب] فان ق $\in$ ر[أ ، ب]، اي أن م[أ ، ب] $\subset$ ر[أ ، ب] والاحتواء فعلي.

(٢) اذا كان ق وتيريا على [أ ، ب] فان ق $\in$ ر[أ ، ب].

البرهان.

سوف نبرهن (١) ونترك (٢) كتمرين.

بما ان ق متصل على [أ ، ب] فانه يكون منتظم الاتصال (انظر الفصل ٦، البند ٤).

اذن لكل $\in$ > ٠ يوجد δ > ٠ بحيث ان | ق (س) − ق (ص) | < $\frac{\in}{\text{ب} - \text{أ}}$ اذا كان | ص − س | < δ وس ، ص $\in$ [أ ، ب].

اختر عددا طبيعيا ن > $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\delta}$ وعرّف س$_{ر}$ = أ + $\frac{\text{ر(ب} - \text{أ)}}{\text{ن}}$ لكل ٠ ≤ ر ≤ ن وافرض ان ج = { س$_{٠}$ ، . . . . ، س$_{ن}$ } . بما ان ق متصل فانه يوجد أ$_{ر}$ ، ب$_{ر}$ في فـ$_{ر}$ بحيث ان ق (أ$_{ر}$) = م$_{ر}$ ، ق (ب$_{ر}$) = مـ$_{ر}$.

لكن | أ$_{ر}$ − ب$_{ر}$ | ≤ س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$ = $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$ < δ . لهذا فان م$_{ر}$ − مـ$_{ر}$ = | ق (أ$_{ر}$) − ق (ب$_{ر}$) | < $\frac{\in}{\text{ب} - \text{أ}}$، ومنه

ع (ج) − د (ج) = $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}}$ (م$_{ر}$ − مـ$_{ر}$) (س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$) < $\in$ ،

وباخذ و = $\in$ في النظرية ٥، نحصل على ق $\in$ ر[أ ، ب] مما يثبت ان م [أ ، ب] $\subseteq$ ر[أ ، ب]. ولأثبات ان الاحتواء فعلي نعرف اقترانا غير متصل ق بـ ق (أ) = ٠ ، ق (س) = ١ لِـ أ < س ≤ ب.

نستخدم الآن النظرية ٥ لاثبات ان ق $\in$ ر[أ ، ب]. افرض ان و > ٠ واختر س$_{١}$ $\in$ (أ ، ب) بحيث ان أ < س$_{١}$ < أ + و. عرّف ج = { أ ، س$_{١}$ ، ب } . اذن م$_{١}$ = م$_{٢}$ = مـ$_{٢}$ = ١، مـ$_{١}$ = ٠ ومنه ع (ج) − د (ج) = س$_{١}$ − أ < و. لهذا فان ق $\in$ ر [أ ، ب] من النظرية ٥ . وهذا يثبت النظرية ٦ (١).

تمارين ١٠ ـ ١

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ احسب تكاملات نيوتن المحدودة التالية بايجاد إقترانات بدائية مناسبة .

(١) $\int^{١} |س|\, د س$ (٢) $\int^{١} س\ e^{س^٢}\, د س$

(٣) $\int_{٠}^{\pi^{-١}}$ جاس جتاس د س (٤) $\int_{e}^{٣} \frac{د س}{س\, لوس}$

(٥) $\int_{٠}^{١} \frac{د س}{(س + ١)\,(س + ٢)}$

٢ ـ افرض ان ق ، هـ قابلان للتفاضل على [أ ، ب] و هـ (س) > ٠ على [أ ، ب]. اثبت ان ق قَ و $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'$ ينتميان الى نيو[أ ، ب].

٣ ـ أثبت ان نيو[أ ، ب] هو فضاء خطي حقيقي وان الاقتران ل : نيو[أ ، ب] ⟵ R المعرف

بـ ل (ق) = $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س

هو خطي .

٤ ـ افرض ان ق ∈ نيو[أ ، ب] وان أ < حـ < ب . اثبت ان تحديد ق على [أ ، حـ] ينتمي الى نيو[أ ، حـ]، نكتب ق ∈ نيو[أ ، حـ]. كذلك ق ∈ نيو[حـ ، ب]. اثبت كذلك ان

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = $\int_{أ}^{حـ}$ ق (س) د س + $\int_{حـ}^{ب}$ ق (س) د س

حيث التكاملات هي تكاملات نيوتونية محدودة

٥ ـ التكامل بالاجزاء . افرض ان ق ، هـ قابلان للتفاضل على [أ ، ب] وان ق هَـ ∈ نيو[أ ، ب]، اثبت ان هـ قَ ∈ نيو[أ ، ب] وان :

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) هَـ (س) د س = [ق هـ]$_{أ}^{ب}$ − $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) قَ (س) د س.

حيث [ق هـ]$_{أ}^{ب}$ = (ق هـ) (ب) − (ق هـ) (أ).

طبق هذه المعادلة لايجاد قيمة

$\int_{أ}^{ب}$ لوس د س (ب > أ > ٠)؛ $\int_{-\pi}^{\pi}$ س^{٢} جتاس د س

٦ ـ عرّف ق : [أ ، ب] ← R بـ ق (أ) = ٠ وَق (س) = ١ لِـ أ > س ⩾ ب. اثبت ان ق ∌ نيو[أ ، ب].

٧ ـ عرف ق : [٠ ، ١] ← R بـ ق (٠) = ٠ وَق (س) = جا $\frac{١}{س}$ لِـ ٠ > س ⩾ ١. اثبت ان ق ∋ نيـو[٠ ، ١] ∩ ر[٠ ، ١]، ولكن ق ∌ م[٠ ، ١]. ارشـاد:

ادرس س^{٢} جتـا $\frac{١}{س}$ لِـ ٠ > س ⩾ ١، واستخدم م[٠ ، ١] ⊂ نيو[٠ ، ١].

٨ ـ اذا كان ق : [أ ، ب] ← R متزايدا على [أ ، ب]. فاثبت ان ق ∋ ر[أ ، ب]. اثبت نتيجة مماثلة بالنسبة للاقترانات المتناقصة. [اذا كان ق متزايدا فان مـ$_{ر}$ = ق (س$_{ر-١}$)، م$_{ر}$ = ق (س$_{ر}$)، استخدم النظرية ٥].

٩ ـ عرّف ق : [٠ ، ١] ← R بـ ق (٠) = ٠، ق (س) = [س$^{-١}$]$^{-١}$ لِـ ٠ > س ⩾ ١، حيث [ص] ترمز الى اكبر عدد صحيح في ص. اثبت ان ق ∋ ر[٠ ، ١].

١٠ ـ [متباينة شوارتس]. افرض ان ق^{٢} ، ق هـ، هـ^{٢} تنتمي الى نيو[أ ، ب] وان ق^{٢} (س) > ٠ على (أ ، ب). فبدراسة

$\int_{أ}^{ب}$ (حـ ق (س) + هـ (س))^{٢} د س

واخذ قيمة مناسبة لِـ حـ ∋ R ، اثبت متباينة شوارتس

$$\left(\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (س) هـ (س) د س}\right)^{2} \leqslant \left(\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}^{2}\text{ (س) د س}\right)\left(\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}^{2}\text{ (س) د س}\right)$$

استنتج ان

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}}\ \text{د س} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

١١ ـ افرض ان ق ، | ق | ينتميان الى نيو[أ ، ب]. استخدم الحقيقة − | ق (س) | $\leqslant$ ق (س) $\leqslant$ | ق (س) | على [أ ، ب] لاثبات ان

$$\left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (س) د س}\right| \leqslant \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق (س)}|\ \text{د س}.$$

هذه المتباينة هي في التكامل مثيلة المتباينة المثلثية للمجموع

$$\left|\sum \text{أ}_{\text{ر}}\right| \leqslant \sum |\text{أ}_{\text{ر}}|.$$

فاذا كان ب > أ > ٠ ، استخدم التكامل بالاجزاء والمتباينة السابقة لاثبات ان

$$\left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}\ \text{د س}\right| \leqslant \frac{٢}{\text{أ}}.$$

٢ . خواص التكامل

اذا اعتبرنا التكامل مساحة تحت المنحنى ص = ق (س) فان النظرية التالية تكون واضحة هندسيا. وهي ذات فائدة عملية كبيرة لاننا كثيرا ما نود ان نقسم التكامل الى مجموع من التكاملات على فترات اصغر. نذكر هنا ان العبارة «ق $\in$ ر[أ ، حـ]» تعني ان «تحديد ق على [أ ، حـ] هو قابل للتكامل على طريقة ريمان على [أ ، حـ]». وكذلك بالنسبة الى ر[حـ ، ب].

النظرية ٧ .

افرض ان ق $\in$ ر[أ ، ب] وأ $<$ حـ $<$ ب. اذن ق $\in$ ر[أ ، حـ] وَق $\in$ ر[حـ ، ب] وَ

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} + \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}.$$

البرهان .

افرض ان و $>$ ٠ . فباستخدام النظرية ٥ فانه يوجد ج بحيث ان ع (ج) − د (ج) $<$ و.

افرض ان جَ = ج $\cup$ { حـ } = $\text{ج}_1 \cup \text{ج}_2$ حيث ج_1 هي تجزئة لِـ[أ ، حـ] وج_2 هي تجزئة لِـ [حـ ، ب]. اذن ع (ج_1) − د $(\text{ج}_1) \leqslant$ ع (جَ) − د (جَ) $<$ و. اذن ق $\in$ ر[أ ، حـ] حسب النظرية ٥ . كذلك ق $\in$ ر[حـ ، ب].

الآن ق $\in$ ر[أ ، حـ] تتضمن ان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = \int_{\text{أ}}^{*\text{حـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = (\text{ك.ح.د})_{\text{ج}}\,(\text{ع}(\text{ج}))$$ للتجزئات ج على [أ ،

حـ]. اذن يوجد ج_3 لِـ[أ ، حـ] وبطريقة مشابهة ج_4 على [حـ ، ب] بحيث ان

$$\text{ع}(\text{ج}_3) < \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} + \text{و}،$$

وكذلك $$\text{ع}(\text{ج}_4) < \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} + \text{و}.$$

ولكن $\text{ج}_3 \cup \text{ج}_4$ هي تجزئة لِـ[أ ، ب] واذن

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \leqslant \text{ع}(\text{ج}_3 \cup \text{ج}_4) = \text{ع}(\text{ج}_3) + \text{ع}(\text{ج}_4)$ وبما ان و اختياري ، فاننا نحصل على

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \leqslant \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} + \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}.$$

وباستخدام المجاميع السفلى نحصل على المتباينة العكسية. وهذا يثبت النظرية.

والنظرية التالية توضح الخواص الخطية لتكامل ريمان، وكالعادة، نعرف ق + هـ بالصيغة:

(ق + هـ) (س) = ق (س) + هـ (س)، وحـ ق بالصيغة:

(حـ ق) (س) = حـ. ق (س) لكل حـ ∋ R .

النظرية ٨.

ر[أ ، ب] فضاء خطي. كذلك اذا كان ق ، هـ ∋ ر[أ ، ب] وحـ ∋ R فان

$$\int_{أ}^{ب} \{ق (س) + هـ (س)\} د س = \int_{أ}^{ب} ق (س) د س + \int_{أ}^{ب} هـ (س) د س$$

كذلك

$$\int_{أ}^{ب} حـ ق (س) د س = حـ \int_{أ}^{ب} ق (س) د س.$$

البرهان.

للتبسيط فسوف نختصر الرموز بالطريقة الواضحة: اذا كان و > ٠ فانه يوجد ج ، جَ بحيث ان

ع (ج ، ق) < $\underline{\int}$ ق + و ، ع (جَ ، هـ) < $\underline{\int}$ هـ + و.

افرض ان جً = ج ∪ جَ، فيكون

ع (جً ، ق) < $\underline{\int}$ ق + و ، ع (جً ، هـ) < $\underline{\int}$ هـ + و.

الآن اذا كان س ∋ [س $_{ر-١}$ ، س $_{ر}$] فان

ص.ح.ع (ق + هـ) ≥ ص.ح.ع ق + ص.ح.ع هـ واذن

ع (جً ، ق + هـ) = $\sum$ (ص.ح.ع) (ق + هـ) (س $_{ر}$ − س $_{ر-١}$)

≥ $\sum$ (ص ح ع ق + ص ح ع هـ) (س $_{ر}$ − س $_{ر-1}$)

= ع (جً ، ق) + ع (جً ، هـ).

ومنه $\int^{*}$ (ق + هـ) ≥ ع (جً ، ق + هـ) < $\int$ ق + $\int$ هـ + ٢ و، واذن

$\int^{*}$ (ق + هـ) ≥ $\int$ ق + $\int$ هـ. . . . . (١٦)

وباستخدام المجاميع السفلى نجد ان

$\int$ ق + $\int$ هـ ≥ $\int_{*}$ (ق + هـ) . . . . (١٧)

ولكن $\int_{*}$ (ق + هـ) ≥ $\int^{*}$ (ق + هـ)، اذن من (١٦) و (١٧) نحصل على

$\int$ (ق + هـ) = $\int_{*}$ (ق + هـ) = $\int^{*}$ (ق + هـ) = $\int$ ق + $\int$ هـ.

ومثله برهان $\int$ حـ ق = حـ $\int$ ق. ويجب معالجة الحالتين حـ ≥ ٠ وحـ < ٠، كلا على حدة، باستخدام ص ح ع (حـ ق) = حـ (ص ح ع) ق، وك ح د (حـ ق) = حـ (ك ح د) ق اذا كان حـ ≥ ٠؛ وص ح ع (حـ ق) = حـ (ك ح د) ق، ك ح د (حـ ق) = حـ (ص ح ع) ق اذا كان حـ < ٠.

نتيجة.

اذا كان ق ، هـ ∈ ر [أ ، ب] وكان ق (س) ≥ هـ (س) على [أ ، ب] فان

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س ≥ $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) د س . . . . (١٨)

البرهان.

هذه النتيجة هامة وتمكننا من اخذ تكامل طرفي المتباينة.

لبرهنتهـا نلاحـظ ان ق (س) − هـ (س) ⩾ ٠ على [أ ، ب]. فبـاستخدام النظرية ٨ نحصل على ان ق − هـ قابل للتكامل ومن النظرية ٤ نحصل على

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) - هـ(س)) \geqslant ٠ (ب - أ) \geqslant ٠،$$

وهذا يثبت النتيجة.

المثال ٤.

اذا كان س > ٠ فان

$$\int_{٠}^{س} e^{-ص^{٢}} د ص \leqslant ظا^{-١} س: \quad \ldots \quad (١٩)$$

لبرهنة ذلك نستخدم النتيجة التي سنثبتها فيما بعد وهي ان تكامل ريمان وتكامل نيوتن يتساويان في الاقــترانــات المتصلة. الآن لِـ ٠ ⩾ ص ⩾ س فان $e^{-ص^{٢}} \leqslant (١ + ص^{٢})^{-١}$ لهذا ومن (١٨) والحقيقة ان $\int_{٠}^{س} (١ + ص^{٢})^{-١} د ص = ظا^{-١}$ س نحصل على (١٩).

النظرية ٩.

اذا كان ق ∋ ر[أ ، ب] فانه |ق| ∋ ر[أ ، ب]وَ

$$\left| \int_{أ}^{ب} ق(س) د س \right| \leqslant \int_{أ}^{ب} |ق(س)| د س \quad \ldots \quad (٢٠)$$

البرهان.

من النظرية ٥ يوجد ج بحيث ان ع (ج ، ق) − د (ج ، ق) < و. لاثبات ان |ق| ∋ ر[أ ، ب] يكفي ان نثبت ان

$$ص_{ح،ع} |ق(س)| - ك_{ح،د} |ق(س)| \leqslant ص_{ح،ع} (ق(س) - ك_{ح،د} (ق(س)) \quad \ldots \quad (٢١)$$

حيث الحدود (العليا والسفلى) مأخوذة على س ∋ [س ر-١ ، س ر]. ولكن (٢١) تنتج مباشرة من |ق (س)| ≥ |ق (س) - ق (ص)| + |ق (ص)| لاي س ، ص ∋ [س ر-١ ، س ر] وبأخذ الحالات ق (س) ≤ ق (ص) وق (س) > ق (ص).

فمن (٢١) نحصل على ع (ج ، |ق|) - د (ج ، |ق|) > و. اذن |ق| ∋ ر[أ ، ب]، حسب النظرية ٥. ونحصل على المتباينة (٢٠) من (١٨) مع ملاحظة ان - |ق (س)| ≥ ق (س) ≥ |ق (س)| لأي أ ≥ س ≥ ب

المثال ٥.

في التحليل العقدي (المركب) في نظرية جوردان، تظهر تكاملات على الصورة

ل (ع) = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا (ع جتا θ) سا (-ع جا θ) د θ ، حيث ع > ٠ ، حيث نريد ان نعرف سلوك ل (ع) عندما ع ← ∞ .

سوف نستخدم النظرية ٩ لاثبات ان ل (ع) ← ٠ عندما ع ← ∞ .

الآن |جتا (ع جتا θ)| ≥ ١ لأي θ ، ع وسا (-ع جا θ) > ٠ ، لهذا فان

|ل (ع)| ≥ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ سا (-ع جا θ) د θ .

فمن متباينة جوردان (التمارين ٩ ـ ٢) ومن الحقيقة ان الاقتران الاسي متزايد نحصل على

سا (-ع جا θ) ≥ سا ($\frac{-2\theta ع}{\pi}$) لِـ θ ∋ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]. اذن

|ل (ع)| ≥ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ سا ($\frac{-2\theta ع}{\pi}$) د θ .

اذا كان ك (θ) = $\frac{-\pi}{2ع}$ {سا ($\frac{-2\theta ع}{\pi}$)} فان كَ (θ) = سا ($\frac{-2\theta ع}{\pi}$)

على [٠ ، ٢π]، لهذا وبفرض تساوي تكاملي ريمان ونيوتن على الاقترانات المتصلة نحصل على :

$$| ل(ع) | \leqslant ك(\frac{\pi}{2}) - ك(0) = \frac{\pi \quad (1 - e^{-})}{ع^2} < \frac{\pi}{ع^2}.$$

من هذا ينتج ان ل (ع) ← ٠ (ع ← ∞).

تمارين ١٠ ـ ٢

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ افرض ان ق : [أ ، ب] ← R متصل ويحقق ق (س) $\geqslant$ ٠ على [أ ، ب]. اذا كان

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = ٠ فاثبت ان ق (س) = ٠ لكل س ∈ [أ ، ب].

٢ ـ اذا كان ق ، هـ ∈ ر[أ ، ب] فاثبت ان ق هـ ∈ ر[أ ، ب].

٣ ـ اثبت ان $\frac{1}{4\sqrt{2}} \leqslant \int_{0}^{1} \frac{س^3}{\sqrt{1 + س^2}}$ د س $\leqslant \frac{1}{4}$.

٤ ـ اعط مثالا لاقتران ق : [أ ، ب] ← R بحيث ان | ق | ∈ ر[أ ، ب] ولكن ق ∉ ر[أ ، ب].

٥ ـ اذا كان −١ < أ < ٠ و ن ∈ N فاثبت ان

$\int_{أ}^{0} \frac{س^ن}{1 + س}$ د س ← ٠ (ن ← ∞).

٦ ـ افرض ان ق: $R^+ \times [0 ، \frac{\pi}{2}] \to R$ ، وافرض ان $\frac{ق(ل ، \theta)}{ل}$ ← ٠ عندما ل ← ∞ بانتظام في θ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]. وهذا يعني انه لكل ∈ > ٠ يوجد ل. = ل. (∈) تعتمد على ∈ فقط وليس على θ. بحيث ان $\left| \frac{ق(ل ، \theta)}{ل} \right| <$ ∈ لكل ل > ل. و θ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]. افرض ان ق قابل للتكامل، اثبت ان

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ق (ل ، θ) سا (−ل حا θ) د θ ← ٠ (ل ← ∞).

٧ ـ ناقش تقارب المتتاليتين (أ ن) ،(ب ن) حيث

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \int_{\circ}^{\pi} \text{جا (ن س) د س و ب}_{\text{ن}} = \int_{\circ}^{\pi} |\text{جا (ن س)}| \text{ د س}.$$

٨ ـ [نظرية القيمة الوسطى الاولى للتكامل].

اذا كان ق ∋ م [أ ، ب] وهـ ∋ ر[أ ، ب] وكان هـ (س) ≥ ٠ لِـ أ ≤ س ≤ ب ، فاثبت انه يوجد حـ ∋ [أ ، ب] بحيث ان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (س) هـ (س) د س} = \text{ق (حـ)} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ (س) د س}$$

(ارشاد: لاحظ ان ق (و) ≤ ق (س) ≤ ق (ي) لِـ و ، ي ∋ [أ ، ب] ولكل س ∋ [أ ، ب]. اضرب طرفي المعادلة بِـ هـ (س) ثم كامل.

٩ ـ [نظرية القيمة الوسطى الثانية للتكامل].

اذا كان ق متزايدا على [أ ، ب] وكان هـ ∋ ر[أ ، ب] بحيث ان هـ(ص) ≥ ٠ لِـ أ ≤ ص ≤ ب فاثبت انه يوجد حـ ∋ [أ ، ب] بحيث ان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (ص) هـ (ص) د ص} = \text{ق (أ)} \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{هـ (ص) د ص} + \text{ق (ب)} \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{هـ (ص) د ص}.$$

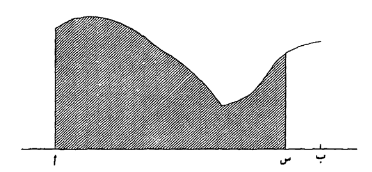
(ارشاد: عرِّف ك (أ) = ٠ وَك (س) = $\int_{\text{أ}}^{\text{س}}$ هـ (ص) د ص لِـ أ < س ≤ ب ، اثبت ان ك ∋ م [أ ، ب].)

٣. التكامل كاقتران لنهايته العليا

اذا كان ق ∋ ر[أ ، ب] فان ق ∋ ر[أ ، س] لِـ أ < س ≤ ب ، حسب النظرية ٧. لهذا فانه يمكن اعتبار تكامل ريمان اقترانا متغيِّرهُ النهاية العليا ، وذلك بان نعرف

$$\text{ك (س)} = \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{ق (ص) د ص ، أ} \leq \text{س} \leq \text{ب} \quad \text{. . . . .} \quad (٢٢)$$

ونتعارف على ان كَ (أ) = ٠ . واذا نظرنا الى التكامل على انه مساحة تحت المنحنى ص = ق (س) فان المساحة المظللة في الشكل تمثل كَ (س) :



سوف نستخدم (٢٢) لاثبات ان كَ (س) = ق (س) عندما يكون ق متصلا على [أ ، ب]. ان هذه النتيجة تعرف باسم «النظرية الاساسية في التكامل» وهي تمكننا من اثبات ان تكاملي ريمان ونيوتن المحددين يتساويان على الاقترانات المتصلة.

كذلك تستخدم النظرية الاساسية لايجاد طريقتين هامتين من طرق التكامل هما «التكامل بالاجزاء» و«التكامل بالتعويض».

بالنسبة لتكامل ريمان فقد كاملنا الى الآن على فترات مغلقة [أ ، ب] حيث أ < ب. وسنعطي تعريفا يجعل بالامكان اخذ اي عددين حقيقيين كنهايتين للتكامل.

اذا كان ق ∈ ر[أ ، ب] حيث أ < ب فاننا نعرف

$$\int_{أ}^{أ} ق\,(س)\,د\,س = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢٣)$$

$$\int_{ب}^{أ} ق\,(س)\,د\,س = - \int_{أ}^{ب} ق\,(س)\,د\,س \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢٤)$$

المثال ٦.

افرض ان ق ∈ ر[أ ، ب]، حيث أ < ب. اذن اذا كان أ < حـ < ب فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = \int_{أ}^{ح} ق(س)\, د س + \int_{ح}^{ب} ق(س)\, د س \quad \ldots\ldots (٢٥)$$

لاثبات (٢٥) استخدم النظرية (٧) مع (٢٤):

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = \int_{أ}^{ح} ق(س)\, د س + \int_{ح}^{ب} ق(س)\, د س = \int_{أ}^{ح} ق(س)\, د س -$$

$$\int_{ب}^{ح} ق(س)\, د س$$

وهذا يعطي (٢٥).

النظرية ١٠.

اذا كان ق $\in$ ر[أ ، ب] فان ك المعرف في (٢٢) يكون متصلا على [أ ، ب].

البرهان.

افرض ان حـ $\in$ [أ ، ب] وس $\in$ [أ ، ب]. اذن

$$ك(س) - ك(حـ) = \int_{حـ}^{س} ق(ص)\, د ص \quad \ldots\ldots (٢٦)$$

لِـ س $\geqslant$ حـ أو س $<$ حـ. بما ان ق $\in$ ر[أ ، ب] فان ق يكون محصورا ومنه $|ق(ص)| \leqslant$ م لكل أ $\leqslant$ ص $\leqslant$ ب. من (٢٦) اذا كان س $\geqslant$ حـ فان

$$|ك(س) - ك(حـ)| \leqslant \int_{حـ}^{س} |ق(ص)|\, د ص \leqslant \int_{حـ}^{س} م\, د ص = م(س - حـ)،$$

واذا كان س $<$ حـ فان $|ك(س) - ك(حـ)| \leqslant$ م (حـ $-$ س). ففي كلتا الحالتين نحصل على $|ك(س) - ك(حـ)| \leqslant$ م $|س - حـ|$.

فاذا كان $\epsilon > 0$ فانه يوجد $\delta = \frac{\epsilon}{م + ١}$ بحيث ان $|س - حـ| < \delta$ تعطي $|ك(س) - ك(حـ)| < \epsilon$. اذن ك متصل على حـ، وهذا يثبت النظرية.

والنظرية التالية تبين انه اذا كان ق $\in$ ر[أ ، ب] متصلا عند نقطة حـ $\in$ [أ ، ب] فان

ك لا يكون متصلا فقط عند حـ بل يكون قابلا للاشتقاق عندها ايضا .

النظرية ١١ [النظرية الاساسية للتكامل].

افرض ان ق $\in$ ر[أ ، ب] ، ق متصل على حـ $\in$ [أ ، ب]. اذن كَ (حـ) = ق (حـ) أي انه في تكامل ريمان يكون

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}} \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{ق (ص) د ص} = \text{ق (س)}$$

على كل نقطة يكون ق عندها متصلا .

البرهان .

من اتصال ق عند حـ، اذا كان $\epsilon > 0$ فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان |ق (ص) − ق (حـ)| $< \epsilon$ اذا كان |ص − حـ| $< \delta$ وص $\in$ [أ ، ب]. افرض ان و يحقق ٠ < |و| $< \delta$ وكذلك حـ + و $\in$ [أ ، ب]. اذن

$$\text{ك (حـ + و) − ك (حـ)} = \int_{\text{حـ}}^{\text{حـ + و}} \text{ق (ص) د ص} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٧)$$

الآن ص $\in$ [حـ ، حـ + و] أو ص $\in$ [حـ + و ، حـ] تعطي |ص − حـ| $\leq$ |و| $< \delta$ ، اذن ق (حـ) − $\epsilon <$ ق (ص) $<$ ق (حـ) + ϵ. وبمكاملة اطراف المتباينة نرى من (٢٧) انه عندما يكون ٠ < |و| $< \delta$ ، فان

$$\left| \frac{\text{ك (حـ + و) − ك (حـ)}}{\text{و}} - \text{ق (حـ)} \right| < \epsilon \text{ ،}$$

مما يعطي ان كَ (حـ) = ق (حـ). وهذا يثبت النظرية .

النظرية ١٢ .

افرض ان ق ∋ م [أ ، ب] اي ق متصل على كل س ∋ [أ ، ب]. اذن يكون تكامل ريمان وتكامل نيوتن المحدود موجودين ومتساويين في القيمة .

البرهان .

بما ان ق ∋ م [أ ، ب] فان ق ∋ ر [أ ، ب] من النظرية ٦ (١). اذن تكامل ريمان

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س موجود .

ومن نظرية ١١ ، وبما ان ق متصل على كل س ∋ [أ ، ب] فان كَ (س) = ق (س) لكل س ∋ [أ ، ب]. ومن تعريف تكامل نيوتن المحدود فان تكامل نيوتن المحدود موجود ويساوي ك (ب) − ك (أ). ولكن ك (أ) = ٠ من (٢٣)، اذن (٢٢) تعطي

$$\text{نيو} \int_{أ}^{ب} ق (س)\, د س = ك (ب) = \int_{أ}^{ب} ق (س)\, د س$$

مما يثبت النتيجة .

وباستخدام النظرية ١٢ ، نرى ان نتائج المثال (١) صحيحة لتكامل ريمان كما هي صحيحة لتكامل نيوتن لان الاقتران المكامل اقتران متصل .

المثال ٧ .

افرض ان حـ ≠ ٠ وعرف

$$ك (س) = \frac{١}{٢حـ^٢} \left(\frac{س}{س^٢ + حـ^٢} + \frac{١}{حـ} ظا^{-١} \frac{س}{حـ} \right)$$

على اي فترة مغلقة [أ ، ب]. اذن

$$كَ (س) = \frac{١}{٢حـ^٢} \left(\frac{١}{س^٢ + حـ^٢} - \frac{٢ س^٢}{(س^٢ + حـ^٢)^٢} + \frac{١}{س^٢ + حـ^٢} \right) = \frac{١}{(س^٢ + حـ^٢)^٢} .$$

اذن ، ففي كل من تكامل نيوتن وتكامل ريمان ،

$$\int_{أ}^{ب} \frac{د س}{(س^{٢} + جـ^{٢})^{٢}} = ك (ب) - ك (أ) .$$

في مباديء التحليل عادة تكون الاقترانات التي يطلب ايجاد تكاملها اقترانات متصلة ، لهذا وعلى ضوء النظرية ١١ فانه لا فرق بين استخدام تكامل نيوتن أو تكامل ريمان . فعندما نكتب $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س بعد الآن فاننا سنعني تكامل ريمان الا اذا ذكرنا غير ذلك .

وبالنسبة لطرق التكامل العملية فان النتيجة التالية ذات اهمية كبرى .

النظرية ١٣ .

اذا كان ق : [أ ، ب] ⟵ R وكان قَ متصلا على [أ ، ب] فان

$$\int_{أ}^{ب} قَ (ص) د ص = ق (ب) - ق (أ) = [ق (ص)]_{أ}^{ب} \quad . . . . (٢٨)$$

البرهان .

الصيغة في القوس المربع هي طريقة شائعة في كتابة ق (ب) - ق (أ) وهي مفيدة عندما يكون ق (ص) معقدا ويوفر علينا كتابة صيغتين معقدتين لِـ ق (ب) وق (أ) .

ولاثبات (٢٨) نأخذ مشتقة العبارة

$$هـ (س) = \int_{أ}^{س} قَ (ص) د ص - ق (س)$$

ونجد ان هَـ (س) = ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]، حسب النظرية ١١ . اذن هـ (س) = هـ (أ) لكل س ∈ [أ ، ب] ومنه هـ (ب) = هـ (أ) مما يثبت (٢٨) .

المثال ٨ .

احسب $\int_{أ}^{ب}$ ص^٢ د ص . في اسئلة سهلة كهـذا يمكن ان نحزر الاقتران البدائي ونستخدم النظرية ١٣ :

$$\int_{أ}^{ب} ص^٢ \, د ص = \int_{أ}^{ب} \left(\frac{ص^٣}{٣}\right)' د ص = \left[\frac{ص^٣}{٣}\right]_{أ}^{ب} = \frac{ب^٣ - أ^٣}{٣} .$$

في العديد من التكاملات السهلة مثل $\int_{أ}^{ب}$ س جاس د س يكون من الصعب معرفة الاقتران البدائي . لهذا نستخدم التكامل بالاجزاء .

النظرية ١٤ . [التكامل بالاجزاء] .

اذا كان قَ ، هَـ متصلين على [أ ، ب] فان

$$\int_{أ}^{ب} ق هَـ = [ق هـ]_{أ}^{ب} - \int_{أ}^{ب} هـ قَ .$$

البرهان:

باستخدام النظرية ٢ (٢)، في الفصل ٧، ق (هـ)َ = ق هَـ + هـ قَ اذن (ق هـ)َ متصل . ونحصل على النتيجة المطلوبة من النظرية ١٣ والنظرية ٨ .

المثال ٩ .

لايجاد قيمة $\int_{أ}^{ب}$ س جاس د س نأخذ ق (س) = س، هـ (س) = −جتاس، في النظرية ١٤ ، خصوصا لأن قَ اسهل من ق . اذن $\int_{أ}^{ب}$ س جاس د س = [−س جتاس]$_{أ}^{ب}$ + $\int_{أ}^{ب}$ جتاس د س = [−س جتاس + جاس]$_{أ}^{ب}$.

ويمكن التأكد من صحة هذه النتيجة بملاحظة ان د(−س جتاس + جاس) = س جاس.

المثال ١٠.

احسب قيمة ل = $\int_{أ}^{ب}$ e^س جاس د س : نكامل بالاجزاء ونحصل على

ل = −e^س جتاس + $\int$ e^س جتاس د س = −e^س جتاس + e^س جاس − $\int$ e^س جاس د س، اذن

٢ل = e^س (جاس − جتاس).

للتأكد: د(e^س (جاس − جتاس)) = e^س (جتاس + جاس) + e^س (جاس − جتاس) = ٢ e^س جاس. لهذا فان

$\int_{أ}^{ب}$ e^س جاس د س = $[\frac{e^{س}}{٢}$ (جاس − جتاس)$]_{أ}^{ب}$

المثال ١١:

تفيدنا الصيغة التالية في اثبات نظرية سترلنج.

ل$_{ن}$ = $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا^{ن} س د س = $\frac{\pi}{٢}$. $\frac{١}{٢}$. $\frac{٣}{٤}$ . . . . $\frac{ن-١}{ن}$ (اذا كان ن = ٢، ٤، ٦، . . .) .

= $\frac{٢}{٣}$. $\frac{٤}{٥}$. $\frac{٦}{٧}$ . . . . $\frac{ن-١}{ن}$ اذا كان ن = ٣، ٥، ٧، . . .

لايضاح ذلك نأخذ، في النظرية ١٤، ن ≥ ٢، ق (س) = جا$^{ن-١}$ س، هـ (س) = −جتاس، فنحصل على:

$$ل_{ن} = [-جا^{ن-1} س \; جتاس]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (ن - 1) \; جتا^{2} س \; جا^{ن-2} س \; د س$$

$$= (ن - 1) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - جا^{2} س) \; جا^{ن-2} س \; د س$$

$$= (ن - 1) \; (ل_{ن-2} - ل_{ن}).$$

اذن $ل_{ن} = \frac{ن - 1}{ن} ل_{ن-2}$، ومنه نحصل على النتيجة المطلوبة. على سبيل المثال:

اذا كان $م \in N$

$$ل_{2م} = \frac{2م - 1}{2م} ل_{2م-2} = \frac{2م - 1}{2م} \cdot \frac{2م - 3}{2م - 2} ل_{2م-4}$$

$$= \frac{2م - 1}{2م} \cdot \frac{2م - 3}{2م - 2} \cdots \frac{1}{2} ل_{0}$$

$$وَل_{0} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{0} س \; د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} د س = \frac{\pi}{2}.$$

وتتعلق النتيجة التالية بشكل من اشكال التكامل بالاجزاء، لكن ليس في فرضيتها ذكر لقابلية التفاضل.

النظرية ١٥.

افرض أن ق ، هـ $\in$ ر[أ ، ب] وَك (س) = $\int_{أ}^{س} ق$ ، ل (س) = $\int_{أ}^{س} هـ$. اذن $\int_{أ}^{ب} ق \; ل = [ك \; ل]_{أ}^{ب} - \int_{أ}^{ب} هـ \; ك$.

البرهان.

خذ اي تجزئة ج لِـ [أ ، ب]، وافرض ان الجمع يكون لكل $1 \leq ر \leq ن$.

اذن $[ك \; ل]_{أ}^{ب}$ يساوي:

$$\sum \{ ك(س_ر)\, ل(س_ر) - ك(س_{ر-1})\, ل(س_{ر-1}) \}$$

$$= \sum ل(س_ر) \int_{س_{ر-1}}^{س_ر} ق + \sum ك(س_{ر-1}) \int_{س_{ر-1}}^{س_ر} هـ$$

$$= \int_{أ}^{ب} ل\, ق + \int_{أ}^{ب} هـ\, ك + \sum \int_{س_{ر-1}}^{س_ر} \{ ل(س_ر) - ل(س) \}\, ق$$

$$+ \sum \int_{س_{ر-1}}^{س_ر} \{ ك(س_{ر-1}) - ك(س) \}\, هـ$$

$= ح_1 + ح_2 + ح_3 + ح_4$، مثلا . . . . (٢٩)

من النظرية ١٠، فان ك ، ل متصلان على [أ ، ب]، اذن هما منتظما الاتصال، لهذا اذا كان $\epsilon > 0$ فانه يوجد $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ بحيث ان $|ك(س) - ك(ص)| < \epsilon$ و $|ل(س) - ل(ص)| < \epsilon$ اذا كان $|س - ص| < \delta$. خذ ج بحيث ان

كب $\{ |س_ر - س_{ر-1}| \} < \delta$ ، حيث أكبر حد مأخوذ على $1 \leq ر \leq ن$. اذن

$|ح_3| \leq \sum \int_{س_{ر-1}}^{س_ر} \epsilon |ق| = \epsilon \int_{أ}^{ب} |ق|$ ، وكذلك $|ح_4| \leq \epsilon \int_{أ}^{ب} |هـ|$.

ثم نحصل على النتيجة من (٢٩).

ان طريقة التعويض التي سنناقشها الآن تفيد في تبسيط التكاملات وايجاد قيمها. ولكن لسوء الحظ فانه لا توجد قاعدة ذهبية لاختيار الاقترانات المناسبة لتعويضها، ولكن النجاح يأتي عادة بالتمرين.

والفكرة الاساسية هي ايجاد اقتران $س = ق(ص)$ بحيث انه عند تعويضه في $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س$ ينتج تكاملا معروفا أو سهلا.

على سبيل المثال ـ ودون مراعاة الدقة في الوقت الحاضر ـ افرض اننا نريد ايجاد قيمة

$$ل = \int_{0}^{أ} \sqrt{أ^2 - س^2}\, د س$$

حيث أ < ٠. أمّا هندسياً ، فان ل تمثل المساحة تحت ربع الدائرة التي نصف قطرها أ ، لهذا فاننا نتوقع ان يكون ل = $\frac{\pi أ^2}{٤}$.

بما ان جا^{2}ص = ١ − جتا^{2}ص فاننا نحاول وضع س = أ جتاص حيث ٠ ≥ ص ≥ $\frac{\pi}{٢}$. اذن $\sqrt{أ^2 - س^2}$ = أجاص، ص = $\frac{\pi}{٢}$ عندما س = ٠ ، ص = ٠ عندما س = أ .

اذن

$$ل = \int_{\frac{\pi}{٢}}^{٠} أجاص \cdot \frac{د س}{د ص} \cdot د ص = - \int_{\frac{\pi}{٢}}^{٠} أ^2 جا^2 ص د ص$$

$$= أ^2 \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا^2 ص د ص .$$

لكن التكامل الأخير يساوي $\frac{\pi}{٢} \cdot \frac{١}{٢} = \frac{\pi}{٤}$ ، من المثال ١١ . اذن ل = $\frac{\pi أ^2}{٤}$ كما توقعنا .

والنظرية التالية تسبغ على هذه الافكار بعض الدقة .

النظرية ١٦ [التعويض].

افرض ان ف = [أ ، ب] وهـ : ف ⟵ R . افرض كذلك أن

(١) هَـ متصل على ف

(٢) ق متصل على هـ (ف)

اذن

$$\int_{هـ(أ)}^{هـ(ب)} ق(س) د س = \int_{أ}^{ب} ق(هـ(ص)) هَـ(ص) د ص .$$

البرهان.

لأي عدد حقيقي ع اكتب

$$\text{ل}(\text{ع}) = \int_{\text{أ}}^{\text{ع}} \text{ق}(\text{هـ}(\text{ص}))\,\text{هَـ}(\text{ص})\,\text{د ص} - \int_{\text{هـ}(\text{أ})}^{\text{هـ}(\text{ع})} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \quad . \; . \; . \; . \quad (٣٠)$$

اذن ل : [أ ، ب] ← R صحيح التعريف لان الاقتران المكامل متصل. فمن النظرية الاساسية في التكامل وقاعدة تفاضل اقتران الاقتران نحصل على

$$\text{لَ}(\text{ع}) = \text{ق}(\text{هـ}(\text{ع}))\,\text{هَـ}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{هـ}(\text{ع}))\,\text{هَـ}(\text{ع}) = ٠$$

اذن ل ثابت على [أ ، ب]. ونحصل على النتيجة المطلوبة بوضع ع = ب في (٣٠).

المثال ١٢.

احسب قيمة

$$\text{أ} = \int_{١}^{e} \frac{\text{لوس}}{\text{س}\sqrt{١ + \text{لوس}}}\,\text{د س}.$$

بالتعويض.

من الطبيعي ان نحاول ص = ١ + لوس، اي س = $e^{(\text{ص}-١)}$. اذن نعرف هـ (ص) = $e^{(\text{ص}-١)}$ لكل ص ∈ ف = [١ ، ٢]. اذن هـ (ف) = [$e^{٠}$ ، $e^{١}$] = [١ ، e] والاقتران المكامل أ متصل على هـ (ف). كذلك هَـ (ص) = $e^{(\text{ص}-١)}$ متصل على ف، اذن من النظرية ١٦ نحصل على

$$\text{أ} = \int_{١}^{٢} \frac{\text{ص} - ١}{e^{(\text{ص}-١)}\sqrt{\text{ص}}}\, e^{(\text{ص}-١)}\,\text{د ص} = \int_{١}^{٢} \frac{\text{ص} - ١}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{د ص} = \left[\frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} - ٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\right]_{١}^{٢}$$

ويمكن ايجاد قيمتها اذا شئنا.

ان النقـاش المـذكـور اعلاه ضروري لايجاد النتيجة ولكن يكون اسهل احيانا ان نجري النقاش بشكل منظم كما يلي: افرض ان ص = ١ + لوس، اذن د ص = $\frac{د س}{س}$. فعند س = ١ يكون ص = ١ وعند س = e يكون ص = ٢ . اذن

$$أ = \int_{1}^{e} \frac{لوس}{\sqrt{1 + لوس}} \cdot \frac{د س}{س} = \int_{1}^{2} \frac{ص - 1}{\sqrt{ص}} \; د ص .$$

وهـذه نفس النتيجـة السـابقة، وهذا النوع من الحل يعطي عادة نتائج صحيحة. الا أن الخطر الحقيقي ان التعـويض قد يستعمـل ويكـون لا معنى له تحليليـا ولكنـه يعطي نتـائـج قد تكون خاطئة. على سبيل المثال اذا اخذنا هـ (ص) = $ص^{-1}$ في ف التي تحوي الصفر فاننا نتوقع ان لا يكون هناك معنى لما نحصل عليه لان هـ غير معرف على الصفر. انظر السؤال ٧ من التمارين ١٠ ـ ٣ كمثال من هذا النوع.

المثال ١٣ .

احسب قيمة

$$أ = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{د س}{3 + 5 جتاس}$$

لقد وجد ان التعويض المناسب لهذا التكامل هو ص = ظا $\frac{س}{2}$، اي س = ٢ $ظا^{-1}$ص = هـ (ص) حيـث ٠ ⩽ ص ⩽ ١. لهذا فان ف = [٠ ، ١]، واذن هـ (ف) = [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]

والاقتران المكامل في أ متصل على هـ (ف). كذلك هَـ (ص) = $\frac{2}{1 + ص^2}$ متصل على ف.

الآن ٠ ⩽ ص ⩽ ١ تعطي ٠ ⩽ $\frac{س}{2}$ ⩽ $\frac{\pi}{4}$ لهذا فان جتا$\frac{س}{2}$ > ٠. اذن من $جا^2\frac{س}{2}$ + $جتا^2\frac{س}{2}$ = ١ نحصل على ١ + $ص^2$ = $\frac{1}{جتا^2\frac{س}{2}}$. ولكن جتاس = ٢ $جتا^2\frac{س}{2}$ - ١ = $\frac{2}{1 + ص^2}$ - ١ = $\frac{1 - ص^2}{1 + ص^2}$.

لهذا فان:

$$أ = \int_{٠}^{١} \frac{١}{٣ + ٥\left(\frac{١ - ص^{٢}}{١ + ص^{٢}}\right)} \cdot \frac{٢\, دص}{١ + ص^{٢}} = ٢ \int_{٠}^{١} \frac{دص}{٨ - ٢ص^{٢}} .$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٨}} \int_{٠}^{١} \left(\frac{١}{\sqrt{٨} - ص\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٨} + ص\sqrt{٢}} \right) دص$$

$$= \frac{١}{٤} \left[لو \frac{\sqrt{٨} + ص\sqrt{٢}}{\sqrt{٨} - ص\sqrt{٢}} \right]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{١}{٤} لو \frac{(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})^{٢}}{٦} = \frac{١}{٤} لو ٣ .$$

تعريف ريمان للتكامل المحدود.

الاسلوب الـذي سلكنـاه في شرح تكامل ريمان بأخـذ المجـاميـع العليـا والسفلى هو اسلوب داربو . ولكن ريمان عرّف تكامله بطريقة اخرى .

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = نها_{\Delta \to ٠} \sum_{ر=١}^{ن} ق(حـ_{ر})\,(س_{ر} - س_{ر-١}) ،$$

عندما تكون النهاية موجودة وحيث Δ = أك $\{(س_{ر} - س_{ر-١})\}$ ، ونأخذ اي تجزئة ج على [أ ، ب] واي اختيار لِـ $حـ_{ر}$ في $[س_{ر-١} ، س_{ر}]$. وتعتمد $حـ_{ر}$ بشكل عام على ن وعلى ر.

ويمكن اثبـات ان تعـريف ريـمان وتعـريف داربو متكـافئـان ويعطيـان نفس القيمة للتكامل. ولن نثبت هذه النتيجة ، لكن النظرية التالية هي حالة خاصة منها ، تفيد احيانا .

النظرية ١٧ :

افرض ان ق : [٠ ، ١] ⟶ R متصل على [٠ ، ١] وخذ اي $حـ_{ر} \in \left[\frac{ر-١}{ن} ، \frac{ر}{ن}\right]$. اذن :

$$\text{نها}_{ن \leftarrow \infty} \frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(حـ_ر) = \int_{0}^{1} ق(س)\, د س .$$

البرهان.

اكتب $أ_ر = \frac{ر-1}{ن}$، $ب_ر = \frac{ر}{ن}$. اذن

$$\frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(حـ_ر) = \sum_{ر=1}^{ن} \int_{أ_ر}^{ب_ر} \{ ق(حـ_ر) - ق(س) + ق(س) \}\, د س$$

$$= \int_{0}^{1} ق(س)\, د س + \sum_{ر=1}^{ن} \int_{أ_ر}^{ب_ر} \{ ق(حـ_ر) - ق(س) \}\, د س \quad . . . (31)$$

بما ان ق منتظم الاتصال فاننا نحصل على $|ق(س) - ق(ص)| < \epsilon$ اذا كان $|س - ص| < \delta$، لهذا اذا كان $ن > \frac{1}{\delta}$ فان $|ق(حـ_ر) - ق(س)| < \epsilon$ لـ $س \in [أ_ر، ب_ر]$.

من (31) نحصل على

$$\left| \frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(حـ_ر) - \int_{0}^{1} ق(س)\, د س \right| < \epsilon \text{، لكل } ن > \frac{1}{\delta}،$$

وهكذا تثبت النظرية.

المثال ١٤.

اثبت ان

$$س_ن = \sum_{ر=1}^{ن} \frac{ر}{ر^2 + ن^2} \leftarrow \text{لو}\sqrt{2} \quad (ن \leftarrow \infty).$$

لاثبات ذلك نبحث عن اقتران مناسب ق لنظرية ١٧. بأخذ $ق(حـ_ر) = \frac{ر ن}{ر^2 + ن^2} = \frac{ر}{ن} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{ر}{ن})^2}$ فانـه من الطبيعي ان نختـار $ق(س) = \frac{س}{1 + س^2}$ وحـ$_ر$ =

$\frac{ر}{ن}$. اذن وعندما ن ← ∞ ،

$$س_ن \leftarrow \int_0^1 \frac{س\, د س}{1 + س^2} = [\frac{1}{2} لو(1 + س^2)]_0^1 = لو\sqrt{2}.$$

تمارين ١٠ ـ ٣

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اثبت ان $\int_0^ب (1 + س^2)^{-2}\, د س \leftarrow \frac{\pi}{4}$ (ب ← ∞).

٢ ـ استخدم طريقة التكامل بالاجزاء لحساب ما يلي

$\int ظا^{-1}س\, دس$ ؛ $\int س\, ظا^{-1}س\, د س$ ؛

$\int جاس\, جتاز(س)\, د س$ ؛ $\int (جاس\, جتاس)\, e^{س}\, د س$ ؛

$\int جا(أ س)\, جتا(ب س)\, د س$ (ب > أ > ٠)؛ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} س\, قا^2س\, د س$

٣ ـ لكل ن ∈ N ، احسب قيمة

$$ل = نها_{ب \to \infty} \int_0^ب س^ن\, e^{-س}\, د س$$

٤ ـ اذا كان ق ∈ ر[أ ، ب]، ك (س) = $\int_أ^س ق$ ، فاثبت ان

$\int_أ^ب ك(س)\, جتا(ن س)\, د س \leftarrow ٠$ (ن ← ∞).

٥ ـ استخدم تعويضا مناسبا لحساب قيمة

$\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{س}}\, د س$ ؛ $\int_أ^ب \sqrt{(أ - س)(س - ب)}\, د س$ ؛ $\int_0^1 (1 - س^2)^ن\, د س$

(ن ∈ N).

٦ ـ اثبت ان

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{د س}{٥ + ٣ \text{ جتاس}} = \frac{١}{٢} \text{ ظا}^{-١} \frac{١}{٢}$$

كذلك احسب قيم

$$أ = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{د س}{٢ + \text{جتاس}} \quad \text{و ب} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{د س}{١ - \text{جاس}} .$$

٧ ـ اثبت ان $ل = \int_{-١}^{١} (١ + س^{٢})^{-١} د س = \frac{\pi}{٢}$. عوض $س = ص^{-١}$ في ل لتحصل على ان

$ل = - \frac{\pi}{٢}$. ما الخطأ؟

٨ ـ جد نهايات المتتاليات المعطى حدها النوني كما يلي.

(١) $\frac{١^{أ} + ٢^{أ} + \ldots + ن^{أ}}{ن^{أ+١}}$ حيث $أ > -١$

(٢) $(٢ن + ١)^{-١} + (٢ن + ٢)^{-١} + \ldots + (٣ن)^{-١}$

(٣) $ن \sum_{ر=١}^{ن} (ر^{٢} + ن^{٢})^{-١}$

٩ ـ اذا كان $س_{ن}(\theta) = \sum_{ر=١}^{ن} ن^{-١} \text{ جتا} (\frac{ر\theta}{ن})$، فاثبت ان

$\text{نها}_{\theta \leftarrow ٠} \text{ نها}_{ن \leftarrow \infty} س_{ن}(\theta) = \text{نها}_{ن \leftarrow \infty} \text{ نها}_{\theta \leftarrow ٠} س_{ن}(\theta) = ١$.

١٠ ـ استخدم طريقة التكامل بالاجزاء لاثبات ان

$\int_{0}^{١} \text{لو}(١ + س) د س = - ١ + \text{لو} ٤$، واستنتج ان

$\left\{ (١ + \frac{١}{ن})(١ + \frac{٢}{ن}) \ldots (١ + \frac{ن}{ن}) \right\}^{\frac{١}{ن}} \leftarrow \frac{٤}{e}$ عندما $ن \leftarrow \infty$.

٤ — التكامل اللانهائي والتكامل المعتل

هنـاك اوجـه تشـابـه عديـدة بين التكـامل اللانهائي والمتسلسلة اللانهائية . نقول ان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{ر=١}^{\infty}$ أ$_ر$ تكون تقاربية ومجموعها أ اذا وفقط اذا وجدت

نها$_{ن \leftarrow \infty}$ $\sum_{ر=١}^{ن}$ أ$_ر$ = أ.

وبالمثل نعرف التكامل اللانهائي كما يلي :

التكامل اللانهائي التقاربي : نقول ان التكامل اللانهائي $\int_{أ}^{\infty}$ ق (ص) د ص هو تقاربي (أو موجود) اذا وفقط اذا كان ق $\in$ ر[أ ، س] لكل س $>$ أ وكانت توجد

نها$_{س \leftarrow \infty}$ $\int_{أ}^{س}$ ق (ص) د ص = م ،

حيث م عدد حقيقي . عندها نكتب $\int_{أ}^{\infty}$ ق (ص) د ص = م . ونرمز لمجموعة جميع الاقترانات ق : [أ ، ∞) $\leftarrow$ R بحيث ان $\int_{أ}^{\infty}$ ق (ص) د ص تقاربي بالرمز ر[أ ، ∞) .

واذا كان $\int_{أ}^{س}$ ق (ص) د ص لا يقترب من نهاية عندما س $\leftarrow \infty$ ، فاننا نقول ان $\int_{أ}^{\infty}$ ق (ص) د ص تباعدي .

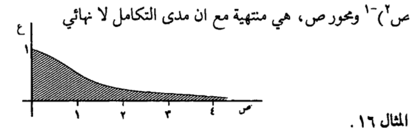
المثال ١٥ .

لكل س $>$ ٠ نعرف أن $\int_{٠}^{س}$ (١ + ص^{٢})$^{-١}$ د ص = ظا$^{-١}$س $\leftarrow \frac{\pi}{٢}$ عندما (س $\leftarrow \infty$) ،

لهذا فان :

$$\int_{٠}^{\infty} (١ + ص^{٢})^{-١} \, د ص = \frac{\pi}{٢}$$

تفسر نتيجة المثال ١٥ بالرسم على ان المساحة المظللة والمحدودة بالمنحنى ع = $(١ + ص^{٢})^{-١}$ ومحور ص، هي منتهية مع ان مدى التكامل لا نهائي



المثال ١٦.

ان التكاملين $\int_{٠}^{\infty} ص \, د ص$ و $\int_{٠}^{\infty}$ جتاص د ص هما تباعديان لان $\int_{٠}^{س} ص \, د ص = \frac{س}{٢} \to \infty$ (س $\to \infty$)، و $\int_{٠}^{س}$ جتاص د ص = جاس $\not\to$ اي نهاية (س $\to \infty$).

المثال ١٧.

ان

$$\int_{١}^{\infty} ص^{-و} \, د ص = \frac{١}{و - ١} \quad (\text{عندما } و > ١).$$

والتكامل تباعدي عندما و $\leqslant$ ١. هذا لأن

$$\int_{١}^{س} ص^{-و} \, د ص = \frac{١}{و - ١} - \frac{س^{١-و}}{و - ١} \to \frac{١}{و - ١} \quad (\text{عندما } و > ١)؛$$

$$\int_{١}^{س} ص^{-و} \geqslant \text{لو} \, س \to \infty \quad \text{عندما } و \leqslant ١.$$

اما بالنسبة لتقارب او تباعد $\int_{-\infty}^{أ}$ ق (ص) د ص فإنه يعرّف بطريقة مشابهة، أي نأخذ سلوك

$$\int_{س}^{أ} ق (ص) \, د ص$$

عندما س $\to -\infty$ ،

اذا كان ق : R ← R وق ∋ ر[س ، ص] لكل س ، ص ∋ R حيث س > ص ، فاننا نقول ان

$$\int_{-\infty}^{\infty} ق(ع)\, دع$$

تقــاربي اذا وفقـط اذا وجـد عدد أ ∋ R بحيث ان $\int_{أ}^{\infty}$ ق(ص) د ص و $\int_{-\infty}^{أ}$ ق(ص) د ص تقاربيان. وعندها تعرف

$$\int_{-\infty}^{\infty} ق(ع)\, دع = \int_{-\infty}^{أ} ق(ع)\, دع + \int_{أ}^{\infty} ق(ع)\, دع.$$

من السهل ان نرى ان $\int_{-\infty}^{\infty}$ ق(ع) دع لا يعتمد على أ.

المثال ١٨.

اذا كان ق (ع) = $\frac{١}{(١ + |ع|)(٢ + |ع|)}$ فان $\int_{-\infty}^{\infty}$ ق(ع) دع = لو٤ ، لأن

$\int_{٠}^{س}$ ق(ع) دع = [لو $\frac{١ + ع}{٢ + ع}$]$_{٠}^{س}$ ← -لو $\frac{١}{٢}$ = لو ٢ (عندما س ← ∞).

كذلك $\int_{-\infty}^{٠}$ ق(ع) دع = لو٢

والنظرية التالية تقابل القاعدة العامة لتقارب المتسلسلات.

النظرية ١٨.

إفرض أن ق ∋ ر[أ ، س] لكل س > أ. اذن ق ∋ ر[أ ، ∞) اذا وفقط اذا كان لكل ∈ > ٠ يوجد ع. = ع. (∈) بحيث ان :

$$| \int_{ب}^{ح} ق(ع)\, دع | < \epsilon \quad \text{لكل } ح \geqslant ب > ع_\circ \quad \ldots\ldots \quad (٣٢)$$

البرهان.

اولا، افرض ان ق $\in$ ر[أ، ∞)، لهذا فان $\int_{أ}^{س} ق(ع)\, دع \leftarrow م$ (س $\leftarrow \infty$). اذن اذا كان $\epsilon > ٠$ فانه يوجد ع$_\circ$ > أ بحيث ان

$$| \int_{أ}^{س} ق(ع)\, دع - م | < \frac{\epsilon}{٢} \quad \text{لكل } س > ع_\circ .$$

اذن ح $\geqslant$ ب > ع$_\circ$ تعطي

$$| \int_{ب}^{ح} ق(ع)\, دع | = | \int_{أ}^{ح} ق(ع)\, دع - \int_{أ}^{ب} ق(ع)\, دع |$$

$$\leqslant | \int_{أ}^{ح} ق(ع)\, دع - م | + | \int_{أ}^{ب} ق(ع)\, دع - م | < \epsilon$$

مما يثبت (٣٢). وبالعكس، افرض ان (٣٢) تتحقق. لأي ن $\in$ ط عرّف

$$ص_ن = \int_{أ}^{أ+ن} ق(ع)\, دع$$

من (٣٢) فاننا نحصل على $| ص_{ن+م} - ص_ن | < \epsilon$ اذا كان ن > ع$_\circ$ - أ، م $\geqslant$ ٠. اذن (ص$_ن$) متتالية كوشية من اعداد حقيقية، لهذا فان (ص$_ن$) تقاربية. لنقل ص$_ن \leftarrow$ م (ن $\leftarrow \infty$).

لنختر الآن عددا طبيعيا ر > ص$_\circ$ - أ بحيث ان $| ص_ر - م | < \epsilon$. اذن س > أ + ر تعطي

$$| \int_{أ}^{س} ق(ع)\, دع - م | = | ص_ر - م + \int_{أ+ر}^{س} ق(ع)\, دع |$$

$$\leqslant | ص_ر - م | + | \int_{أ+ر}^{س} ق(ع)\, دع | < ٢ \epsilon .$$

اذن ق $\in$ ر[أ ، ∞) و $\int_{أ}^{\infty}$ ق (ع) د ع = م . مما يثبت النظرية .

المثال ١٩ .

سنثبت الآن ان ل = $\int_{1}^{\infty}$ (جا ص) ص$^{-و}$د ص تقاربي اذا كان و $>$ ١ . لقد بينا في المثال ١٧ ان $\int_{1}^{\infty}$ ص$^{-و}$ د ص تقاربي اذا كان و $>$ ١ . فمن النظرية ١٨ لكل $\epsilon > $ ٠ يوجد ص٠ بحيث ان

$$\int_{جـ}^{ب} ص^{-و} د ص < \epsilon \text{ ، لكل جـ} \geqslant ب > ص_٠ .$$

ولكن | جا ص | $\leqslant$ ١ لكل ص $\in$ R ، اذن

$$\left| \int_{جـ}^{ب} (حاص) ص^{-و} د ص \right| \leqslant \int_{جـ}^{ب} ص^{-و} د ص < \epsilon .$$

لكل جـ $\geqslant$ ب $>$ ص٠ ، اذن ل تقاربي ، من النظرية ١٨ .

وفي الحقيقة ان ل تقاربي لكل و $>$ ٠ ، لكن الحالة ٠ $<$ و $\leqslant$ ١ ليست سهلة .

سنعطي مثالا الآن يوضح ان التشابه بين التكامل اللانهائي التقاربي والمتسلسلة اللانهائية التقاربية ليس تشابها تاما .

المثال ٢٠ .

من النظرية ٢ ، الفصل ٥ ، وجدنا انه اذا كان $\sum_{ر=1}^{\infty}$ أ$_ر$ تقاربيا يكون أ$_ر$ $\leftarrow$ ٠ (ر $\leftarrow \infty$) .

ولكن هناك تكاملات لا نهائية تقاربية بحيث ان ق (ص) $\not\rightarrow$ ٠ عندما ص $\leftarrow \infty$. كمثال على ذلك خذ ق : [١ ، ∞) $\leftarrow$ R حيث ق (ص) = ١ لكل ن $\leqslant$ ص $\leqslant$ ن + ٢$^{-ن}$ (كل ن $\in$ N)، ولكن ق (ص) = ٠ عدا ذلك .

بالرسم يتبين لنا ان ل = $\int_{1}^{\infty}$ ق (ص) د ص هو مجموع متسلسلة مساحات مستطيلات ،

ارتفاع كل مستطيل منها ١ ، وقواعدها هي $٢^{-١}$ ، $٢^{-٢}$ ، $٢^{-٣}$ ، . . . . لهذا فان ل = $٢^{-١}$ + $٢^{-٢}$ + $٢^{-٣}$ + . . . = ١ ولكن ق (ص) $\not\to$ ٠ عندما ص $\leftarrow$ ∞ ، لأن ق (ص) = ١ لعدد لا نهائي من ص، (على سبيل المثال ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . .). كذلك ق (ص) = ٠ لعدد لا نهائي من ص (على سبيل المثال ص = $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$ ، . . .). اذن ق (ص) لا يقترب من نهاية عندما ص $\leftarrow$ ∞ .

ويمكن تعريف التقارب المطلق للتكامل اللانهائي بنفس طريقة المتسلسلات:

التكامل ذو التقارب المطلق. يقال ان التكامل $\int_{أ}^{\infty}$ ق (ص) د ص ذو تقارب مطلق اذا وفقط اذا كان ق $\in$ ر[أ ، س] لكل س > أ و |ق| $\in$ ر[أ ، ∞).

النظرية ١٩.

اذا كان $\int_{أ}^{\infty}$ ق (ص) د ص ذا تقارب مطلق فانه يكون تقاربيا، لكن العكس غير صحيح بشكل عام.

البرهان.

ينتج من النظرية ١٨ انه لكل ϵ > ٠ يوجد ص. > أ بحيث ان

ل = $\int_{ب}^{جـ}$ |ق (ص)| د ص < ϵ لكل جـ ≥ ب > ص. .

لكن | $\int_{ب}^{جـ}$ ق (ص) د ص | ≤ ل، اذن ق $\in$ ر[أ ، ∞).

لاثبات ان العكس غير صحيح بشكل عام نأخذ ل = $\int_{١}^{\infty}$ $\frac{جاص}{ص}$ د ص . فاذا استخدمنا طريقة التكامل بالاجزاء وقربنا نحصل على:

$$\left| \int_{ب}^{حـ} \frac{جاص}{ص}\, دص \right| \leq \frac{٢}{ب} < \epsilon \quad \text{لكل } حـ \geq ب > \frac{٢}{\epsilon} ،$$

اذن ل تقاربي ، من النظرية ١٨ . لكن ل ليس ذا تقارب مطلق لانه لكل ن $\in N$ ، اذا كتبنا أ = (ر − ١) π ، ب = ر π نحصل على

$$\int_{\pi}^{ن\pi} |جاص|\, ص^{-١}\, دص = \sum_{ر=٢}^{ن} \int_{أ}^{ب} |جاص|\, ص^{-١}\, دص$$

$$\geq \sum_{ر=٢}^{ن} \int_{أ}^{ب} |جاص|\, (ر\pi)^{-١}\, دص$$

$$= \sum_{ر=٢}^{ن} ٢\, (ر\pi)^{-١} \to \infty \quad (ن \to \infty)$$

لان $\sum ر^{-١}$ تباعدي .

سنعرض الآن فكرة التكامل المعتل بمثال. لنكتب

$$ل = \int_{٠}^{١} \frac{دص}{\sqrt{ص}}$$

لا معنى لما كتبناه كتكامل ريماني ، لان $\frac{١}{\sqrt{ص}}$ غير معرف عند الصفر. حتى لو عرفنا ق عند ص = ٠ بطريقة خاصة بحيث ق (٠) $\in R$ وَق (ص) = $\frac{١}{\sqrt{ص}}$ ، $٠ < ص \leq ١$ ، فان ق يكون غير محصور على [٠ ، ١]. اذن ق $\notin$ ر[٠ ، ١].

فلكي نتمكن من إعطاء معنى لِـ ل نفرض ان $٠ < س \leq ١$ ونأخذ النهاية عندما س $\to ٠+$ لِـ $\int_{س}^{١} \frac{دص}{\sqrt{ص}} = [٢\sqrt{ص}]_{س}^{١} = ٢ - ٢\sqrt{س}$. الآن $٢ - ٢\sqrt{س} \to ٢$ عندما س $\to ٠+$ لهذا فانه من الطبيعي ان نقول ان «التكامل المعتل» ل موجود (او تقاربي) ، ونعرف

$$\int_{٠}^{١} \frac{دص}{\sqrt{ص}} = \text{نها}_{س \to ٠+} \int_{س}^{١} \frac{دص}{\sqrt{ص}} .$$

وبشكل عام فاننا نعّرف التكامل المعتل كما يلي :

التكامل المعتل: افرض ان ق : (أ ، ب] $\to R$ ، وان ق $\in$ ر[س ، ب] لكل س $\in$ (أ

، ب). نقول ان التكامل المعتل $\int_{أ}^{ب}$ ق (ص) د ص موجود اذا وفقط اذا كانت توجد

$$نها_{س \leftarrow أ^+} \int_{س}^{ب} ق (ص)\ د ص = ل ، حيث ل \in R .$$

عندها نكتب $\int_{أ}^{ب}$ ق (ص) د ص = ل، أو للتأكيد نكتب

$$\int_{أ^+}^{ب} ق (ص)\ د ص = ل .$$

وبطريقة مشابهة اذا كان ق : [أ ، ب) ← R ، ق ∈ ر[أ ، س) لكل س ∈ (أ ، ب)، وكانت

$$نها_{س \leftarrow ب^-} \int_{أ}^{س} ق (ص)\ د ص = م$$

فاننا نكتب

$$\int_{أ}^{ب^-} ق (ص)\ د ص = م .$$

كذلك، اذا كان ق ∈ ر[س ، ص] لكل أ < س < ص < ب وكان يوجد حـ ∈ [أ ، ب] بحيث ان

$ی_1 = \int_{أ^+}^{حـ}$ ق (ص) د ص و $ی_2 = \int_{حـ}^{ب^-}$ ق (ص) د ص موجـودان فاننـا نعـرف التكـامل المعتل على [أ ، ب] بـ

$$\int_{أ^+}^{ب^-} ق (ص)\ د ص = ی_1 + ی_2 .$$

وهناك تكاملات هامة (مثل التكامل الذي يعرف اقتران جاما) تكون معتلة عند احدى نهايتي التكامل وتكون لا نهائية عند الاخرى. لهذا فان تكاملا من نوع

$$ل = \int_{أ^+}^{\infty} ق (ص)\ د ص$$

يكون موجودا (أو تقاربيا) اذا كان ق : (أ ، ∞) ← R ، ق ∈ ر[س ، ص] لكل س ،

ص بحيث ان أ < س < ص، وكان يوجد حـ > أ بحيث ان

$م_١ = \int_{أ+}^{حـ}$ ق (ص) د ص ، $م_٢ = \int_{حـ}^{\infty}$ ق (ص) د ص موجودان.عندها نعرف ل = $م_١ + م_٢$.

المثال ٢١ .

اذا كان ق (ص) = $ص^{-١}$ فان ق غير قابل للتكامل وغير قابل للتكامل المعتل على [٠ ، ١]. وكونه غير قابل للتكامل واضح، واذا كان ٠ < س < ١ فان

$$\int_{س}^{١} \frac{د ص}{ص} = -لوس \leftarrow \infty \quad (س \leftarrow ٠+)،$$

لهذا فان التكامل المعتل $\int_{٠}^{١} ص^{-١}$ د ص غير موجود.

المثال ٢٢ .

$\int_{٠+}^{١} ص^{-م}$ د ص = $\frac{١}{١ - م}$ (عندما م < ١)، لانه اذا كان ٠ < س < ١ فان

$$\int_{س}^{١} ص^{-م} د ص = \frac{١ - س^{١-م}}{١ - م} \leftarrow \frac{١}{١ - م} \quad (س \leftarrow ٠+)$$

المثال ٢٣ .

$\int_{٠+}^{١}$ لو(ص) د ص = -١، لانه اذا كان ٠ < س < ١ فان

$$\int_{س}^{١} لو(ص) د ص = [ص لوص - ص]_{س}^{١}$$

= -١ + س - س لوس،

وَس لوس ← ٠ عندما س ← ٠+

والنظرية التالية تساعد احيانا في اثبات وجود التكامل المعتل. سوف ندرس الحالة التي

تتعلق بـ أ+ عند النهاية السفلى للتكامل.

النظرية ٢٠.

افرض ان ق : (أ ، ب] ⟵ R ، ق ∋ ر[س ، ب] لِـ أ < س < ب وق (ص) ⩾ ٠ لِـ أ < ص ⩽ ب. اذا كان يوجد عدد ثابت م بحيث ان

$$\int_{س}^{ب} ق (ص) \ د ص \leqslant م \ \text{لكل} \ س \ni (أ ، ب)، \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (٣٣)$$

فان $\int_{أ+}^{ب}$ ق (ص) د ص يكون موجودا.

البرهان.

لنرمز للتكامل في (٣٣) بـ هـ (س). فمن مسلمة الحد الاعلى فانه يوجد للمجموعة سه = { هـ (س) | س ∋ (أ ، ب) } اصغر حاصر اعلى ع. اذن هـ (س) ⩽ ع لكل س ∋ (أ ، ب) ولكل و > ٠ يوجد س. ∋ (أ ، ب) بحيث ان هـ (س.) > ع − و. اذا كان أ < س < س. فان هـ (س.) ⩽ هـ (س)، لان ق (ص) ⩾ ٠، لهذا فان

ع − و < هـ (س.) ⩽ هـ (س) ⩽ ع < ع + و.

اي ان | هـ (س) − ع | < و اذا كان أ < س < س. ، مما يعطي ان هـ (س) ⟵ ع عندما س ⟵ أ+. اذن $\int_{أ+}^{ب}$ ق (ص) د ص = ع، وهكذا يتم البرهان.

المثال ٢٤.

سنثبت ان التكامل المعتل $\int_{٠+}^{١} \frac{جاص}{ص}$ د ص موجود. فمن المثال ٤ في الفصل ٩ نعرف

ان حاص $<$ ص لكل ص $>$ ٠، لهذا فانه لكل س $\in$ (٠ ، ١)،

$$\int_{س}^{١} \frac{جاص}{ص} د ص < \int_{س}^{١} ١ د ص = ١ - س < ١ ،$$

اذن (٣٣) تتحقق باخذ م = ١ .

المثال ٢٥ [اقتران جاما].

$$\Gamma \text{(م)} = \int_{+٠}^{\infty} e^{-ص} ص^{م-١} د ص$$ تقاربي لكل م $>$ ٠

لاثبات ذلك نأخذ التكاملات على (٠ ، ١] وعلى [١ ، ∞). لكل ص كبيرة كبرا كافيا، فنحصل على ٠ $<$ $e^{-ص}$ ص$^{م-١}$ $\leqslant$ ص$^{-٢}$ واذن:

$\int_{١}^{\infty} e^{-ص}$ ص$^{م-١}$ د ص ذو تقارب مطلق، واذن هو تقاربي.

الآن نأخذ ٠ $<$ س $<$ ١، لهذا فان ٠ $<$ $e^{-ص}$ص$^{م-١}$ لِـ س $\leqslant$ ص $\leqslant$ ١، اذن

$$\int_{س}^{١} e^{-ص} ص^{م-١} د ص < \int_{س}^{١} ص^{م-١} د ص = \frac{١ - س^{م}}{م} < \frac{١}{م} ،$$

مما يعطي ان $\int_{+}^{١} e^{-ص}$ ص$^{م-١}$ د ص موجود من النظرية ٢٠ .

تمارين ١٠ - ٤

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ - افرض ان هـ $\in$ ر[أ ، ∞) وهـ(س) $>$ ٠ لِـ س $\leqslant$ أ. اذا كان ق $\in$ ر[أ ، س] لكل س $>$ أ و $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ← م (س ← ∞) فأثبت ان ق $\in$ ر[أ ، ∞).

استخدم هذه النتيجة لاثبات ان $\int_{١}^{\infty} e^{-ص}$ ص^{ح} جاص د ص تقاربي لكل ح $\in$ R .

٢ ـ اثبت وجود

$$أ = \int_{0}^{\infty} \frac{ص^{٣}}{e^{ص} - ١} د ص ، و ب = \int_{0}^{\infty} جا (ص^{٢}) د ص .$$

يرد هذان التكامـلان في الفيـزيـاء، فالتكـامل أ يظهر عند دراسة قانون ماكس بلانك لاشعاع الاجسام السوداء. والتكامل ب ويسمى تكامل فرزنال، ويرد في نظرية الانعطاف في البصريات.

٣ ـ اذا كان $أ > ٠$ ، فاثبت ان

$$\int_{أ}^{\infty} e^{-ص^{٢}} د ص = \frac{e^{-أ^{٢}}}{٢أ} (١ - \frac{١}{٢أ^{٢}} + ق (أ))$$

حيث $٠ < ق (أ) < \frac{٣}{٤أ^{٤}}$.

٤ ـ اثبت وجود $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}}$ لو (جاص) د ص وجد قيمته.

٥ ـ اثبت ان $\int_{0}^{\infty} \frac{جاص}{ص}$ د ص موجود. لـ $٠ < س < \pi$ اثبت ان

$$جا (٢ ن س) = ٢ جاس \sum_{ر=١}^{ن} جتا (٢ر - ١) س،$$

ثم استنتج ان

$$ل_{ن} = \int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} جا (٢ ن س) ظتاس د س = \frac{\pi}{٢}.$$

بدراسة $ل_{ن} - \int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا (٢ ن س)}{س} د س$ عندما $ن \to \infty$ ، اثبت ان

$$\int_{0}^{\infty} \frac{جاص}{ص} د س = \frac{\pi}{٢}.$$

٦ ـ افرض ان أ ، ب اعداد حقيقية لا تساوي الصفر. ما هي التحديدات التي يجب ان توضع على أ ، ب بحيث ان التكامل

$$\int_{0}^{\infty} \frac{جا (ب ص)}{e^{أص} - ١} د ص$$ يكون موجودا

٧ ـ افـرض ان ق ∋ ر[س ، ب] لـ أ > س > ب . اثبت ان $\int_{أ}^{ب}$ ق (ص) د ص يكـون موجودا اذا وفقط اذا كان لكل $\in$ > ٠ يوجد δ > ٠ بحيث ان | $\int_{س}^{ع}$ ق (ص) د ص | > $\in$ عندما يكون س ، ع ∋ (أ ، ب] و أ > س > ع > أ + δ .

٨ ـ (١) لاقتران جاما اثبت ان Γ (م + ١) = م Γ (م) لـ م > ٠ ، واستنتج ان Γ (ن + ١) = ن! لـ ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . .

(٢) من المعروف ان $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. استخدم هذه النتيجة لحساب قيمة $\int_{0}^{\infty}$ هـ$^{-ص^2}$ د ص .

٩ ـ اثبت ان التكامل المعتل (المعروف باسم اقتران بيتا) :

β (أ ، ب) = $\int_{0}^{1}$ ص$^{أ-1}$ (١ − ص)$^{ب-1}$ د ص

موجود لكل أ > ٠ ، ب > ٠ . اثبت كذلك ان

أ β (أ ، ب + ١) = ب β (أ + ١ ، ب) .

٥ . تطبيقات على التكامل

سنناقش في هذا البند بعضا من تطبيقات التكامل العديدة والمفيدة . وسوف نبين كيف يمكن استخـدام التكـامـل للحصول على متسلسلة تايلور لبعض الاقترانات . وبشكل خاص سوف نعطي متسلسلة تايلور للاقتران ظا$^{-1}$س ونستخدمها لحساب قيمة π .

بعد ذلك سوف نثبت اختبارا هاما (اختبار التكامل) لتقارب انماط معينة من المتسلسلات اللانهائية .

كذلك ، سوف نشتق صيغة سترلنج التي تتحدث عن سلوك ن! عندما تكون ن كبيرة .

تستخدم هذه النتيجة في الاحصاء والاحتمالات واجزاء عديدة من الرياضيات التطبيقية.

واخيرا نناقش فكرة طول المنحنى ونشتق قاعدة سمبسن للتكامل العددي للاقترانات.

النظرية ٢١.

اذا كان $-١ < س \leqslant ١$ فاننا نحصل على المتسلسلة اللانهائية

$$لو(١ + س) = س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٤}}{٤} + \ldots \ldots \quad (٣٤)$$

البرهان.

لِـ $ص > -١$ تكون مشتقة $لو(١ + ص)$ هي $(١ + ص)^{-١}$، لهذا اذا كان $س > -١$ يكون

$$لو(١ + س) = \int_{٠}^{س} \frac{د ص}{١ + ص} = \int_{٠}^{س} (١ - ص + ص^{٢} - \ldots + (-ص)^{ن-١} +$$

$ب_{ن}$) د ص حيث $ب_{ن} = \frac{(-ص)^{ن}}{١ + ص}$. اذن

$$\left| لو(١ + س) - (س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \ldots + (-١)^{ن-١} \frac{س^{ن}}{ن}) \right|$$

$$= \left| \int_{٠}^{س} \frac{ص^{ن}}{١ + ص} د ص \right| .$$

لاثبات (٣٤) علينا ان نبرهن انه اذا كان $-١ < س \leqslant ١$ فان القيمة المطلقة للتكامل تقترب من الصفر عندما $ن \to \infty$.

الآن اذا كان $٠ \leqslant س \leqslant ١$ فان

$$\left| \int_{٠}^{س} \frac{ص^{ن}}{١ + ص} د ص \right| \leqslant \int_{٠}^{س} ص^{ن} د ص = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} \leqslant \frac{١}{ن + ١} \to ٠ ،$$

($ن \to \infty$).

واذا كان $-1 < $ س < 0 فان

$$\left| \int_{0}^{س} \frac{ص^{ن}}{1+ص} \, د ص \right| \leqslant \int_{س}^{0} \frac{|ص|^{ن}}{1+ص} \, د ص \leqslant \frac{1}{1+س} \int_{س}^{0} |ص|^{ن}$$

$$د ص = \frac{|س|^{ن+1}}{(1+ن)(1+س)} \, .$$

اذن $\left| \int_{0}^{س} \frac{ص^{ن}}{1+ص} \, . د ص \right| < \frac{1}{(1+ن)(1+س)} \quad \leftarrow 0 \, (ن \leftarrow \infty)$ ،

عندما يكون $-1 < $ س < 0 ، وهذا يثبت النظرية.

النظرية ٢٢.

اذا كان $-1 \leqslant$ س $\leqslant 0$ فاننا نحصل على المتسلسلة اللانهائية

$$ظا^{-1} س = س - \frac{س^{3}}{3} + \frac{س^{5}}{5} - \frac{س^{7}}{7} + \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

كذلك

$$\frac{\pi}{4} = 4 \, ظا^{-1} \frac{1}{5} - ظا^{-1} \frac{1}{239} \, ، \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

ومن هذا نحصل على $\pi = 3,1415926$ صحيحة لسبع منازل عشرية.

البرهان.

لأي س $\in R$ يكون

$$ظا^{-1} س = \int_{0}^{س} \frac{د ص}{1+ص^{2}} = س - \frac{س^{3}}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{ن-1} س^{2ن-1}}{2ن-1}$$

$$+ (-1)^{ن} \int_{0}^{س} \frac{ص^{2ن}}{1+ص^{2}} \, د ص \, .$$

اذا كان $٠ \leqslant$ س $\leqslant ١$ فان القيمة المطلقة للتكامل الاخير تكون اقل من أو تساوي

$$\int_{٠}^{س} ص^{٢ن} \, د\,ص = \frac{س^{٢ن+١}}{٢ن+١} \leqslant \frac{١}{٢ن+١} \longrightarrow ٠ \quad (ن \longrightarrow \infty).$$

ويصح نفس التقريب اذا كان $-١ \leqslant$ س < ٠، اذن تتحقق (٣٥).

فاذا وضعنا س = ١ في (٣٥) نحصل على

$$\frac{\pi}{٤} = ١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \ldots ،$$

مع ان هذه المعـادلـة تحوي على π ، الا انهـا لا تفيد في حساب قيمة π لان تقارب المتسلسلة بطيء. وهناك طريقة افضل لحساب π وهي اثبات (٣٦) ثم إستخدام(٣٥) لِـ س = $\frac{١}{٥}$ وَ س = $\frac{١}{٢٣٩}$ مما يعطي تقاربا اسرع للمتسلسلة.

لاثبات (٣٦) نكتب أ = ظا$^{-١}$ $\frac{١}{٥}$. لهذا فان ظاأ = $\frac{١}{٥}$ وَ

$$ظا٢أ = \frac{٢\, ظاأ}{١ - ظا^{٢}أ} = \frac{٥}{١٢} \quad و\; ظا٤أ = \frac{١٢٠}{١١٩}.$$

وبما ان ظا $\frac{\pi}{٤}$ = ١ فاننـا نتـوقـع ان تكـون $\frac{\pi}{٤}$ مسـاوية تقريبا لِـ ٤ أ. اذن بوضع ٤أ = $\frac{\pi}{٤}$ + ب، فاننا نتوقع ان يكون ب صغيرا، وكذلك ظاب . الآن:

$$ظاب = \frac{ظا٤أ - ظا\frac{\pi}{٤}}{١ + ظا٤أ\, ظا\frac{\pi}{٤}} = \frac{١}{٢٣٩}.$$

وبما ان $\frac{\pi}{٤}$ = ٤أ − ب فاننا نرى ان (٣٦) تتحقق.

واخـيرا، باخـذ سـتـة حدود في متسلسلة ظا$^{-١}$ ($\frac{١}{٥}$)، وحـدين في ظا$^{-١}$ $\frac{١}{٢٣٩}$ نحصل على قيمة π المذكورة.

والنظرية التالية تقارن التكامل مع مجاميع لانواع معينة من الاقترانات.

النظرية ٢٣ [اختبار التكامل للمتسلسلات].

افرض ان ق : [١ ، ∞) ← R متناقص وغير سالب. اذن يوجد م ∋ R بحيث ان

$$ح_ن = \sum_{ر=١}^{ن} ق(ر) - \int_{١}^{ن} ق(ص)\, د ص \leftarrow م \quad (ن \leftarrow \infty)،$$

حيث ٠ ⩽ م ⩽ ق (١).

كذلك، اذا كان ق كما هو مذكور اعلاه فان المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{\infty}$ ق (ر) تكون تقاربية اذا وفقط اذا كان التكامل اللانهائي $\int_{١}^{\infty}$ ق (ص) د ص تقاربيا.

البرهان

من النظرية ٦، (٢) فان ق ∋ ر[١ ، س] لكل س > ١ . وبما ان ق متناقص فانه لكل ن ⩾ ٢ يكون

$$ح_ن - ح_{ن-١} = ق(ن) - \int_{ن-١}^{ن} ق(ص)\, د ص$$

$$= \int_{ن-١}^{ن} \{ق(ن) - ق(ص)\}\, د ص \leqslant ٠ ،$$

لهذا فان المتتالية $(ح_ن)$ متناقصة. كذلك، ق (ر − ١) ⩾ ق (ص) ⩾ ق (ر) على [ر − ١ ، ر] تعطي

$$\sum_{ر=٢}^{ن} ق(ر-١) \geqslant \sum_{ر=٢}^{ن} \int_{ر-١}^{ر} ق(ص)\, د ص = \int_{١}^{ن} ق(ص)\, د ص \geqslant \sum_{ر=٢}^{ن} ق(ر)،$$

وهذا يكافيء

$$\sum_{ر=١}^{ن-١} ق(ر) \geqslant \int_{١}^{ن} ق(ص) \geqslant \sum_{ر=١}^{ن} ق(ر) - ق(١).$$

اذن ٠ ⩽ ق (ن) ⩽ $ح_ن$ ⩽ ق (١). لهذا فان $(ح_ن)$ متناقصة ومحصورة من أسفل بالصفر،

اذن ($ح_ن$) تقاربية ولنقل $ح_ن \leftarrow م$ ($ن \leftarrow \infty$). عندما $ن \leftarrow \infty$ في $\cdot \geqslant ح_ن \geqslant ق(1)$
فاننا نحصل على $\cdot \geqslant م \geqslant ق(1)$.

اخيرا، اذا كانت $\sum ق(ر)$ تقاربية مجموعها أ فانه لكل $س > 1$ نختار $ن \in N$
بحيث ان $ن > س$ ونحصل على

$$ك(س) = \int_1^{س} ق(ص)\, د ص \leqslant \int_1^{ن} ق(ص)\, د ص$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} ق(ص) - ح_ن \leqslant \sum_{ر=1}^{ن} ق(ر) \leqslant أ$$

اذن، وبما ان ك (س) تتزايد بازدياد س فاننا نحصل على ان ك (س) يقترب من نهاية عندما $س \leftarrow \infty$.

وبالعكس، اذا كان $ل = \int_1^{\infty} ق(ص)\, د ص$ تقاربيا فان

$$\sum_{ر=1}^{ن} ق(ر) = ح_ن + \int_1^{ن} ق(ص)\, د ص \leftarrow م + ل \quad (ن \leftarrow \infty)،$$

لهذا فان $\sum$ ق (ر) تقاربية، وهذا يثبت النظرية.

ملاحظة.

ان النتيجة المتعلقة بتقارب ($ح_ن$) لا تفترض تقارب $\sum_{ر=1}^{\infty} ق(ر)$ او تقارب $\int_1^{\infty} ق(ص)$ د ص.

المثال ٢٦.

(١) باخذ $ق(ص) = ص^{-1}$ في اختبار التكامل نرى ان

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{ن}) - لو ن \leftarrow \gamma \quad عندما\ ن \leftarrow \infty$$

العدد γ يسمى ثابت اويلر وقيمته هي $\gamma \approx ٠,٥٧٧$.

كذلك بما ان $\int_{١}^{\infty}$ ص$^{-١}$ د ص تباعدي فانه ينتج ان $\sum^{\infty}$ ر$^{-١}$ تباعدي.

(٢) اذا اخذنا ق(ص) = ص$^{-م}$ حيث م > ١ فان تقارب $\sum$ ر$^{-م}$ ينتج من تقارب

$\int_{١}^{\infty}$ ص$^{-م}$ د ص.

(٣) المتسلسلة $\sum_{ر=٢}^{\infty} \frac{١}{ر لو ر}$ تباعدية لان

$$\int_{١}^{س} \frac{د ص}{(ص + ١)\, لو(ص + ١)} = [لو(لو(ص + ١))]_{١}^{س}$$

$$= لو(لو(س + ١)) - لو(لو ٢) \to \infty$$

عندما س $\to \infty$.

قبل برهنة النظرية التالية فاننا سنذكر رمزا مفيدا.

افرض ان $(أ_ن)$، $(ب_ن)$ متتاليتان من الاعداد الحقيقية او المركبة، حيث $|ب_ن| > ٠$ لكل ن $\in \mathbf{N}$. قد لا تكون المتتاليات تقاربية. وسوف نكتب

$$أ_ن \sim م\, ب_ن$$

اذا وفقط اذا كان يوجد عدد م $\neq ٠$ بحيث ان $\frac{أ_ن}{ب_ن} \to م$ (ن $\to \infty$).

لهذا، وعلى سبيل المثال، فان ٢ ن^{٢} + ن + ١ $\sim$ ٢ن^{٢}، و

$\sqrt{ن + ١} - \sqrt{ن} \sim \frac{١}{٢\sqrt{ن}}$. اذا كان $\frac{أ_ن}{ب_ن} \to ١$ (ن $\to \infty$) فاننا نكتب $أ_ن \sim ب_ن$.

النظرية ٢٤ [صيغة سترلنج للمضروب ن!]

$$ن! \sim \sqrt{٢\pi ن}\; ن^{ن}\, e^{-ن}.$$

البرهان.

عرف $أ_ن = \frac{ن!\, e^{ن}}{ن^{ن+\frac{1}{2}}}$ لكل $ن \in N$. سوف نثبت ان $(أ_ن)$ متناقصة ومحصورة من اسفل بعدد ثابت موجب. من هذا ينتج ان $أ_ن \to م$ عندما $(ن \to \infty)$ حيث $م > ٠$، ثم نستخدم التكامل لاثبات ان $م = \sqrt{٢\pi}$ مما يثبت صيغة سترلنج.

نبدأ من النتيجة انه لكل $|س| < ١$ فان

$$لو\left(\frac{١+س}{١-س}\right) = ٢\left(س + \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٥}{٥} + \ldots\right)،$$

وهذه نحصل عليها من النظرية ٢١. لهذا اذا كان $٠ < س < ١$ فان

$$٠ < \frac{١}{٢س}\, لو\left(\frac{١+س}{١-س}\right) - ١ < \frac{س^٢}{٣(١-س^٢)} .$$

وبوضع $س = \frac{١}{٢ن+١}$ نحصل على

$$٠ < \left(ن + \frac{١}{٢}\right) لو\left(١ + \frac{١}{ن}\right) - ١ < \frac{١}{١٢ن(ن+١)} \quad \ldots\ldots\ (٣٧)$$

وبالتبسيط نحصل على

$$\frac{أ_ن}{أ_{ن+١}} = \frac{١}{e}\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن+\frac{١}{٢}}،$$

اذن $لو\left(\frac{أ_ن}{أ_{ن+١}}\right) > ٠$ من (٣٧). اذن $\frac{أ_ن}{أ_{ن+١}} > ١$ وهذا يعطي ان $(أ_ن)$ متناقصة.

باستخدام (٣٧) ثانية نحصل على

$$لو \frac{أ_١}{أ_{ن+١}} = لو \frac{أ_١}{أ_٢} \cdot \frac{أ_٢}{أ_٣} \ldots \frac{أ_ن}{أ_{ن+١}} =$$

$\sum_{ر=1}^{ن}$ لو $\frac{أ_ر}{أ_{ر+1}}$.

$< \frac{1}{12} \sum_{ر=1}^{ن} \frac{1}{ر(ر+1)} < \frac{1}{12}$.

اذن $أ_{ن+1} < أ_1 e$ ، $\frac{1}{12}$ e ، $\frac{11}{12}$ ، وبما ان ($أ_ن$) متناقصة فانه يوجد عدد م $\in R$ بحيث ان $أ_ن \to$ م (ن $\to \infty$) و م $\geqslant e^{\frac{11}{12}} > 0$.

بقي ان نثبت ان م = $\sqrt{2\pi}$ وهذا غير واضح ، سنفعل ذلك بدراسة $أ^2_ن$ و$أ_{2ن}$. الآن $أ^2_ن$ $\to$ م^2 و$أ_{2ن} \to$ م ، اذن

$$\frac{أ^2_ن}{\sqrt{2}\, أ_{2ن}} = \frac{(ن!)^2\, 2^{2ن}}{\sqrt{ن}\,(2ن)!} \equiv ب_ن \to \frac{م}{\sqrt{2}} (ن \to \infty) \quad . \; . \; . \; . \; (38)$$

يكفي ان نثبت ان $ب_ن$ المعرفة بـ (38) تحقق $ب_ن \to \sqrt{\pi}$ (ن $\to \infty$).

لنكتب $ل_ن = \int_0^{\frac{\pi}{2}}$ جا^ن س د س كما في المثال 11 . بما ان $0 \leqslant$ جاس $\leqslant 1$ على $[0 ، \frac{\pi}{2}]$ فان

$$1 \geqslant \frac{ل_{2ن}}{ل_{2ن+1}} \geqslant \frac{ل_{2ن-1}}{ل_{2ن+1}} = 1 + (2ن)^{-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

نحصـل على التسـاوي الأخـير من معادلة المثال 11 عندما يكون ن فرديا . من (39) نحصل على $\frac{ل_{2ن}}{ل_{2ن+1}} \to 1$ (ن $\to \infty$)، لهذا ومن المثال 11 نحصل على

$$حـ_ن \equiv \frac{2}{\pi} \left(\frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2ن}{1 \times 3 \times \ldots \times (2ن-1)}\right)^2 . \frac{1}{2ن+1} \to 1$$

عندما ن $\to \infty$.

وباجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على :

$$ح_ن = \frac{٢}{\pi} \left(\frac{(ن!)^٢ ٢^{٢ن}}{(٢ن)!} \right)^٢ \frac{١}{٢ن + ١} \leftarrow ١ \text{ عندما } ن \leftarrow \infty .$$

اذن

$$\sqrt{ح_ن} \leftarrow ١ \quad (ن \leftarrow \infty) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (٤٠)$$

ينتج من (٤٠) ان $ب_ن$ المعرفة في (٣٨) تحقق $ب_ن \leftarrow \sqrt{\pi}$ $(ن \leftarrow \infty)$، وبهذا تم البرهان.

المثال ٢٧.

يتكرر ظهور التعبير $ل_ن = \binom{٢ن}{ن} ٢^{-٢ن}$ في نظرية الاحتمالات ويتعلق بالمشي العشوائي. ويتطلب معرفة سلوك $ل_ن$ (احتمال حدث معين) لقيم كبيرة لـ ن.

من صيغة سترلنج نحصل على

$$ن! \sim \sqrt{٢ \pi ن}\, ن^ن e^{-ن}، \quad (٢ن)! \sim \sqrt{٤ \pi ن}\, (٢ ن)^{٢ن} e^{-٢ن}، \text{ اذن}$$

$$ل_ن = \frac{(٢ن)!}{(ن!)^{٢} ٢^{٢ن}} \sim \frac{\sqrt{٤ \pi ن}\, (٢ن)^{٢ن} e^{-٢ن}}{٢ \pi ن \cdot ن^{٢ن} e^{-٢ن} ٢^{٢ن}} = \frac{١}{\sqrt{\pi ن}} .$$

في الحقيقة فان $\frac{١}{\sqrt{\pi ن}}$ هو تقريب جيد لـ $ل_ن$ حتى لقيم صغيرة لـ ن. على سبيل المثال، $ل_{٢٠} = ٠,١٧٦٢$ والتقريب هو $٠,١٧٨٤$.

وفكرة المنحنى في المستوى المركب فكرة مألوفة ولها اهمية خاصة عند دراسة التحليل العقدي (المركب). لذا سنعرف ما نعنيه بـ «المنحنى» ونتحدث عن فكرة المنحنى القابل للقياس (اي الذي له طول). ولنوع معين من المنحنيات، التي سندعوها منحنيات ممهدة، سنعطي صيغة تكاملية تمكننا من حساب اطوالها.

المنحنى.

المنحنى م في $\mathbb{C}$ هو اقتران متصل م : [أ ، ب] $\longrightarrow \mathbb{C}$ حيث [أ ، ب] فترة مغلقة في $\mathbb{R}$.

مخطط م يعرف على انه م ([أ ، ب]) = { م (ص) | ص ∈ [أ ، ب] } . سنرمز لمخطط م بالرمز م*.

المنحنى القابل للقياس.

يقال ان المنحنى م في $\mathbb{C}$ قابل للقياس اذا وفقط اذا كان يوجد عدد ثابت ل بحيث ان

$$\sum_{ر=1}^{ن} \left| م (ص_ر) - م (ص_{ر-1}) \right| \leqslant ل$$

لجميع التجزئات ج = { ص. ، ص١ ، . . . ، ص ن } لـ[أ ، ب] حيث أ = ص. < ص١ < . . . < ص ن = ب، ويعرف طول المنحنى القابل للقياس على انه

$$ط (م) = (ص.ح.ع.)_ج \sum \left| (م (ص_ر) - م (ص_{ر-1}) \right| ،$$

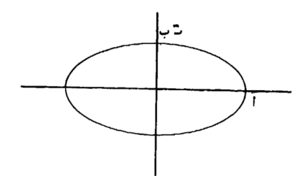
حيث يؤخذ اصغر حاصر علوي على جميع التجزئات ج لـ [أ ، ب].

المثال ٢٨.

عرف م : [٠ ، ٢ π] ← $\mathbb{C}$ بـ م (ص) = $e^{ت ص}$. اذن م* هو محيط دائرة الوحدة في $\mathbb{C}$. نحصل من البند ٢ ، الفصل ٩، على ان م قابل للقياس وان ط (م) = ٢ π .

المثال ٢٩.

عرّف م : [٠ ، ٢ π] ← $\mathbb{C}$ بـ م (ص) = أ جاص + ت ب جتـاص = س + ت ص، حيث أ > ٠ و ب > ٠. اذن $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$، ومنه م* هو قطع ناقص في $\mathbb{C}$ كما هو مبين في الرسم. في هذا الرسم اخذنا أ > ب.



ان عمليـة ايجـاد صيغـة لطـول القطع الناقص اصعب مما يتوقع المرء وفي الحقيقة فانه لا يوجـد صيغـة سهلة. على اي حال فان النظـريـة التـالية تمكننا من كتابة صيغة تكاملية لطول القطع الناقص.

ان النظرية تعالج حالة أعم وهي كون مشتقة المنحنى م متصلة. اذا كان ق ، هـ $\in$ د[أ ، ب] وكان ل (ص) = ق (ص) + ت هـ (ص) فاننا نعرف

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل (ص) د ص} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (ص) د ص} + \text{ت} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ (ص) د ص}.$$

النظرية ٢٥.

افرض ان م : [أ ، ب] $\longrightarrow \mathbb{C}$ منحنى بحيث ان مَ متصل على [أ ، ب]. اذن م قابل للقياس وطوله معطى بـ

$$\text{ط (م)} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{مَ (ع)}| \, \text{د ع} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤١)$$

البرهان.

اكتب م (ع) = س (ع) + ت ص (ع) حيث س (ع) ، ص (ع) حقيقيان وأ $\leqslant$ ع $\leqslant$ ب. اذن مَ = سَ + ت صَ، واتصال مَ يعطي اتصال سَ ، صَ. لهذا فان التكامل في (٤١) موجود.

خذ اي تجزئة ج لـ [أ ، ب]، واكتب

$$\Delta \text{ع}_{\text{ر}} = \text{ع}_{\text{ر}} - \text{ع}_{\text{ر}-1}، \quad \Delta \text{م}_{\text{ر}} = \text{م (ع}_{\text{ر}}) - \text{م (ع}_{\text{ر}-1}).$$

الآن، وحيث المجموع مأخوذ لـ $١ \leqslant ر \leqslant ن$، والتكامل على $[ع_{ر-١}، ع_ر]$، نحصل على

$$\sum |\Delta م_ر| = \sum |\int مَ(ع) دع| \leqslant \sum \int |مَ(ع)| دع$$

$$= \int_{أ}^{ب} |مَ(ع)| دع،$$

اذن م قابل للقياس.

لاثبات (٤١) علينا ان نبرهن انه لكل $و > ٠$ يوجد تجزئة ج لـ $[أ، ب]$ بحيث ان

$$\sum |\Delta م_ر| > \int_{أ}^{ب} |مَ(ص)| دص - و \quad ...... (٤٢)$$

بما ان مَ منتظم الاتصال على $[أ، ب]$ فانه يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان $|مَ(حـ) - مَ(ف)| < ى و$، حيث $ى = \frac{١}{٣(ب - أ)}$، اذا كان $|حـ - ف| < \delta$. الآن نختار بحيث ان أك $\{\Delta ع_ر\} < \delta$.

اذن $\int |مَ(ع)| دع = \int |مَ(ع) - مَ(ع_ر) + مَ(ع_ر)| دع$

$$\leqslant ى و \Delta ع_ر + |\int مَ(ع_ر) دع|$$

$$= ى و \Delta ع_ر + |\int \{مَ(ع_ر) - مَ(ع) + مَ(ع)\} دع|$$

$$\leqslant ٢ ى و \Delta ع_ر + |\int مَ(ع) دع|$$

$$= ٢ ى و \Delta ع_ر + |\Delta م_ر|.$$

اذن؛

$$\sum \int |مَ(ع)| دع \leqslant ٢ ى و (ب - أ) + \sum |\Delta م_ر| < و + \sum |\Delta م_ر|،$$

وهذا يعطي (٤٢)، وهذا يثبت النظرية.

المثال ٣٠ [التكامل الناقصي].

لنأخذ القطع الناقص المعرف بـ $\text{م}(\text{ع}) = \text{أ جاع} + \text{ت ب جتاع}$ كما في المثال ٢٩، وافرض ان $\text{أ} \geqslant \text{ب} > ٠$. والاختلاف المركزي ز للقطع الناقص يعّرف $\text{ز} = \sqrt{١ - \frac{\text{ب}^٢}{\text{أ}^٢}}$. لهذا فان $٠ \leqslant \text{ز} < ١$ و $\text{ب}^٢ = \text{أ}^٢\,(١ - \text{ز}^٢)$. واذا كانت ز = ٠، فان القطع الناقص يصبح دائرة نصف قطرها أ.

فمن النظرية ٢٥، وتماثل القطع الناقص نحصل على ان طول القطع الناقص يساوي

$$٤ \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left|\text{مَ}(\text{ع})\right| \text{دع} = ٤ \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{أ}^٢ \text{جتا}^٢\text{ع} + \text{ت}^٢ \text{جا}^٢\text{ع}}\ \ \text{دع}$$

$$= ٤\,\text{أ} \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١ - \text{ز}^٢ \text{جا}^٢\text{ع}}\ \ \text{دع} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٤٣)$$

يسمى التكامل في (٤٣) بالتكامل الناقصي. واذا كان ز = ٠ فان طول القطع الناقص (اي الدائرة) هو $٤\,\text{أ}\,\frac{\pi}{٢} = ٢\,\pi\,\text{أ}$ كما نتوقع. اما اذا كان $٠ < \text{ز} < ١$ فانه من غير الممكن كتابة التكامل بدلالة اقترانات اولية معروفة. ولكن اذا كان $٠ < \text{ز} < ١$ فانه بالامكان كتابة مسلسلة الاقتران المكامل في (٤٣). ونجد ان طول القطع الناقص يساوي

$$٢\,\pi\,\text{أ}\left(١ - \frac{\text{ز}^٢}{٢^٢} - \frac{٣\,\text{ز}^٤}{٢^٢\ ٤^٢} - \frac{٣^٢ \times ٥\ \text{ز}^٦}{٢^٢ \times ٤^٢ \times ٦^٢} - \ldots\right)$$

الحدود الاولى من هذه المتسلسلة تعطى تقريبا لطول القطع الناقص على شرط ان لا يكون ز قريبا من ١.

قاعدة سمبسن

نُنهي هذا البند بمناقشة قاعدة سمبسن، وهي تعطي صيغة سهلة كثيرة الاستعمال في التقريب العددي للتكاملات المحددة.

سنبدأ بفرض ان ق ∈ ر[أ ، ب] وانه تم تنصيف الفترة المغلقة [أ ، ب] الى [أ ، حـ] و [حـ ، ب] حيث حـ = $\frac{أ + ب}{٢}$. نرغب في ايجاد تقريب عددي لـ $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س .

والفكرة الاساسيه هي استبدال ق باقتران تربيعي ك يمر عبر النقاط الثلاث (أ ، ق (أ)) ، (حـ ، ق (حـ)) ، (ب ، ق (ب)) اي ان ك يحقق ك (أ) = ق (أ) ، ك (ب) = ق (ب) ، ك (حـ) = ق (حـ) . عندها وبوضع تحديدات مناسبة على ق نرى ان $\int_{أ}^{ب}$ ك (س) د س هو تقريب معقول لـ $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س .

الآن ان الاقتران التربيعي ك المعروف بـ

$$ك (س) = ق (أ) \frac{(س - حـ) (س - ب)}{(أ - حـ) (أ - ب)} + ق (حـ) \frac{(س - أ) (س - ب)}{(حـ - أ) (حـ - ب)} + ق (ب) . \frac{(س - أ) (س - حـ)}{(ب - أ) (ب - حـ)} .$$

يحقق ق (س) = ك (س) لكل س = أ ، ب ، جـ. كذلك، ان التكامل المباشر يبين ان

$$\int_{أ}^{ب} ك (س) د س = \frac{ب - أ}{٦} (ق (أ) + ٤ ق (حـ) + ق (ب)) .$$

ان قاعدة سمبسن بابسط صورها هي استبدال

$$\int_{أ}^{ب} ق (س) د س بـ \frac{ب - أ}{٦} (ق (أ) + ٤ ق (حـ) + ق (ب)) \quad . \ . \ . \ . \ . \ ، (٤٤)،$$

حيث حـ = $\frac{أ + ب}{٢}$. لم نذكر هنا شيئا عن كون التقريب ذا قيمة .وفي النظرية ٢٦ سوف نعطي حصرا للخطأ في قاعدة سمبسون ، لكن قبل ذلك سنوضح بمثال كيف تستعمل القاعدة عمليا .

المثال ٣١ .

لنحاول تقريب $\int_{١}^{٢}$ س$^{-١}$ د س = لو٢ باستخدام قاعدة سمبسون : باستخدام (٤٤)

حيث أ = ١ ، ب = ٢ وق (س) = س$^{-1}$ فان التقريب يكون

$$\frac{1}{6}(1 + 4 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{25}{36} = \ldots ٠,٦٩٤٤٤$$

وللحصول على نتيجة افضل نأخذ حـ = $\frac{3}{2}$ ونكتب

$$\int_1^2 \frac{دس}{س} = \int_1^{حـ} \frac{دس}{س} + \int_{حـ}^2 \frac{دس}{س} \quad \ldots\ldots\ldots (٤٥)$$

ثم تطبق قاعدة سمبسن على كل تكامل على يسار (٤٥). ويكون التقريب

$$\frac{ب-أ}{12}\left(ق(أ) + 2\,ق(حـ) + 4\,ق\left(\frac{أ+حـ}{2}\right) + 4\,ق\left(\frac{حـ+ب}{2}\right) + ق(ب)\right)$$

وهذا يساوي ٠,٦٩٣٢٥ عند تقريبه لخمس منازل عشرية.

واذا قسمنا الفترة [١ ، ٢] الى ثمانية اجزاء متساوية فان التقريب يكون ٠,٦٩٣١٥ عند تقريبه لخمس منازل عشرية. وبما ان لو٢ = ٠,٦٩٣١٤٧١ فاننا نرى ان النتيجة الاخيرة «صحيحة» عند التقريب لخمس منازل عشرية.

والنظرية التالية تعطي تقريبا للخطأ في قاعدة سمبسون للاقترانات التي لها مشتقة رابعة محصورة.

النظرية ٢٦.

افرض ان ق$^{(3)}$ ∋ رول [أ ، ب] وان ق$^{(4)}$ محصور على (أ ، ب)، لنقل $|ق^{(4)}(س)| \leqslant ي$ لكل س ∋ (أ ، ب)، بوضع حـ = $\frac{أ+ب}{2}$ ، و = $\frac{ب-أ}{2}$ فان

$$\left|\int_أ^ب ق(س)\,دس - \frac{و}{3}(ق(أ) + 4\,ق(حـ) + ق(ب))\right| \leqslant \frac{ي\,و^5}{90}.$$

البرهان.

ان

$$\int_{أ}^{ب} ق(ص)\,د ص = \int_{حـ-و}^{حـ+و} ق(ص)\,د ص$$

سوف ندرس اقتران الخطأ خ المعرف على $٠ \geqslant س \geqslant و$ بـ خ (س) = $\int_{حـ-س}^{حـ+س} ق(ص)\,د ص$ − $\frac{س}{٣}$ (ق (حـ − س) + ٤ ق (حـ) + ق (حـ + س)). هدفنا ان نثبت ان | خ (و) | $<$ $\frac{ى و^{٥}}{٩٠}$.

باجراء عملية التفاضل على خ (س) نرى ان

خ (٠) = خَ (٠) = خً (٠) = ٠،

$خ^{(٣)}(٠) = \frac{-س}{٣}(ق^{(٣)}(حـ + س) - ق^{(٣)}(حـ - س))$.

لهذا اذا كان س $>$ ٠ فان $خ^{(٣)}(س) = -٢س^{٢}\ \frac{ق^{(٤)}(د)}{٣}$ من نظرية القيمة المتوسطة

حيث د تحقق حـ − س $<$ د $<$ حـ + س.

نعرف الآن

$$هـ(س) = خ(س) - \frac{ى س^{٥}}{٩٠}، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤٦)$$

من نظرية تايلور لعنصر ما مـ ∋ (٠ ، و) نجد ان

$$هـ(و) = \frac{و^{٣}}{٦} هـ^{(٣)}(مـ) = \frac{و^{٣}}{٦}(خ^{(٣)}(مـ) - \frac{٢}{٣} ى مـ^{٢})$$

$$= \frac{و^{٣}}{٦}(-\frac{٢}{٣}.\ مـ^{٢} ق^{(٤)}(د) - \frac{٢}{٣} ى مـ^{٢})$$

$$= -\frac{و^{٣} مـ^{٢}}{٩}(ق^{(٤)}(د) + ى).$$

بما ان −ى $\geqslant$ ق $^{(٤)}$ (د) فانـه ينتـج ان هـ (و) $\geqslant$ ٠ ، لهذا ومن (٤٦) نحصـل على خ (و) $\geqslant$

$\frac{\text{ى و}}{٩٠}$. وبطريقة مشابهة نثبت ان $\frac{\text{ى و}}{٩٠} \geqslant$ خ (و)، وهكذا يتم برهان النظرية.

تمارين ١٠ ـ ٥

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ اثبت انه لِـ | س | $\leqslant$ ١ يكون

$$\text{جا}^{-1}\text{س} = \text{س} + \frac{١}{٢}\,\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{١}{٢}\,\frac{٣}{٤}\,\frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \frac{١}{٢}\,\frac{٣}{٤}\,\frac{٥}{٦}\,\frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \ldots$$

وبكتابة ص = جا^{-1}س، واستخدام صيغة $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٢\text{ن}+١}\text{ص}\ \text{د ص}$، اثبت ان

$$\frac{\pi^{٢}}{٨} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ص د ص} = ١ + \frac{١}{٣^{٢}} + \frac{١}{٥^{٢}} + \frac{١}{٧^{٢}} + \ldots$$

استنتج ان $\sum_{\text{ر}=١}^{\infty} \frac{١}{\text{ر}^{٢}} = \frac{\pi^{٢}}{٦}$.

٢ ـ اثبت ان $\sum_{\text{ر}=٢}^{\infty} \frac{١}{(\text{ر لور} \cdot \text{لو(لور)})}$ تباعدية، وان $\sum_{\text{ر}=٢}^{\infty} \frac{١}{\text{ر}\,(\text{لور})^{\text{م}}}$ تقاربية اذا كان م $>$ ١.

٣ ـ (١) في اختبار التكامل اثبت ان

$\text{حـ}_{\text{ن}} - \text{حـ}_{\text{ن}-١} \leqslant$ ق (ن) − ق (ن − ١) لِـ ن $\geqslant$ ٢، واستنتج انه اذا كان ق (م) $\to$ ٠ (م $\to \infty$) فان ٠ $\leqslant \text{حـ}_{\text{ن}} -$ م $\leqslant$ ق (ن) لِـ ن $\geqslant$ ١.

من هذا اثبت ان

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \ldots + \frac{١}{\text{ن}} = \text{لون} + \gamma + \text{ب}_{\text{ن}} \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

حيث $|ب_ن| \leqslant \frac{١}{ن}$ لِـ ن $\leqslant$ ١. جرت العادة على كتابة (*) على صورة:

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \ldots + \frac{١}{ن} = لون + \gamma + ر(\frac{١}{ن})$$

لأن $|ب_ن|$ هي من «رتبة» $\frac{١}{ن}$.

وبشكل عام اذا كانت ($س_ن$) ، ($ص_ن$) متتاليتين حيث $ص_ن \leqslant ٠$ لكل ن $\in$ N وكان يوجد ثابت م بحيث ان $|س_ن| \leqslant م\, ص_ن$ لكل ن $\in$ N ، فاننا نكتب $س_ن = ر(ص_ن)$.

(٢) باستخدام المجاميع الجزئية و(*) اثبت ان

$$\sum_{ر=١}^{\infty} \frac{١}{ر(٢ر+١)} = ٢ - ٢ لو٢ .$$

(٣) اثبت ان $\sum_{ر=١}^{ن} \frac{لور}{ر} = \frac{١}{٢} لو^٢ن + م + ر(\frac{لون}{ن})$.

٤ ـ يوجد في بحيرة عدد ثابت ن، غير معروف، من السمك. افرض انه تم اصطياد ١٠٠٠ سمكة ووضعت عليها علامات حمراء ثم اعيدت للبحيرة. ثم تم اصطياد ١٠٠٠ سمكة اخرى ووجد على ١٠٠ منها علامات حمراء.

الآن يمكن ان يكون ن = ١٩٠٠، اي انه بقي ٩٠٠ سمكة بالضبط في البحيرة. ان هذا غير محتمل ولكن ما هي درجة عدم الاحتمال هذه؟ افرض ان ل هوكون ١٠٠ سمكة حمراء من صيد ١٠٠٠، وافرض ان ن = ١٩٠٠.

$$ل = \binom{١٠٠٠}{١٠٠}\binom{١٩٠٠}{١٠٠٠}$$

اكتب ل بدلالة المضروبات واستخدم صيغة سترلنج لاثبات ان ل يساوي $١٠^{-٤٣٠}$، تقريبا، وهذ طبعا احتمال صغير جدا.

٥ ـ عرف م (٠) = ٠، م (ص) = ص + ت ص جا $\frac{\pi}{ص}$ لِـ ٠ $<$ ص $\leqslant$ ٢. اثبت ان م هو

منحنى غير قابل للقياس. ارشاد: لاثبات عدم القابلية للقياس خذ التجزئة:

$$ج = \{ ٠ ، \frac{٢}{٢ن - ١} ، \ldots ، \frac{٢}{٥} ، \frac{٢}{٣} ، ٢ \}$$

حيث ن ∈ N ، ن > ٢.

٦ ـ افرض ان أ > ٠ ثابت. ارسم مخططات المنحنيات (١) ، (٢) ، (٣) وتحقق من الطول المعطى:

(١) [الدوارة]

م (ع) = أ (ع − جاع) + ت أ (١ − جاع) حيث ٠ ≤ ع ≤ ٢ π ، طوله ٨أ.

(٢) [النجمة]

م (ع) = أ جتا^{٣}ع + ت أ جا^{٣}ع حيث ٠ ≤ ع ≤ ٢ π ، طوله ٦أ.

(٣) م (ع) = ع + ت ($\frac{ع^{٣}}{٦} + \frac{١}{٢ع}$) حيث ١ ≤ ع ≤ ٣، طوله $\frac{١٤}{٣}$.

٧ ـ افرض ان ق (س) = حـ + ك س + ل س^{٢} + مـ س^{٣} حيث حـ، ك ، ل ، مـ ثوابت.

اثبت أنه لهذا الاقتران تكون قاعدة سمبسون صحيحة تماما وذلك بحساب قيمة $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) دس

واثبات انها تساوي $\frac{ب - أ}{٦}$ { ق (أ) + ٤ ق (حـ) + ق (ب) } .

٨ ـ افرض ان | ق$^{(٤)}$ (س) | ≤ ي على (أ ، ب). قسِّم [أ ، ب] الى ٢ن اقساما متساوية حيث ب = أ + ٢ن و،وَس$_{ر}$ = أ + رول ٠ ≤ ر ≤ ٢ن. بكتابة

ل = $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س = $\sum_{ر=٠}^{ن-١} \int_{س_{٢ر}}^{س_{٢ر+٢}}$ ق (س) د س وَص$_{ر}$ = ق (س$_{ر}$)، اثبت ان:

$$\left| ل - \frac{و}{٣} \{ ص_٠ + ص_{٢ن} + ٤ (ص_١ + ص_٣ + \ldots) + ٢ (ص_٢ + ص_٤ + \ldots) \} \right|$$

$$\leqslant \frac{ى (ب - أ)^٥}{٢٨٨٠ ن^٤} .$$

٩ - [قاعدة شبه المنحرف]

اذا كان $| ق''(س) | \leqslant م$ على [أ ، ب] فاثبت ان

$$\left| \int_{أ}^{ب} ق (س) د س - \frac{ب - أ}{٢} \{ ق (أ) + ق (ب) \} \right| \leqslant \frac{م}{١٢} (ب - أ)^٣ .$$

بين هندسيا ، ان $\frac{ب - أ}{٢}$ (ق (أ) + ق (ب)) هي مساحة شبه المنحرف الذي رؤوسه على

النقاط (أ ، ٠) ، (ب ، ٠) ، (أ ، ق (أ)) ، (ب ، ق (ب)) .

١٠ - [π ، $\pi^٢$ غير نسبيين]

افرض ، ان كان ممكنا ، ان $\pi^٢ \in Q$ ، لنكتب $\pi^٢ = \frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب $\in N$. اختر

ن $\in N$ بحيث ان $\frac{\pi أ^ن}{ن!} < ١$ ، خذ $ق (س) = \frac{س^ن (١ - س)^ن}{ن!}$. اثبت ان

$ق^{(ر)} (٠)$ و $ق^{(ر)} (١)$ عددان صحيحان لـ ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . ومنه اثبت ان

$ل = \pi أ^ن \int_{٠}^{١} ق (س) جا \pi س د س$ عدد صحيـح .

اثـبت كذلـك ان $٠ < ل < \frac{\pi أ^ن}{ن!} < ١$ مما ينـاقض كون ل عددا

صحيحا . اذن $\pi^٢$ يجب ان يكون عدداً غير نسبي . استنتج ان π عدد غير نسبي .

الفصل الحادي عشر

اقترانات بمتغيرين حقيقيين

سنـدرس في هذا الفصـل الاتصـال وقـابليـة التفاضل لاقترانات ذات قيم حقيقية معرفة على مجموعات جزئية من المستوى $R \times R$. نعرف ان $R \times R$ هي مجموعة الازواج المرتبة (س ، ص) حيث س $\in R$ ، ص $\in R$. سوف نكتب $R^{٢}$ بدلا من $R \times R$. لهذا فان (٠ ، $\sqrt{٢}$) $\in R^{٢}$ ، (-١ ، -١) $\in R^{٢}$ ، (π ، e) $\in R^{٢}$

لتبسيط الامور سوف نحصر اهتمامنا باقترانات بمتغيرين حقيقيين اي باقترانات معرفة على مجمـوعـات جزئيـة من $R^{٢}$. ولن تقـوم اي مشكلة اسـاسية عند التعميم الى الاقترانات ذات ن من المتغيرات الحقيقية ، اي الاقترانات المعرفة على مجموعات جزئية من $R^{ن}$.

سنرمز لعناصر $R^{٢}$ عادة بالرمز ل = (أ ، ب) و م = (س ، ص). وسنعرف المسافة بين ل و م بالصيغة :

$$||ل - م|| = \sqrt{(أ - س)^٢ + (ب - ص)^٢} .$$

والرمز $\theta = (٠ ، ٠)$ يرمز الى عنصر الصفر في $R^٢$ (أي نقطة الاصل).

ونعرف معيار م على انه $||م|| = ||م - \theta||$ ، اذن

$$||م|| = ||(س ، ص)|| = \sqrt{س^٢ + ص^٢} ،$$

لكل م $\in R^٢$. لهذا فان $||م||$ هي المسافة بين م ونقطة الاصل في $R^٢$. وسنرمز للكرة التي مركزها ل ونصف قطرها نق بالرمز ك (ل ، نق) حيث ل $\in R^٢$، نق $>$ ٠ ، أي أن

$$ك (ل ، نق) = \{ م \in R^٢ \mid ||م - ل|| < نق \} .$$

وبصورة خاصة تسمى ك $(\theta ، ١)$ كرة الوحدة في $R^٢$ ، ونقول ان المجموعة الجزئية ح من $R^٢$ مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا كان لكل ل $\in$ ح يوجد كرة ك (ل ، نق) $\subset$ ح.

المثال ١ .

لتكن ح = $\{ م \in R^٢ \mid س > ٠ ، ص > ٠ \}$. سوف نبين ان ح مجموعة مفتوحة.

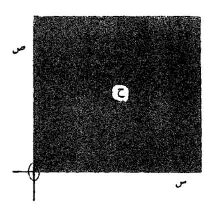
ان ح هي، هندسيا الجزء المظلل في الرسم (أنظر الصفحة القادمة)

الآن لنأخذ ل $\in$ ح ، اذن أ $>$ ٠ ، ب $>$ ٠. افرض ان نق = أص $\{$ أ ، ب $\}$ ، اذن نق $>$ ٠ و أ $\geqslant$ نق، ب $\geqslant$ نق. سوف نثبت ان ك (ل ، نق) $\subset$ ح ، ومن هذا نستنتج ان ح مفتوحة. لنأخذ م $\in$ ك (ل ،نق). اذن $||م - ل|| <$ نق، ومنها

$$|س - أ|^٢ + |ص - ب|^٢ < نق^٢،$$

وهـذا يعطـي $|س - أ| <$ نق وَ $|ص - ب| <$ نق. اذن س - أ $>$ -نـق وَص - ب $>$ -نق، لهذا فان س $>$ أ - نق $\geqslant$ ٠ وَص $>$ ب - نق $\geqslant$ ٠. وهذا يثبت ان س $>$ ٠، ص $>$ ٠ مما يعطي م = (س ، ص) $\in$ ح. من هذا ينتج ان ح مفتوحة. ويمكن وبسهولة إثبات ان ك (ل ، نق) مجموعة مفتوحة،

وذلك باستخدام تعريف المجموعة المفتوحة. فكل ما نفعله هو اخذ ى $\in$ ك (ل ، نق) ونثبت



انه يوجد ك (ى ، نقَ) ⊂ ك (ل ، نق) حيث نقَ > ٠ . ويساعد الرسم على اختيار نقَ مناسب .

لنعرف الآن اتصال الاقتران الحقيقي :

الاقتران المتصل على R^2 .

افرض ان سه مجموعة جزئية من R^2 وغير خالية ، وافرض ان ق : سه ⟵ R . نقول ان ق متصل على ل ∈ سه اذا وفقط اذا كان لكل ∈ > ٠ يوجد δ = δ (ل ، ∈) > ٠ بحيث ان ||م − ل|| > δ وم ∈ سه تعطي |ق (ل) − ق (م)| > ∈ .

المثال ٢ .

عرف ق : R^2 ⟵ R بـ ق (م) = س ص . اذن ق متصل على R^2 اي ان ق متصل على كل نقطة ل ∈ R^2 . لاثبات ذلك افرض ان ∈ > ٠ وخذ ل ∈ R^2 وعرف حـ = ١ + |أ| + |ب| ، δ = أص { ١ ، ∈ / حـ } . اذن ||م − ل|| > δ تعطي |س − أ| > δ و |ص − ب| > δ . اذن وبكتابة

س ص − أ ب = (س − أ) (ص − ب) + ب (س − أ) + أ (ص − ب) ،

وبما ان |س − أ| > ١ ، نحصل على

$$|ق(م) - ق(ل)| \leqslant |ص - ب| + |ب| |س - أ| + |أ| |ص - ب|$$

$$< \frac{\epsilon}{حـ} + |ب| \frac{\epsilon}{حـ} + |أ| \frac{\epsilon}{حـ} = \epsilon$$

اذن ق متصل على ل.

المثال ٣.

عرف ق : $R^2 \longrightarrow R$ بـ ق (م) = $\frac{٢ س ص}{س^٢ + ص^٢}$ لِـ م $\neq$ θ وق (θ) = ٠. اذن ق غير متصــل على θ . لوكان متصــلا على θ لوجــد δ > ٠ بحيث ان ||م|| < δ تعطي |ق (م)| < ١. الآن اختر م بحيث ان س = ص = $\frac{\delta}{٣}$. اذن ||م||^٢ = س^٢ + ص^٢ < $\frac{\delta^٢}{٤}$. اذن ||م|| < δ . ومنه |ق (م)| < ١. ولكن اخترنا م بحيث ان ق (م) = $\frac{٢ س^٢}{س^٢ + س^٢}$ = ١. وهذا يناقض | ق (م) | < ١.

لاحظ هنا ان الاقتران الذي نحصل عليه بتثبيت ص = ٠ هو اقتران متصل لِـ س $\in R$. اي ان هـ : $R \longrightarrow R$ بـ هـ (س) = ق (س ، ٠) اذا كان س $\neq$ ٠، هـ (٠) = ق (٠ ، ٠) هو اقتـران متصـل. كذلـك ق (٠ ، ص) هو اقتران متصل لِـ ص $\in R$. يوضح هذا المثال انه يمكن لاقتران بمتغيرين حقيقيين ان يكون متصلا عند نقطة بكلٍّ من المتغيرين على حدة (اي بمتغير واحد مع تثبيت الآخر) دون ان يكون متصلا عند تلك النقطة كاقتران بمتغيرين.

ندرس الآن فكـرة التفـاضـل لاقـتران بمتغـيرين حقيقيـين. ولتبسيـط الامور سنقصر اهتـمامنـا على الاقـترانـات المعـرفـة على مجموعات جزئية مفتوحة من R^2 . ومعظم الحالات العملية الهامة هي من هذا النوع.

الاقترانات في R^2 القابلة للتفاضل

افرض ان ح مجموعة غير خالية مفتوحة جزئية من R^2 . وافرض ان ل ∈ ح وان ق : ح ← R . نقول ان ق قابل للتفاضل عند ل اذا وفقط اذا وجد عددان حقيقيان حـ، و بحيث انه لكل ε > ٠ يوجد δ = δ (ε ، ل) > ٠ بحيث ان ||م - ل|| < δ وم ∈ ح تعطي |ق (م) - ق (ل) - حـ (س - أ) - و (ص - ب)| ≤ ε ||م - ل|| .

المشتقة التفاضلية

اذا كان ق : ح ← R قابلا للتفاضل عند ل ∈ ح فاننا نعرف مشتقة ق عند ل على انها الزوج المرتب (حـ ، و) .

التفاضلة

اذا كان ق : ح ← R قابلا للتفاضل عند ل ∈ ح فان التفاضلة د ق ل لـ ق عند ل تعرف على انها الاقتران د ق ل : R^2 ← R المعطى بـ

د ق ل (م) = حـ س + و ص، حيث م = (س ، ص) ∈ R^2 .

المثال ٤ .

عرّف ق : R^2 ← R بالصيغة : ق (م) = ||م||^{٢} . ان ق قابل للتفاضل على R^2، اي ان ق قابل للتفاضل عند كل نقطة ل ∈ R^2 . ومشتقة ق عند ل هي (٢أ ، ٢ب) . والتفاضلة معطاة بـ د ق ل (م) = ٢ أ س + ٢ ب ص .

لاثبات ذلك ندرس

|ق (م) - ق (ل) - ٢ أ (س - أ) - ٢ ب (ص - ب)|

= |س^{٢} + ص^{٢} - أ^{٢} - ب^{٢} - ٢أ (س - أ) - ٢ب (ص - ب)|

= (س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = ||م - ل||^{٢} ≤ ε ||م - ل|| ،

على شرط ان نأخــذ $||$ ل – م $|| < \epsilon$. لهذا يمكن اخــذ $\epsilon = \delta$ في تعــريف قابلية التفاضل في هذا المثال.

ومن السهـل اثبـات ان المشتقـة (حـ ، و) وحيدة في الحالة العامة. ولكن لا يبدو واضحا كيف نستطيع معرفة المشتقة. مثلا كيف عرفنا ان المشتقة في المثال ٤ هي (٢أ ، ٢ب)؟

يكمن حل هذه المسألـة في فكـرة المشتقـة الجـزئية. فببساطة يمكن ايجاد المشتقة الجزئية بالنسبة لِـ س لاقتران ق (س ، ص) بمتغيرين حقيقيين س ، ص ، بتثبيت ص ومفاضلة ق بالنسبة الى س.

على سبيـل المثـال، اذا كان ق (س ، ص) = $س^٢$ + $ص^٢$ كما في المثـال ٤ ، فاننـا نثبت ص أي نعامل ص على انه ثابت، فيكون $د_{س}$ ق (س ، ص) = ٢س لأن $د_{س}$ $س^٢$ = ٢س ، $د_{س}$ $ص^٢$ = ٠ ، حيث $د_{س}$ تعني المشتقة بالنسبة الى س. هناك رموز اخرى تعني $د_{س}$ ق (س ، ص) وهي $ق_{س}$ (س ، ص) أو $ق_{س}$ (م).

وبالمثل نستطيع ايجاد المشتقة الجزئية لِـ ق بالنسبة الى ص، بتثبيت س. لهذا اذا كان ق (س ، ص) = $س^٢$ + $ص^٢$ فانه، باستخدام الرموز المختلفة، يكون

$$د_{ص}\ ق\ (م) = ٢ص = ق_{ص}\ (م) = \frac{\partial\ ق}{\partial\ ص}\ (م)$$

سنرى الآن كيف نستطيع ايجاد المشتقة في المثال ٤ . لأي نقطة م = (س ، ص) نجد ان المشتقـات الجـزئيـة هي $ق_{س}$ (م) = ٢س وَ$ق_{ص}$ (م) = ٢ص. اذن عنـد ل = (أ ، ب) تكون مشتقة ق هي (٢أ ، ٢ب) اي الزوج المرتب المكون من قيم المشتقات الجزئية عند ل.

وقبـل ان نثبت ان مشتقـة اي اقـتران قابـل للتفـاضل ق عند ل هي ($ق_{س}$ (ل) ، $ق_{ص}$ (ل)) سوف نعطي امثلة توضح طرق ايجاد المشتقات الجزئية لاقترانات ابتدائية.

المثال ٥ .

عرّف ق ، هـ من $R^٢$ الى R بـ

ق = ق (س ، ص) = $e^{س}$ جتــاص و هـ = هـ (س ، ص) = جاس جتــاز (ص) .
كذلك، عرف ى من $R \times R^{+}$ الى R بـ

ى = ى (س ، ص) = $ص^{س}$.

اذن $ق_{س}$ = $e^{س}$ جتــاص، $ق_{ص}$ = $-e^{س}$ جاص، $هـ_{س}$ = جتــاس جتــاز (ص)، $هـ_{ص}$ = جاس جاز (ص)، $ى_{س}$ = $ص^{س}$ لوص، $ى_{ص}$ = س $ص^{س-1}$.

والملاحظة التالية جديرة بالذكر. افرض اننا وجدنا المشتقة الجزئية الثانية، اي $ق_{س س}$ = $د_{س}$ ($ق_{س}$) و$ق_{ص ص}$ = $د_{ص}$ ($ق_{ص}$). كذلك بالنسبة لِـ هـ. اذن

$ق_{س س}$ = $e^{س}$ جتاص ، $ق_{ص ص}$ = $-e^{س}$ جتاص ،

إذن $ق_{س س}$ + $ق_{ص ص}$ = ٠ لكل (س ، ص). كذلك،

$هـ_{س س}$ = -جاس جتاز (ص)، $هـ_{ص ص}$ = جاس جتاز (ص) ،

ومنه $هـ_{س س}$ + $هـ_{ص ص}$ = ٠ لكل (س ، ص)

يسمى الاقتران ك الذي يحقق

$ك_{س س}$ + $ك_{ص ص}$ = ٠ . . . . (١)

لكـل (س ، ص) في مجمـوعـة مفتـوحـة ح في R^{2} ، اقـترانـا توافقيـا على ح. ان الاقترانات التوافقية هامة في العديد من فروع الرياضيات التطبيقية. وتسمى المعادلة (١) بمعادلة لابلاس.

وليست جميع الاقترانات توافقية طبعا، فمثلا اذا كان

ق (س ، ص) = $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ فان $ق_{س س}$ + $ق_{ص ص}$ = ٤ .

ويجد القاريء في التمارين ١١ ملاحظات عن العلاقة بين $ق_{س ص}$ و$ق_{ص س}$.

سنثبت الآن انه اذا كان ق قابلا للتفاضل عند ل = (أ ، ب) فان مشتقته تكون (حـ ، و) = ($ق_{س}$ (ل) ، $ق_{ص}$ (ل)).

النظرية ١ .

افرض ان ق قابل للتفاضل عند ل ∋ ح، ومشتقته هي (حـ ، و).

اذن

$$\text{حـ} = \text{نها}_{\text{مـ} \leftarrow \cdot} \frac{\text{ق}(\text{أ} + \text{مـ} ، \text{ب}) - \text{ق}(\text{أ} ، \text{ب})}{\text{مـ}} \quad \text{وَ}$$

$$\text{و} = \text{نها}_{\text{ف} \leftarrow \cdot} \frac{\text{ق}(\text{أ} ، \text{ب} + \text{ف}) - \text{ق}(\text{أ} ، \text{ب})}{\text{ف}} ،$$

اي ان حـ هي قيمـة مشتقـة ق الجـزئيـة بالنسبة الى س عند (أ ، ب)، كذلك و هي قيمة مشتقة ق الجزئية بالنسبة الى ص عند (أ ، ب).

البرهان.

خذ ϵ > ٠ . بما ان ق قابل للتفاضل عند ل فانه يوجد حـ ، و، δ > ٠ بحيث ان م ∋ ح و ||م - ل|| < δ تعطي

$$|\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(\text{ل}) - \text{حـ}(\text{س} - \text{أ}) - \text{و}(\text{ص} - \text{ب})| \leqslant \frac{\epsilon}{٢} ||\text{م} - \text{ل}|| \quad . \; . \; . \; . \; . \; (٢)$$

كذلك، بما ان ح مفتوحة فانه يوجد ك (ل ، نق) ∋ ح. افرض ان ٠ < |مـ| < أ ص { δ ، نق } وخذ م = (أ + مـ ، ب). اذن ||م - ل||^{٢} = |مـ|^{٢} ولهذا فان م ∋ ح وَ||م - ل|| < δ . اذن نحصل من (٢) على

$$|\text{ق}(\text{أ} + \text{مـ} ، \text{ب}) - \text{ق}(\text{أ} ، \text{ب}) - \text{حـ مـ}| \leqslant \frac{\epsilon}{٢} |\text{مـ}| < \epsilon \, |\text{مـ}| ،$$

ومنه

$$\text{حـ} = \text{نها}_{\text{مـ} \leftarrow \cdot} \frac{\text{ق}(\text{أ} + \text{مـ} ، \text{ب}) - \text{ق}(\text{أ} ، \text{ب})}{\text{مـ}} .$$

وبطـريقـة مشـابهـة، نثبت ان و هي قيمة المشتقة الجزئية بالنسبة الى ص عند (أ ، ب) مما يثبت النظرية.

نرى من النظرية ١ ان لكل اقتران قابل للتفاضل يوجد مشتقات جزئية، ولكن العكس غير صحيح، بشكل عام كما نرى من المثال ٣. ففي هذه الحالة لكل مـ ≠ ٠، ف ≠ ٠ نحصل على ق (مـ ، ٠) = ٠ وق (٠ ، ف) = ٠.

اذن

$$ق_س(\theta) = نها_{مـ \leftarrow ٠} \frac{ق(مـ ، ٠) - ق(٠ ، ٠)}{مـ} = نها_{مـ \leftarrow ٠} \frac{٠}{مـ} = ٠$$

$$ق_ص(\theta) = نها_{ف \leftarrow ٠} \frac{ق(٠ ، ف) - ق(٠ ، ٠)}{ف} = نها_{ف \leftarrow ٠} \frac{٠}{ف} = ٠$$

اذن المشتقتـان الجـزئيتـان موجـودتـان عند θ = (٠ ، ٠). ولكن ق غير قابل للتفاضل عند θ، لاننا نعـرف ان ق غير متصـل عنـد θ. بالطبـع ان قابليـة التفاضل عند ل تعطي الاتصال عند ل بشكل عام. لانه اذا كانت $||ل - م|| < \delta$ فان

$$|ق(م) - ق(ل) - حـ(س - أ) - و(ص - ب)| \leqslant \epsilon\, ||م - ل||$$ ولذلك

فان $||م - ل|| <$ أص $\{\delta ، \frac{\epsilon}{|حـ| + |و| + \epsilon}\}$ تعطي

$$|ق(م) - ق(ل)| \leqslant (|حـ| + |و| + \epsilon)\, ||م - ل|| < \epsilon.$$

تعريف بديل لقابلية التفاضل.

تعطي النظـريـة ٢ التـاليـة تعـريفا بديلا لقابلية التفاضل لاقتران بمتغيرين حقيقيين. سوف نثبت بالنظرية ان ق : ح ← R قابل للتفاضل عند ل ∋ ح اذا وفقط اذا وجد اقتران خطي ى : $R^2 \rightarrow R$ بحيث انه لكل $\epsilon > ٠$ يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان $||م - ل|| < \delta$ وم ∋ ح تعطي

$$|ق(م) - ق(ل) - ى(م - ل)| \leqslant \epsilon\, ||م - ل|| \quad \ldots\ldots\ldots (٣)$$

ينسب هذا التعـريف البـديـل الى الـرياضي الفرنسي م. فريشيه. ان هذا التعريف هام لانه

يجعـل بالامكـان تعميم فكـرة قابليـة التفاضل الى الفضاءات الخطية المعيارية . فقد اصبحت دراسة قابلية تفاضل الاقترانات بين فضاءات خطية معيارية جزءا هاما من تحليل الاقترانات .

يمكن استخدام تعريف فريشيه بشكل خاص لتعريف قابلية تفاضل اقتران ما من R^2 الى R^2 . ولعمل ذلك كل ما نفعله هو استبدال القيمة المطلقة في الطرف الايمن لـ (٣) باشارة المعيار. وبعبارة ادق : اذا كانت ح مفتوحة في R^2 وكان ق : ح ⟵ R^2 ، وَل ∋ ح فاننا نقـول ان ق قابـل للتفـاضـل عنـد ل اذا وفقط اذا كان يوجد اقتران خطي ى : R^2 ⟵ R^2 بحيث انه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta$ (ل ، ϵ) > 0 بحيث ان ||م − ل|| $< \delta$ وم ∋ ح تعطي

$$||ق (م) - ق (ل) - ى (م - ل)|| \leqslant \epsilon ||م - ل|| .$$

النظرية ٢ .

لتكن ح مجمـوعـة غير خاليـة مفتـوحـة جزئية من R^2 وافرض ان ق : ح ⟵ R اذن يكون ق قابلا للتفاضل عند ل ∋ ح اذا وفقط اذا كان يوجد اقتران خطي ى : R^2 ⟵ R بحيث انه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta$ (ل ، ϵ) بحيث ان ||م − ل|| $< \delta$ وم ∋ ح تعطي (٣).

البرهان .

تذكـر ان R^2 هو فضاء خطي حقيقي حيث نستخـدم تعـاريف الجمـع والضرب القياسي ، العادية المعطاة بـ

م + ل = (س ، ص) + (أ ، ب) = (س + أ ، ص + ب)،

وحـ م = حـ (س ، ص) = (حـ س ، حـ ص) لكل حـ ∋ R .

كذلك م − ل = (س − أ ، ص − ب)

افـرض الآن ان ق قابـل للتفـاضل عند ل ∋ ح وافرض ان (حـ ، و) هي مشتقته عند (أ ، ب). لنعرف الاقتران ى : R^2 ⟵ R بـ

ى (م) = حـ س + و ص لكل م = (س ، ص) $\in R^2$.

اذن ى اقتران خطي لأنه اذا كان $د_1$ ، $د_2$ $\in R$ واخذنا أي م ، ل $\in R^2$، فان

$د_1م + د_2ل = (د_1س + د_2أ ، د_1ص + د_2ب)$ ،

واذن

$$ى (د_1م + د_2ل) = حـ (د_1س + د_2أ) + و (د_1ص + د_2ب)$$

$$= د_1حـ س + د_1و ص + د_2حـ أ + د_2و ب$$

$$= د_1 ى (م) + د_2 ى (ل) .$$

لكن ى (م − ل) = حـ (س − أ) + و (ص − ب)، لهذا فان تعريف قابلية التفاضل الاصلي يعطي (٣).

وبالعكس، افرض انه يوجد اقتران خطي ى : $R^2 \leftarrow R$ بحيث ان (٣) تتحقق. وعلينا ان نجد (حـ ، و) مناسبة وتحقق التعريف الاصلي لقابلية التفاضل.

لنأخذ العناصر $ر_1$ = (١ ، ٠) ، $ر_2$ = (٠ ، ١) في R^2. فاذا كان م = (س ، ص)، اي عنصر في R^2، فان م = س $ر_1$ + ص $ر_2$. وبما ان ى اقتران خطي وس ، ص $\in R$ فانه ينتج ان

ى (م) = س ى ($ر_1$) + ص ى ($ر_2$) . . . . (٤)

لنكتب حـ = ى ($ر_1$)، و= ي ($ر_2$) فبما ان (٤) صحيحة لأي عنصر م $\in R^2$ فاننا نحصل على

ى (م − ل) = (س − أ) حـ + (ص − ب) و . . . . (٥)

اذن، من (٣) و(٥) نرى ان ق قابل للتفاضل كما عرفنا في السابق. وهذا يثبت النظرية.

ولنمهد للنظرية التالية (وتدعى قاعدة السلسلة أو قاعدة اقتران الاقتران) بمثال.

المثال ٦ .

افرض ان ق (م) = $||م||^2$ اي ان ق (س ، ص) = $س^2 + ص^2$. نعرف من المثال ٤ ان ق قابل للتفاضل على R^2 وق$_س$ = ٢س، ق$_ص$ = ٢ص عند م $\in R^2$. افرض ان س

، ص هما اقترانان في ع ∋ R معرفان بـ س (ع) = ع^{٢} وص (ع) = جاع .
اذن، ق (س ، ص) = ع^{٤} + جا^{٢}ع كاقتران في ع . لهذا فان

$$\frac{دق}{دع} = ٤ع^{٣} + ٢جاع جتاع \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

الآن سَ (ع) = ٢ع، صَ (ع) = جتاع، وبما ان ق$_{س}$ = ٢ س = ٢ ع^{٢} ، ق$_{ص}$ = ٢ص = ٢جاع، فاننا نحصل على

$$ق_{س} \frac{دس}{دع} + ق_{ص} \frac{دص}{دع} = ٢ع^{٢} \cdot ٢ع + ٢ جاع \cdot جتاع \quad \ldots\ldots \quad (٧)$$

$$= ٤ ع^{٣} + ٢ جا ع جتا ع$$

ومن (٦) و (٧) نحصل على

$$\frac{دق}{دع} = ق_{س} \frac{دس}{دع} + ق_{ص} \frac{دص}{دع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨)$$

ان الصيغة (٨) ليست مصادفة وسنثبت الآن انه يمكن تعميمها تحت شروط مناسبة للتفاضل .

النظرية ٣ [قاعدة السلسلة] .

افرض ان سه مجموعة غير خالية مفتوحة وجزئية من R وان ح مجموعة غير خالية مفتوحة وجزئية من R^{٢} . افرض كذلك ان س : سه ← R وص : سه ← R قابلان للتفاضل عند ع. ∋ سه، وان ل = (س (ع.)، ص (ع.)) ∋ ح. اذن اذا كان ق : ح ← R قابلا للتفاضل عند ل فان

$$\frac{دق}{دع} = ق_{س} \frac{دس}{دع} + ق_{ص} \frac{دص}{دع} \text{ ، عند ع. .}$$

البرهان.

لنكتب $ح = ق_س (ل)$، $و = ق_ص (ل)$، Δ س = س (ع) − س (ع.)، Δ ص = ص (ع) − ص (ع.)، Δ ع = ع − ع. . خذ اي $\in > ٠$. اذن يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان م $\ni$ ح و $||م - ل|| < \delta$ تعطي

$$|ق (م) - ق (ل) - ح (س - أ) - و (ص - ب)| < \in ||م - ل||.$$

الآن س ، ص متصلان عند ع. . لهذا فانه يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان

$$|\Delta ع| < \delta_١ \text{ تعطي } |\Delta س| < \frac{\delta}{٢} \text{ وَ } |\Delta ص| < \frac{\delta}{٢}.$$

اذن

$$||م - ل|| < \delta \text{ حيث } م = (س (ع) ، ص (ع)).$$

وبما ان ح مفتوحة فانه يوجد ك (ل ، نق) $\subset$ ح من اتصال س وَص عند ع. ، نجد انه

يوجد $\delta_٢ > ٠$ بحيث ان $|\Delta ع| < \delta_٢$ تعطي $|\Delta س| < \frac{نق}{٢}$ وَ$|\Delta ص| < \frac{نق}{٢}$

ومنه $||م - ل|| <$ نق. لهذا فان م $\ni$ ك (ل ، نق) ومنه م $\ni$ ح.

كذلك وبما ان س ، ص قابلان للتفاضل عند ع. فانه يوجد $\delta_٣ > ٠$ بحيث ان $|\Delta ع| < \delta_٣$ تعطي

$$|\Delta س - سَ(ع.) \Delta ع| \leqslant \in |\Delta ع| ، |\Delta ص - صَ(ع.) \Delta ع| \leqslant \in |\Delta ع|$$

وَ

$$\frac{||م - ل||}{|\Delta ع|} < ١ + ى،$$

حيث $ى = \sqrt{\{سَ(ع.)\}^٢ + \{صَ(ع.)\}^٢}$.

لنأخذ مـ = أص $\{\delta_١ ، \delta_٢ ، \delta_٣\}$ وَ $٠ < |\Delta ع| <$ مـ. ولنكتب

Δق = ق (م) − ق (ل) . اذن

$$\left| \frac{\Delta ق}{\Delta ع} - حـ سَ (ع_.) - و صَ (ع_.) \right|$$

$$= \left| \frac{\Delta ق}{\Delta ع} - حـ (سَ (ع_.) - \frac{\Delta س}{\Delta ع} + \frac{\Delta س}{\Delta ع}) - و (صَ (ع_.) - \frac{\Delta ص}{\Delta ع}$$

$$+ \frac{\Delta ص}{\Delta ع}) \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{\Delta ق - حـ \Delta س + و \Delta ص}{\Delta ع} \right| + |حـ| \, |سَ (ع_.) - \frac{\Delta س}{\Delta ع}| + |و| \, |صَ$$

$$(ع.) - \frac{\Delta ص}{\Delta ع} |$$

$$\leqslant \epsilon \frac{\|م - ل\|}{|\Delta ع|} + |حـ| \, \epsilon + |و| \, \epsilon$$

$$< \epsilon (١ + ى + |حـ| + |و|) .$$

من هذا ينتج

$$\frac{\Delta ق}{\Delta ع} \longleftarrow حـ سَ (ع_.) = ق_س \frac{دس}{دع} + ق_ص \frac{دص}{دع}$$

عندما ع ← ع. . وهذا يثبت النظرية .

المثال ٧ [نتيجة اويلر للاقترانات المتجانسة] .

افرض ان ق : ح ← R وان ق متجانس من الدرجة مـ > ٠ ، اي ان

$$ق (ع م) = ع^{مـ} ق (م)$$

لكل م ∈ ح وَع > ٠ بحيث ان ع م ∈ ح . اذن إذا كان ق قابلاً للتفاضل عند ل∈ ح ، فاننا نحصل على نتيجة اويلر للاقترانات المتصلة

$$أ ق_س (ل) + ب ق_ص (ل) = مـ ق (ل) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩)$$

لاثبات (٩) افرض ان س = أ ع، ص = ب ع. من النظرية ٣ نحصل على

$$\frac{دق}{دع} = ق_{س} \frac{دس}{دع} + ق_{ص} \frac{دص}{دع}$$

$$= أ ق_{س} (أ ع ، ب ع) + ب ق_{ص} (أ ع ، ب ع) \quad ...... (١٠)$$

عند النقطة ع.

لكن ق (س ، ص) = ق (أ ع ، ب ع) = ع ^{م} ق (أ ، ب)، لهذا فان

$$\frac{دق}{دع} = مـ ع^{م-١} ق (أ ، ب) \quad ...... (١١)$$

بوضع ع = ١ في (١٠) و (١١) نحصل على (٩).

وكمثال على نتيجة اويلر، خذ ق = ق (س ، ص) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} ص. اذن ق متجانس من الدرجة ٣، ولكل (س ، ص) $\in R^2$ يكون

$$س ق_{س} + ص ق_{ص} = س (٦س^{٢} - ٦ س ص) + ص (-٣ س^{٢})$$
$$= ٣ ق.$$

الاقترانات الضمنية

يتكرر ظهور معادلات مثل جا(س + ص) = س ص، حيث يكون من المستحيل ايجاد قيمة ص بدلالة س. ليس هناك ما يؤكد وجود حل في الحالة العامة. على سبيل المثال فان س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٠ لا يتحقق لاي س ، ص في R.

والنظرية التالية تعطينا شروطا كافية لكي يمكن للمعادلة ق (س ، ص) = ٠ أن تعرف ص كاقتران صريح في س. والحل إنما هو حل «محلي»، اي ان ص = هـ (س) حيث س في فترة ما فقط حول النقطة أ حيث ق (أ ، ب) = ٠.

النظرية ٤ [نظرية الاقتران الضمني].

افرض ان ح مربع مفتوح (مركزه النقطة ل = (أ ، ب)) في R^2. وافرض ان ق : ح ⟵ R يحقق

(١) ق قابل للتفاضل على ح،

(٢) ق (ل) = ٠،

(٣) $ق_{ص}$ (م) > ٠ لكل م ∈ ح.

اذن يوجد فترة ف = (أ − δ ، أ + δ) في R، ويوجد اقتران قابل للتفاضل ك : ف ⟵ R بحيث انه لكل س ∈ ف،

$$ق\ (س\ ،\ ك\ (س)) = ٠\ \text{و}\ \frac{دك}{دس} = -\frac{ق_{س}}{ق_{ص}}.$$

البرهان.

لنأخذ مربعاً مغلقاً $س_{ه}$ مركزه ل بحيث ان $س_{ه}$ ⊂ ح. من (١)، ق قابل للتفاضل على $س_{ه}$، اذن متصل على $س_{ه}$ افرض ان $س_{ه}$ معرف بـ أ − ر ≤ س ≤ أ + ر و ب − ر ≤ ص ≤ ب + ر حيث ر > ٠.

بتطبيق نظرية القيمة الوسطى على ق (أ ، ص) نحصل على

ق (أ ، ب + ر) − ق (أ ، ب) = ر $ق_{ص}$ (أ ، مـ)

حيث مـ ∈ (ب ، ب + ر). اذن ق (أ ، ب + ر) > ٠ من (٢) و (٣).

كذلك، ق (أ ، ب − ر) < ٠.

بما ان ق متصل على (أ ، ب + ر) وبما ان ق (أ ، ب + ر) > ٠ ينتج انه يوجد $δ_1$ > ٠ بحيث ان

| س − أ | < $δ_1$ تعطي ق (س ، ب + ر) > ٠.

كذلك يوجد δ > ٠ بحيث ان | س - أ | < δ تعطي ق (س ، ب - ر) < ٠ .

بوضع δ = أ ص { δ ، δ } ينتج ان | س - أ | < δ تعطي

ق (س ، ب + ر) > ٠ > ق (س ، ب - ر) . . . . (١٢)

الآن نثبت نقطة س بحيث ان | س - أ | < δ ، ونعتبر ق (س ، ص) كاقتران في ص حيث ب - ر ≤ ص ≤ ب + ر.

من اتصال ق (س ، ص) على الفترة المغلقة [ب - ر ، ب + ر]، ومن (١٢)، ومن نظرية القيمة المتوسطة للاقترانات المتصلة، نجد انه يوجد عدد ك $\in$ (ب - ر ، ب + ر) بحيث ان ق (س ، ك) = ٠. من الواضح ان ك يعتمد على س عامة.

لكن (٣) تعطي ان ق (س ، ص) متزايد بالضبط كاقتران في ص، اذن ك وحيد.

لهذا فانه لكل س $\in$ ف = (أ - δ ، أ - δ) يوجد عنصر وحيد ك (س)، اذن حصلنا على اقتران ك : ف ← R . كذلك ق (س ، ك (س)) = ٠ لكل س $\in$ ف.

الخطوة التالية هي اثبات ان ك متصل على ف ثم نثبت ان ك قابل للتفاضل وان

$$ك' (س) = \frac{- ق_{س}}{ق_{ص}}.$$

لاثبات ان ك متصل عند ع = ف، خذ $\in$ > ٠، بحيث ان

ق (ع ، ك (ع) - $\in$) < ق (ع ، ك (ع)) < ق (ع ، ك (ع) + $\in$).

بما ان ق (ع ، ك (ع)) = ٠ وبما ان ق متصل عند (ع ، ك (ع) - $\in$) و(ع ، ك (ع) + $\in$) فانه يوجد ى يحقق

٠ < ى < δ بحيث ان | س - ع | < ى تعطي

ق (س ، ك (ع) - $\in$) < ٠ < ق (س ، ك (ع) + $\in$) . . . (١٣)

هدا يعطي ك (س) < ك (ع) + $\in$ ، بغير ذلك يكون ك (س) ≤ ك (ع) + $\in$ وعندها

٠ = ق (س ، ك (س)) ≤ ق (س ، ك (ع) + $\in$)

مما يناقض (١٣). كذلك ك (س) $>$ ك (ع) − ϵ. لهذا فان | ك (س) − ك (ع) | $<$ ϵ ،
وينتج ان ق متصل على ع.

اخيرا ثبت س $\in$ ف وخذ ط $\neq$ ٠ بحيث ان س + ط $\in$ ف.

اكتب

ر = ك (س + ط) − ك (س).

اذن وبما ان $\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ر}^2} \leqslant$ | ط | + | ر | فان (١) تعطي

| ق (س + ط ك (س + ط)) − ق (س ، ك (س)) − حـ ط − ور | $\leqslant$ ϵ (| ط | + | ر |).

لـ | ط | صغيرة الى درجة كافية (تذكر ان ط ← ٠ تعطي ر ← ٠ من اتصال ك). بالطبع ان
(حـ ، و) هي مشتقة ق عند (س ، ك (س)).

بما ان ق (س + ط ، ك (س + ط)) = ق (س ، ك (س)) = ٠ فانه ينتج ان

| حـ ط + ور | $\leqslant$ ϵ (| ط | + | ر |) . . . . . (١٥)

لكل | ط | صغيرة لدرجة كافية . من (٣) نحصل على حـ $>$ ٠ ، اختر ٠ $<$ ϵ $<$ $\frac{\text{حـ}}{٢}$.

اذن (١٥) تعطي

| حـ ط + ور | $\leqslant$ $\frac{\text{و}}{٢}$ | ط | + $\frac{\text{و}}{٢}$ | ر | ،

لهذا فان

| ور | $\leqslant$ $\frac{\text{و}}{٢}$ | ط | + $\frac{\text{و}}{٢}$ | ر | + | حـ ط | ،

واذن | ر | $\leqslant$ $\left(\frac{\text{و} + ٢ |\text{حـ}|}{\text{و}}\right)$ | ط | = ن | ط | ، مثلا . . . (١٦)

من (١٥) و (١٦) نرى ان

| $\frac{\text{حـ}}{\text{و}}$ + $\frac{\text{ر}}{\text{ط}}$ | $\leqslant$ ϵ $\left(\frac{١ + \text{ن}}{\text{و}}\right)$.

اذن ، باستخدام (١٤) نحصل على

$$\frac{ك(س+ط) - ك(س)}{ط} \longleftarrow -\frac{ح}{و} \quad (ط \longleftarrow ٠)،$$

اي ان $كَ(س) = -\frac{ق_س}{ق_ص}$ ، مما يثبت النظرية.

المثال ٨.

لندرس المعادلة س جتاص − ص جتاس = ١ .

اذا عرفنا ق (س ، ص) = ١ + ص جتاس − س جتاص يمكن ان نطبق النظرية ٤ . لانـه من الـواضـح ان ق قابـل للتفـاضل على $R^{٢}$. كذلك ق (٠ ، −١) = ٠ ، $ق_ص$ = جتاس − س جاص > ٠ لكل (س ، ص) بالقرب من (٠ ، −١).

اذن

$$\frac{د ص}{د س} = -\frac{ق_س}{ق_ص} = \frac{جتاص + ص جاس}{جتاص + س جاص} .$$

في فترة مفتوحة ف تحوي الصفر.

تمارين ١١

(تجد في نهاية الكتاب ارشادات لحل بعض من هذه التمارين)

١ ـ عرّف ق : $R^{٢} \longrightarrow R$ بـ ق (م) = ||م|| حيث م = (س ، ص). اثبت ان ق متصل على $R^{٢}$ ، ولكن ق غير قابل للتفاضل عند θ = (٠ ، ٠).

٢ ـ افرض ان ن ≥ ٢ ، ن ∈ N . عرّف ق : $R^{٢} \longrightarrow R$ بـ ق (م) = $|س^{ن} - ص^{ن}|$. جد مشتقات ق الجزئية عند θ ومنه اثبت ان ق قابل للتفاضل عند θ .

٣ ـ افرض ان ن ∈ N ، ن ≥ ٣. عرّف ق : $R^{٢} \longrightarrow R$ بـ ق (م) = $(س ص)^{ن} ||م||^{-٢}$ اذا كان ||م|| > ٠ وَق (θ) = ٠. اثبت ان ق قابل للتفاضل عند θ .

٤ ـ افرض ان ح مجموعة غير خالية مفتوحة جزئية من R^2 . افرض كذلك ان ق : ح ⟵ R بحيث ان $ق_س$ موجودة عند ل ∋ ح وان $ق_ص$ كاقتران في م = (س ، ص) متصل عند ل. اثبت ان ق قابل للتفاضل عند ل.

٥ ـ عرّف اقترانات ذات قيم حقيقية بالصيغ ق ، ك ، ى على R^2 بـ

ق = $e^{(س^2 - ص^2)}$ جتا٢س ص، ك = $e^{(س + ص)}$ جا (س − ص) ،

ى = $س^2 - ص^2 + ص^3 + ٣س ص^2$.

اي من هذه الاقترانات اقتران توافقي ؟

٦ ـ يمكن توسيع قاعدة السلسلة كما يلي:

افرض انه تحت شروط تفاضلية مناسبة كان ق اقترانا في س وَص، وكان س ، ص اقترانين في ع ، مـ. فيكون ق اقترانا في ع وَمـ وَيكون

$ق_{مـ} = ق_س س_{مـ} + ق_ص ص_{مـ}$

$ق_ع = ق_س س_ع + ق_ص ص_ع$.

تحقق من صحة هذه النتيجة للحالة الخاصة ق (س ، ص) = س ص، س = مـ جتاع ، ص = مـ جاع .

٧ ـ افرض ان $س^2 = أ ص + ب ص^2 + حـ ص^3$ حيث أ ، ب ، حـ ثوابت وَ أ > ٠ .

استخدم نظرية الاقتران الضمني لاثبات ان ص = $\frac{س^2}{أ} - \frac{ب س^4}{أ^3} + ...$ لِـ س قرب الصفر.

٨ ـ في المثال ٨، حيث ق (م) = ١ + ص جتاس − س جتاص، اثبت ان $ق_ص$ (م) > ٠ على المقطع الرأسي المعرف بِـ

{(س ، ص) | |س| ⩽ $\frac{\pi}{٦}$ } . اثبت كذلك انه لِـ |س| ⩽ $\frac{\pi}{٦}$ ، ق (س ، ٠)

$<$ ٠ وَق (س ، $-\frac{\pi ٣}{٢}$) $<$ ٠ . اذن اثبت ان ك معرف (على الاقل) على ($-\frac{\pi}{٦}$ ،

$\frac{\pi}{٦}$) وان $-\frac{\pi ٣}{٢}$ $<$ ك (س) $<$ ٠ هناك .

٩ - (١) افرض ان ق : ح $\leftarrow$ R بحيث ان $ق_{س ص}$ (م) و$ق_{ص س}$ (م) موجودتان لكل م $\in$ ح . اذا كان $ق_{س ص}$ ، $ق_{ص س}$ متصلين عند ل $\in$ ح، فاثبت ان

$ق_{س ص}$ (ل) = $ق_{ص س}$ (ل) .

(٢) عرّف ي : $R^{٢} \leftarrow R$ بـ ي (م) = س ص ($س^{٢}$ - $ص^{٢}$) $||م||^{-٢}$ لِـ م $\neq$ θ وي (θ) = ٠ . اثبت ان $ي_{س ص}$ (θ) = ١، ولكن $ي_{ص س}$ (θ) = -١ .

تمارين متنوعة

١ ـ افرض ان سه حلقة ذات عنصر محايد: و. نسمي أ ∈ سه وحدة اذا كان يوجد ب ∈ سه بحيث ان أ ب = ب أ = و. اثبت ان مجموعة جميع الوحدات في سه هي زمرة مع عملية الضرب.

عين مجموعة جميع الوحدات عندما تكون سه = Z ، وكذلك عندما تكون سه حلقة اعداد جاوس الصحيحة.

٢ ـ ليكن ق : سه ← سَه اقترانا محافظا بين حلقتين سه وسَه. عرّف نو(ق) = { س ∈ سه | ق (س) = θ } ، حيث θ هو صفر الحلقة سَه. اذا كانت سه تبديلية فاثبت ان نو (ق) مثالية في سه.

٣ ـ **[متطابقة جاكوبي]** . افـرض ان سه حلقة وعرّف [س ، ص] = س ص − ص س

لكل س ، ص ∋ سه . اثبت ان

[س ، [ص ، ع]] + [ص ، [ع ، س]] + [ع ، [س ، ص]] = θ .

٤ ـ (١) افرض ان سه حلقة وس ∋ سه . نسمي س عنصرا صفريا اذا وفقط اذا كان يوجد ن ∋ N بحيث ان $س^{ن}$ = θ ، قد تعتمد ن على س. افرض ان ص ، ع عنصران صفريان وان ص ع = ع ص. اثبت ان ص + ع عنصر صفري.

(٢) اثبت ان العناصر الصفرية في حلقة تبديلية تكون مثالية.

(٣) افرض ان $م_٣$ (R) هي حلقة المصفوفات من الرتبة ٣ × ٣ ومدخلاتها من R . اثبت ان المصفوفة

$$\begin{pmatrix} صفر & أ & ب \\ صفر & صفر & حـ \\ صفر & صفر & صفر \end{pmatrix}$$

عنصر صفري في $م_٣$ (R).

٥ ـ اذا كانت أ ، ب ، حـ اعدادا حقيقية موجبة، اثبت ان

(أ + ب + حـ) (ب حـ + حـ أ + أ ب) ≥ ٩أ ب حـ، جد شرطا ضروريا وكافيا لتحقيق المساواة.

٦ ـ افرض ان أ ، ب ، ع ، ى ∋ C بحيث ان |أ| + |ب| ≤ ١ . اذا كان ر ≥ ١ ، فاثبت ان

$(|أ ع| + |ب ى|)^{ر} \leq |أ| |ع|^{ر} + |ب| |ى|^{ر}$.

٧ ـ افرض ان ($س_{ن}$) هي متتالية من الاعداد الحقيقية المحصورة من اعلى بحيث ان $س_{ن}$ ≤ ٢$س_{ن+١}$ لكل ن ∋ N . هل يجب ان تكون ($س_{ن}$) تقاربية ؟

٨ ـ افرض ان ($س_{ن}$) هي متتالية من الاعداد الحقيقية المحصورة من اسفل بحيث ان $س_{ن+٢}$

$\geqslant \frac{س_{ن+1} + س_ن}{2}$ لكل ن $\in$ N . اثبت ان (س $_ن$) تقاربية .

٩ ـ افرض ان (س $_ن$) هي متتالية من الاعداد الحقيقية . اثبت ان (س ن) تكون تقاربية اذا وفقط اذا كانت : (١) (س $_ن$) محصورة من أعلى و(٢) لكل و > ٠ يوجد ن. = ن. (و) بحيث ان س $_م$ > س $_ن$ - و لكل م > ن $\geqslant$ ن.

١٠ ـ افرض ان أ $_ن$ > ٠ لكل ن $\in$ N ، واكتب س $_ن$ = أ$_1$ + أ$_2$ + . . . + أ$_ن$. اذا كان $\sum$ أ$_ن$ تباعدية فاثبت ان $\sum \frac{أ_ن}{س_ن}$ تباعدية . استنتج ان $\sum$ ن$^{-1}$ تباعدية .

١١ ـ افرض ان (أ $_ن$) متتالية من الاعداد غير السالبة بحيث ان $\sum$ أ $_ن$ تباعدية. اثبت انه يوجد (ب $_ن$) بحيث ان ٠ $\leqslant$ ب $_ن$ $\leqslant$ أ $_ن$ و $\sum$ ب $_ن$ تباعدية ولكن $\sum \frac{ب_ن}{ن}$ تقاربية .

ارشاد : ادرس الحالتين أ $_ن$ ← ٠ و أ $_ن$ $\not\to$ ٠ .

١٢ ـ افرض ان س $_ن$ = ١ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ + . . . + $\frac{1}{ن}$ لكل ن $\in$ N . اثبت ان المتسلسلة اللانهائية $\sum$ سا (-٢ س $_ن$) تقاربية .

١٣ ـ افرض ان ن، م $\in$ N بحيث أن ن < م و $\frac{ن}{م}$ ← أ (ن ← ∞). عرّف

$$س (م ، ن) = \sum_{ر=1}^{م} \frac{2 ن}{ن^2 - ر^2}$$

حيث يكون مفهوما ان الحد ر = ن محذوف من المجموع .

اثبت انه اذا كان أ > ١ فان س (م ، ن) ← لو $\frac{1 + أ}{1 - أ}$ عندما ن ← ∞ ، واذا كان أ = ١ فان س (م ، ن) ← ∞ عندما ن ← ∞ .

١٤ ـ افرض ان ق : R ← R اقتران لا يساوي الصفر، وان ق (س ، ص) = ق (س) + ق (ص) وق (س ، ص) = ق (س) ق (ص) لكل س ، ص $\in$ R . اثبت ان ق (س) = س

لكل س ∋ R . ارشاد: اثبت ان ق (أ) = أ لكل أ ∋ Q ، ثم استخدم كثافة Q في R

١٥ ـ ليكن ق : [أ ، ب] ← Z اقترانا متصلا على الفترة المغلقة [أ ، ب]، حيث Z هي مجموعة الاعداد الصحيحة. اثبت ان ق ثابت على [أ ، ب].

١٦ ـ ليكن ق : [أ ، ب] ← R ثابتا محليا. اي انه لكل س ∋ [أ ، ب] يوجد عدد حقيقي موجب نق يعتمد على س بحيث ان ق ثابت على ك (س ، نق). اثبت ان ق ثابت على [أ ، ب].

١٧ ـ عرّف ق : R ← R بـ ق (س) = سا [(س^{٢} − ١)$^{-١}$] اذا كان | س | > ١ وَق (س) = ٠ اذا كان | س | ≤ ١. اثبت ان ق قابل للتفاضل على R . ارسم مخطط ص = ق (س).

١٨ ـ افرض ان حـ ، د عددان حقيقيان ثابتان بحيث ان ٠ < حـ < د < ٢π . اثبت انه يوجد ثابت موجب ي بحيث ان

$$\left| \sum_{ر=١}^{ن} جا (ر س) \right| < ي$$

لكل ن ∋ N ، لكل س ∋ [حـ ، د].

افرض ان (أ$_ر$) متتالية وتيرية متناقصة بحيث ان أ$_ر$ ← ٠ (ر ← ∞). اثبت انه لكل ϵ > ٠ يوجد ن$_٠$ (ϵ) > ٠ بحيث انه لكل س ∋ [حـ ، د] وكل ن ≤ مـ ≤ ن$_٠$ نحصل على

$$\left| \sum_{ر=ن}^{م} أ_ر جا (ر س) \right| < \epsilon .$$

استنتج ان ق (س) = $\sum_{ر=١}^{\infty}$ أ$_ر$ جا (ر س) تقاربية لكل س ∋ [حـ ، د]. اثبت كذلك ان ق متصل على [حـ ، د].

١٩ ـ عرّف ق : R ← R بـ ق (س) = $\frac{جا س}{س}$ اذا كان س ≠ ٠ وَق (٠) = ١ . اثبت انه لكل س ∋ R ،

$$ق (س) = نها_{ن \to \infty} جتا \frac{س}{٢} \cdot جتا \frac{س}{٢^{٢}} \ldots جتا \frac{س}{٢^{ن}} .$$

استنتج انه اذا كان أ = $\frac{1}{2}$، فان

$$\sqrt{أ}\sqrt{أ + أ\sqrt{أ}}\sqrt{أ + أ\sqrt{أ + أ\sqrt{أ}}} \ldots = \frac{2}{\pi}.$$

حيث النقاط الثلاث ترمز الى نهاية حاصل الضرب النوني الجزئي.

٢٠ ـ افرض ان ق : (أ ، ب) ⟵ R قابل للتفاضل على (أ ، ب) وان قَ (س) ⟵ ل (س ⟵ أ+). اثبت ان النهاية اليمنى ق (أ+) موجودة.

الآن عرِّف هـ : [أ ، ب) ⟵ R بـ هـ (أ) = ق (أ+) و هـ (س) = ق (س) لكل س ∋ (أ ، ب). لهذا فان هـ تكون امتدادا لِـ ق يحوي نقطة النهاية أ. اثبت ان هـ قابل للتفاضل على [أ ، ب) وان هَـ (أ) = ل.

٢١ ـ يسمى الاقتران ق : (أ ، ب) ⟵ R اقترانا محدبا على (أ ، ب) اذا وفقط اذا كان

ق (λ س + μ ص) $\leqslant$ λ ق (س) + μ ق (ص)

لكل س ، ص ∋ (أ ، ب) و $\lambda \geqslant 0$ ، $\mu \geqslant 0$ ، $\lambda + \mu = 1$.

اذا كان ق محدبا على (أ ، ب)، فاثبت ان

$$\frac{ق (س) - ق (ص)}{س - ص} \leqslant \frac{ق (حـ) - ق (س)}{حـ - س} ،$$

لِـ أ < ص < س < حـ < ب. اذن اثبت انه اذا كان ق محدبا وقابلا للتفاضل على (أ ، ب) فإن مشتقته تكون متزايدة على (أ ، ب).

٢٢ ـ افرض ان أ ، ب ، حـ ∋ R بحيث ان

جتاأ + جتاب + جتاحـ = جاأ + جاب + جاحـ = ٠

اثبت ان جتا٣أ + جتا٣ب + جتا٣حـ = ٣جتا (أ + ب + حـ)، وان

جا ٣أ + جا ٣ب + جا ٣حـ = ٣ جا (أ + ب + حـ).

٢٣ - اثبت انه اذا كان ن $\in$ N و أ > ٣ فان

$$\int_{\frac{1}{ن}}^{1} \frac{جا \frac{س}{ن}}{س^{أ}} دس \leftarrow ٠ \quad (ن \leftarrow \infty).$$

٢٤ - افرض ان ق : [أ ، ب] ← R متصل ومتناقص على [أ ، ب].

عرّف هـ : (أ ، ب] ← R بـ

$$هـ (س) = \frac{١}{س - أ} \int_{أ}^{س} ق (ص) \, د ص$$

اثبت ان هـ متناقص على (أ ، ب].

٢٥ - **[نظرية القيمة المتوسطة لاقتران بمتغيرين]**

افرض ان ح مجموعة غير خالية مفتوحة جزئية من $R^{٢}$

وافرض ان ق : ح ← R قابل للتفاضل على ح.

افرض ان ل ، ى نقطتان في ح وان القطعة المستقيمة ، م ، الواصلة بينهما تحقق م $\subset$ ح. اثبت انه يوجد نقطة ط $\in$ م بحيث ان

ق (ى) - ق (ل) = د ق $_{ط}$ (ى - ل)،

حيث ترمز د ق $_{ط}$ الى تفاضلة ق عند ط.

إرشادات لحل بعض التمارين

تمارين ١ - ١

١ -

ف	ن	ف ⟷ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

٢ ـ أ ، حـ) تحصيل حاصل ، د) تناقص ، ب) ليس ايا منها.

٥ ـ نعم سيفوز الفريق.

٦ ـ أ) ص ، ب) خ

٧ ـ أ) ص ، ب) خ ، حـ) ص ، د) ص ، هـ) خ

لان ع^{٣} − ١ = (ع − ١) (ع^{٢} + ع + ١). لهذا فان

$$ع = \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢} \neq ١$$ تحقق ع^{٣} = ١.

٩ ـ المحاضر كسول وينهي جميع الطلبة عملهم.

تمارين ١ ـ ٢

١ ـ افــرض ان صه ⊆ سه . اذا كان س ∈ صه فان س ∈ سه ومنـــه س ∈ سه ∩ صه
واذن صه ⊆ سه ∩ صه.
ولكن سه ∩ صه ⊆ صه دائما. اذن صه = سه ∩ صه. وبالعكس، افرض ان سه ∩ صه =
صه. اذن س ∈ صه تعطي س ∈ سه ∩ صه واذن س ∈ سه ومنه صه ⊆ سه

٢ ـ صه$_{١}$ = سه$_{١}$ ، صه$_{٢}$ = سه$_{١}$ / سه$_{٢}$.

٣ . ∅ ، { أ } ، { ب } ، { حـ } ، { أ ، ب } ، { أ ، حـ } ، { ب ، حـ } ، سه.

٤ ـ سه$_{١}$ ، سه$_{٣}$ خاليتان

٦ ـ س < ص و ص < ع تعطي س < ع. ولكن
س < س خطأ و س < ص تعطي ص < س خطأ

٧ ـ س تقبل القسمة على ص.

٨ ـ سه = { س ∈ R | س < ٠ } ∪ { س ∈ R | س > ٠ }

٩ ـ ب) س − ص = أ ن ، سَ − صَ = ب ن . اذن
س سَ − ص صَ = ن (ص ب + صَ أ) + أ ب ن^{٢} . اذن س سَ ≡ ص صَ (مض ن).
حـ) ١٦ ≡ ١ (مض ٥) تعطي ١٦^{٦٣} ≡ ١ (مض ٥). اي ان ٢^{٢٥٢} ≡ ١ (مض ٥).

١٠ ـ ق (ح) = ق (ع) + ق (ح / ع) ≥ ق (ع).

١١ ـ حـ) اذا كان س $\in$ ى $\cap$ ح فان س $\in$ ى وس $\in$ ح. اذن كـ$_{ى \cap ح}$ (س) = كـ$_{ى}$ (س) = كـ$_{ح}$ (س) = ١ إذا كان س $\notin$ ى $\cap$ ح فان كـ$_{ى \cap ح}$ (س) = ٠. اذن س $\in$ ىَ $\cap$ حَ، اي ان س $\in$ ىَ أوس $\in$ حَ. لهذا فان
كـ$_{ى}$ (س) = ٠ أوكـ$_{ح}$ (س) = ٠ ، اذن كـ$_{ى}$ (س) ٠ كـ$_{ح}$ (س) = ٠.

تمارين ١ ـ ٣

١ ـ مـ$_{١}$ مـ$_{٢}$ = مـ$_{٢}$ لان مـ$_{١}$ هوعنصر محايد ومـ$_{١}$ مـ$_{٢}$ = مـ$_{١}$ لان مـ$_{٢}$ هوعنصر محايد. لهذا فان مـ$_{١}$ = مـ$_{٢}$. اذا كان س $*$ ص = مـ فان

$\hat{ش}$ $*$ (س $*$ ص) = $\hat{ش}$ $*$ مـ = $\hat{ش}$.

اي ان ($\hat{ش}$ $*$ س) $*$ ص = $\hat{ش}$ ومنه ص = $\hat{ش}$.

٢ ـ (ص$^{-١}$ س$^{-١}$) (س ص) = ص$^{-١}$ (س$^{-١}$ س) ص = ص$^{-١}$ ص = مـ، اذن ص$^{-١}$ س$^{-١}$ = (س ص)$^{-١}$.

٤ ـ مـ = ن ، $\hat{ش}$ = ٢ن − س.

٦ ـ العنصر المحايد (١ ، ٠).

٨ ـ اذا كان ص = ق (مـ) فان ص = ق (مـ $*$ مـ) = ص $\square$ ص ، ص $\square$ $\hat{ص}$ = (ص $\square$ ص) $\square$ ($\hat{ص}$). أي ان مـ$_{ى}$ = ص = ق (مـ).

١٠ ـ لا يوجد زمرة جزئية ى رتبتها ن $>$ ١. لانه ان وجد فانه يوجد س $\in$ ى، س $\neq$ ١.
لهذا فان س^{٢} ، س^{٣} ، . . . س^{ن} $\in$ ى . واذن
١ ، س ، س^{٢} ، . . . ، س^{ن} هي ن + ١ من عناصر ى المختلفة.

١٤ ـ م$_{٢}$ (R) ليست حقلا لانه على سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

اي ان المصفوفة $\begin{pmatrix} ! & \\ & . \end{pmatrix}$ التي لا تساوي الصفر لا يوجد لها نظير.

١٧ ـ و = (٠ ، ٠ ، ٠ ، ... ، ٠)، ـس = (ـس$_1$ ، ـس$_2$ ، ... ، ـس$_ن$).

١٨ ـ س = (٢ ، ١ ، ـ٢).

١٩ ـ لنفرض ان س ، ص ∈ R^3 ، أ ، ب ∈ R : اذن

ق (أ س + ب ص) = (أ س$_2$ + ب ص$_2$ ، ـأ س$_1$ ـ ب ص$_1$ ، أ س$_3$ + ب ص$_3$).

= (أ س$_2$ ، ـأ س$_1$ ، أ س$_3$) + (ب ص$_2$ ، ـب ص$_1$ ، ب ص$_3$)

= أ ق (س) + ب ق (ص).

لهذا فان ق هو اقتران خطي. اذا كان ق (س) = ق (ص) فان (س$_2$ ، ـس$_1$ ، س$_3$) = (ص$_2$ ، ـص$_1$ ، ص$_3$)

ومنه س$_2$ = ص$_2$ ، ـس$_1$ = ـص$_1$ ، س$_3$ = ص$_3$. لهذا فان س$_ر$ = ص$_ر$، ر = ١ ، ٢ ، ٣. أي س = ص ومنه ق واحد لواحد. اذا كان

ص = (ص$_1$ ، ص$_2$ ، ص$_3$) ∈ R^3 فان

س = (ـص$_2$ ، ص$_1$ ، ص$_3$) تحقق ق (س) = ص. لهذا فان ق شامل.

٢٠ ـ م = (١ ، ١ ، ... ، ١) ، س = (١ ، ٠ ، ٠ ، ... ، ٠).

٢١ ـ م = (١ ، و) واستخدام أ و = و ، ق س و = و.

تمارين ٢ ـ ١

١ ـ بما أن ١ ⩽ ١ ، فإنّ ١ ∈ سه. إفرض الآن أن س ∈ سه. إذن سَ = س + ١ > ١ ومنه فإن سَ ∈ سه. ينتج إذن بالاستقراء ان س = N ، وبالتالي فإن س ∈ N تتضمن ان س ∈ سه. اذن س ⩾ ١ لكل س ∈ N .

٤ ـ لو وُجِدَت ن ∈ N بمثل هذه الخاصية ، لكانت ن > ١ ، اذن ن = ١ + س لقيمة ما س ∈ N . ولكن س ⩾ ١ ، من التمرين (١). اذن ١ + س ⩾ ١ + ١ = ٢ ، ومنه ن ⩾ ٢ ، مما يناقض الفرضية ن > ٢ .

٧ ـ ج (١١) غير صحيحة.

٨ ـ اذا كانت أ = ب، فإن أ^{٢} + ب^{٢} = ٢أ^{٢} = ٢أب. اذا كانت أ > ب، فإن أ = ب + جـ، أ^{٢} = ب^{٢} + ٢ ب جـ + حـ^{٢} ، أ^{٢} + ب^{٢} = ٢أب + حـ^{٢}، ومنه أ^{٢} + ب^{٢} > ٢أب. وبالمثل اذا كانت أ < ب.

٩ ـ ١ (١^{٢} + ٥) قابل للقسمة على ٦؛ واذا كان ن (ن^{٢} + ٥) = ٦م، فإن (ن + ١) ((ن + ١)^{٢} + ٥) = ٦م + ٣ن (ن + ١) + ٦ = ٦م + ٦ل (لأن ن (ن + ١)عددزوجي). الآن استخدم الاستقراء. لاحظ ان بالامكان استخدام الاستقراء لاثبات أن ن (ن + ١) زوجي، اي قابل للقسمة على ٢.

تمارين ٢ ـ ٢

١ ـ واضح أن أ = ٠ هي حل للمعادلة أ^{٢} = أ. افرض اذن أن أ ≠ ٠. من قانون الاختزال في Z، نستنتج من أ^{٢} = أ أن أ = ١.

٢ ـ ق (٢ن) = ن، ق (٢ن − ١) = ١ − ن.

٦ ـ لا. مثلاً، (−١)^{٢} > (٠)^{٢}.

٧ ـ ٤ (أ^{٢} + أب + ب^{٢}) = (٢أ + ب)^{٢} + ٣ ب^{٢} ⩾ ٠، وإذن أ^{٢} + أب + ب^{٢} ⩾ ٠. الآن استخدم أ^{٣} − ب^{٣} = (أ − ب) (أ^{٢} + أب + ب^{٢}).

تمارين ٢ ـ ٣

١ ـ | ب^{٢} − ٢ | = | ٢ ن^{٢} − م^{٢} | / (م + ن)^{٢} > | ٢ ن^{٢} − م^{٢} | /ن^{٢}.

٤ ـ إذا كان | س | > ٠، فإنه يوجد ن ∈ N بحيث أن ن | س | > ١، ومنه فإن | س | > $\frac{١}{ن}$، مما يناقض | س | ⩽ $\frac{١}{ن}$ لكل ن ∈ N .

٥ ـ ١ + ص = ١ + ص؛ وإذا كان (١ + ص)^{ن} ⩾ ١ + ن ص، فإن (١ + ص)$^{ن+١}$ ⩾ (١ + ن ص) (١ + ص). أي أن (١ + ص)$^{ن+١}$ ⩾ ١ + (ن + ١) ص + ص^{٢} ⩾ ١ + (ن + ١)ص

٩ ـ م = ١ .

١٠ ـ ١ - أ = ب + جـ، . . . ، و

(ب + جـ) (أ + جـ) (أ + ب) - ٨ أ ب جـ

= أ (ب^{٢} + جـ^{٢}) + ب (أ^{٢} + جـ^{٢}) + جـ (أ^{٢} + ب^{٢}) - ٦ أ ب جـ

⩾ ٢ أ ب جـ + ٢ أ ب جـ + ٢ أ ب جـ - ٦ أ ب جـ

= ٠ .

اذا كان (١ - أ) (١ - ب) (١ - جـ) = ٨ أ ب جـ، فان

أ (ب - جـ)^{٢} + ب (أ - جـ)^{٢} + جـ (أ - ب)^{٢} = ٠، ومنه

أ = ب = جـ.

١١ ـ ٠ ⩽ (ب - ٢أ)^{٢} تتضمن ٤ ب أ - ٤ أ^{٢} ⩽ ب^{٢}. إذن

أ (ب - أ) ⩽ $(\frac{ب}{٢})^{٢}$.

تمارين ٢ ـ ٤

١ ـ هناك ٢١ زوجاً في الأول من آب.

٢ ـ خذ أي عدد نسبي موجب δ وضع ∈ = أص (δ ، $\frac{١}{٢}$) (أي أن ∈ هي أصغر العددين δ ، $\frac{١}{٢}$). إذن

٠ < ∈ ⩽ $\frac{١}{٢}$ < ١، ومنه | س$_{ن}$ - أ | < ∈ ⩽ δ لكل ن ⩾ ن$_{٠}$. إذن س$_{ن}$ ← أ

٤ ـ س$_{ن}$ ← أ تتضمن | س$_{ن}$ - أ | < ∈ لكل ن ⩾ ن$_{٠}$. ولكن

| | س$_{ن}$ | - | أ | | ⩽ | س$_{ن}$ - أ | ، ومنه | | س$_{ن}$ | - | أ | | < ∈ لكل ن ⩾ ن$_{٠}$. اذن

| س$_{ن}$ | ← | أ | .

المتتالية ص = (١ ، -١ ، ١ ، -١ ، . . .) مثال مناسب.

٥ ـ من الصحيح ان نقول أن كلاً من $\frac{١}{ن}$ و $\frac{١}{ن^٢}$ تؤول الى الصفر (عندما ن ← ∞).

من الصحيح كذلك ان نقول ان $\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن^٢} \leftarrow ٠$ (عندما ن ← ∞). ولكننا لم نعّرف على الاطلاق عبارات مثل

$س_ن \leftarrow ص_ن$ (ن ← ∞).

والحقيقة ان السهم (←) قد استعمل فقط في العبارات

$س_ن \leftarrow$ أ (حيث أ عدد ثابت)،

$س_ن \leftarrow ∞$ ،

$س_ن \leftarrow -∞$.

٦ ـ يوجد ل = $ن_٠$ (١) بحيث أن $|س_ن - س_م| < ١$ لكل ن، م ≼ ل. ولكن $|س_ن - س_م|$ هي عدد صحيح غير سالب، إذن $|س_ن - س_م| = ٠$ لكل ن ، م ≼ ل.

اذن $س_ن \leftarrow س_ل$ (ن ← ∞).

٧ ـ (١) ليكن ∈ > ٠ ، واختر $ن_٠$ ∋ N بحيث أن $ن_٠ > \frac{١}{∈}$.

اذن ن ≼ $ن_٠$ تتضمن :

$$\left| (٣ن + ٢)/(٢ن + ١) - \frac{٣}{٢} \right| = \frac{١}{٤ن + ٢} < \frac{١}{ن} < ∈ .$$

(٣) ليكن أ > ٠، واختر $ن_٠$ > أ + ٤، وخذ ن ≼ $ن_٠$. اذن

$\frac{٢^ن}{ن}$ ≼ ن (لأن ن > ٤) ومنه $\frac{٢^ن}{ن}$ > أ.

٩ ـ ليكن ∈ > ٠. اذن يوجد $ن_٠$ بحيث ان $س_ن > \frac{١}{∈}$ لكل ن ≼ $ن_٠$. اذن

$$\left| \frac{١}{س_ن} \right| = \frac{١}{س_ن} < ∈$$ ومنه

$\frac{1}{س_ن} \leftarrow ٠$.

المثال $\left(\frac{1}{س_ن}\right) = \left(1 ، \frac{-1}{2} ، \frac{1}{3} ، \frac{-1}{4} ، \ldots\right)$ يبين ان العكس غير صحيح.

١٢ ـ بما أن $\frac{|أ|}{2} > ٠$، فانه يوجد $ن_٠ = ن_٠\left(\frac{|أ|}{2}\right)$ بحيث ان

$|س_ن - أ| < \frac{|أ|}{2}$ لكل $ن \geqslant ن_٠$. من المتباينة المثلثية نحصل على

$|أ| \leqslant |أ - س_ن| + |س_ن| < \frac{|أ|}{2} + |س_ن|$،

ومنه $|س_ن| > \frac{|أ|}{2}$ لكل $ن \geqslant ن_٠$. الآن لتكن $\epsilon > ٠$. بما ان $س_ن \leftarrow أ$، فانه يوجد

$م_٠$ بحيث ان $|س_ن - أ| < \frac{\epsilon أ^2}{2}$ لكل $ن \geqslant م_٠$. اذن $ن \geqslant ن_٠ + م_٠$ تتضمن

$$\left|\frac{1}{س_ن} - \frac{1}{أ}\right| = \frac{|س_ن - أ|}{|س_ن||أ|} < \frac{2|س_ن - أ|}{أ^2} < \epsilon،$$

ومنه $\frac{1}{س_ن} \leftarrow \frac{1}{أ}$.

١٣ ـ اذا كانت $أ < د$ فان $د - أ > ٠$ ومنه

$|ع_ن - أ| < د - أ$ لكل $ن > ب + ن_٠$.

اذن $ع_ن - أ < د - أ$، مما يناقض الفرضية $ع_ن > د$ لكل $ن > ب$.

تمارين ٢ ـ ٥

٣ ـ $|س + ص|^2 = (|س| + |ص|)^2 \longleftrightarrow س ص = |س||ص| \longleftrightarrow س ص \geqslant ٠$

٦ ـ $(أ - ب + \sqrt{2})^2 = حـ$، $2(أ - ب)\sqrt{2} = حـ - 2 - (أ - ب)^2$، ومنه $أ = ب$ والا كانت $\sqrt{2} \in Q$

٧ ـ $(أ - ب)^2 \geqslant ٠$ تعطي $أ^2 + ب^2 \geqslant 2أب$. اذا كان $أ^2 + ب^2 = 2أب$ فان $(أ - ب)^2 = ٠$ ومنه $أ = ب$. وبالعكس

أ = ب تعطي $أ^2 + ب^2 = 2ب^2 = 2أب$.

١٠ ـ ١ + ن س = $(1 + س)^ن$ تعطي ١ + ن س ⩽ ١ + ن س + (ن − ١) $س^2$ ومنه $س^2 = 0$

١١ ـ اذا كان س > ٠، خذ ∈ = س. اذن س > س، تناقض. اذن س ⩾ ٠. الآن لكل ∈ > ٠ يوجد $ن_0$ بحيث أن

$|أ - أ_ن| < \frac{\epsilon}{2}$ ، $|ب_ن - ب| < \frac{\epsilon}{2}$ لكل ن > $ن_0$.

إذن أ − ب < $أ_ن - ب_ن$ + ∈ ⩽ ∈ ومنه أ − ب ⩽ ٠ اي ان أ ⩽ ب.

١٢ ـ $\delta = \frac{1}{3}$.

١٤ ـ $س_{ن+1} = 1 + \frac{ن(ن+1)}{2} \leftarrow \infty$

تمارين ٢ ـ ٦

١ ـ $\frac{3 - 4ت}{2 - ت} = \frac{(3 - 4ت)(2 + ت)}{(2 - ت)(2 + ت)} = \frac{10 - 5ت}{5} = 2 - ت$.

٣ ـ الجمل التالية متكافئة: $ع = \bar{ع}$ ، س + ت ص = س − ت ص ، ت ص = − ت ص ، ٢ص = ٠ ، ص = ٠.

٦ ـ ١ + ت و −٣ + ت

٧ ـ استخدم $|ع_1 + ع_2|^2 = (ع_1 + ع_2)(\bar{ع}_1 + \bar{ع}_2)$.

١١ ـ |س + ت ص| ⩽ |س| + |ت ص| = |س| + |ص| . من المتباينة المثلثية.
وَ$(|س| + |ص|)^2 \leqslant س^2 + ص^2 + 2|س ص| \leqslant س^2 + ص^2 + س^2 + ص^2$
$= 2|س + ت ص|^2$ ،

واذن | س | + | ص | $\leqslant \sqrt{2}$ | س + ت ص | .

١٣ - $ع_٢ \bar{ع}_٢ - ١ = (|ع_١|^٢ - ١)(١ - |أ|^٢)$ $(١ - \bar{أ} ع_١)^٢$.

تمارين ٢ - ٧

١ - المتباينة المثلثية مع ٢ حـ د $\leqslant$ $حـ^٢ + د^٢$.

٢ - س = $\frac{ن}{ن + ١}$ في متباينة برنولي.

٤ - استخدم متباينة الوسط الحسابي - الوسط الهندسي .

٥ - أستخدم $|\sum أ_ر ب_ر| \leqslant \sum |أ_ر ب_ر|$ ومتباينة هولدر.

٦ - (٢) خذ و = ٢ ، ن = م = ٣ في (١). كذلك أ = ب = حـ = $٢ \sqrt{\frac{٢}{٣}}$.

٨ - استخدم المتباينة المثلثية ومتباينة منكوفسكي .

١٠ - $أ_ن^{حـ} \leqslant \sum أ_ر^{حـ} \leqslant ن أ_ن^{حـ}$.

تمارين ٣ - ١

١ - (أ) المجموعة هي { -٢ ، ١ } ، لهذا فان ص.ح.ع هو ١ ، ك.ح.د هو -٢ .

(ب) لنسمِّ المجموعة سه. اذن (ك.ح.د) سه = ٠ و(ص.ح.ع) سه = $\sqrt{٢}$. لاثبات الاخيرة خذ س ∋ سه . اذا كان س > $\sqrt{٢}$. اذن $س^٢$ > ٢ مما يناقض س ∋ سه ومنه س < $\sqrt{٢}$ لهذا فان $\sqrt{٢}$ هو حد علوي لِـ سه . الآن لنأخذ و > ٠ . اذن $\sqrt{٢}$ - و < $\sqrt{٢}$

لهذا وباستخدام كثافة Q في R فانه يوجد س ∈ Q^+ بحيث ان $\sqrt{2}$ - و < س < $\sqrt{2}$
ولكن

٠ < س < $\sqrt{2}$ تعطي $س^2$ < ٢ . لهذا فانه يوجد س ∈ سه بحيث ان س > $\sqrt{2}$ - و

فاذن (ص.ح.ع) س = $\sqrt{2}$.

(حـ) ك.ح.د هو صفر، ص.ح.ع هو ١ .

(د) افرض ان س = (أ + ب + حـ) ($أ^{-1}$ + $ب^{-1}$ + $حـ^{-1}$) = ٣ + (أ $ب^{-1}$ + ب $أ^{-1}$) + . . . ٠ ثم استخدم $أ^2$ + $ب^2$ ≥ ٢أب لاثبات ان ك.ح.د هو ٩ . لا يوجد ص.ح.ع لان المجموعة غير محصورة من اعلى . في الحقيقة لأي م ∈ R خذ أ = ١ + | م |، ب = حـ = ١ . فيكون س > ٢أ > م .

٢ ـ افرض ان م = ص ح ع { ص.ح.ع سه ، ص.ح.ع صه } . اذا كان س ∈ سه U صه و س ∈ سه فان س ≥ ص.ح.ع سه ≥ م ، واذا كان س ∈ صه فان س ≥ ص.ح.ع صه ≥ م . لنفرض ان و > ٠ . اذن ص.ح.ع سه > م - $\frac{و}{٢}$ أو ص.ح.ع ص > م - $\frac{و}{٢}$. في الحالة الاولى يوجد ص ∈ سه ⊂ سه U صه بحيث ان ص > ص.ح.ع سه - $\frac{و}{٢}$ > م - و، في الحالة الثانية يوجد ع ∈ صه ⊂ سه U صه بحيث ان ع > ص.ح.ع صه - $\frac{و}{٢}$ > م - و. اذن يوجد س ∈ سه U صه بحيث ان س > م - و. لهذا فان ص.ح.ع (سه U صه) = م .

٤ ـ $س_ن$ = ($س_ن$ + $ص_ن$) - $ص_ن$ ≥ ص.ح.ع ($س_ن$ + $ص_ن$) - ك.ح.د $ص_ن$ لكل ن ∈ N لهذا فان

ص ح ع $س_ن$ ≥ ص.ح.ع ($س_ن$ + $ص_ن$ - ك.ح.د $ص_ن$.

٥ ـ $س_ن$ > ٠ ، بعض العمليات الحسابية توضح ان ($س_ن$) وتيرية متزايدة . اذن ($س_ن$) ∈ ى من نظرية ٣ .

٦ ـ اثبت باستخدام الاستقراء ان $س_ن < س_{ن+١}$ لكل $ن \in N$. ومنه $٢س_ن < ١ + \sqrt{١ + ٤أ}$. احسب نها $س_ن$ باخذ النهايات في $س^٢_{ن+١} = أ + س_ن$.

٩ ـ $أ = س_١$ واذا كان $|أ| > ١$ فان $أ^٢ > ١$. لهذا لن تكون $(س_{٢ن})$ محصورة من اعلى مما يناقض $(س_ن)$ محصورة من أعلى .

تمارين ٣ ـ ٢

١ ـ (٠ ، ١) و(١ ، ٢) . كلا ، لانه من نظرية ٦ يمكن الاستنتاج فقط ان اتحاد فترتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة .

٣ ـ $\cap$ ف$_ن = \emptyset$ لانه ان وجد $س \in \cap$ ف$_ن$ فان $س > ٠$ ، وباستخدام مسلمة ارخميدس فانه يوجد $ر \in N$ بحيث ان $ر > \frac{١}{س}$. لهذا فان $س > \frac{١}{ر}$ وهذا يناقض $س \in$ ف$_ر$.

٥ ـ $\cap$ ع$_ن = [٠ ، ١]$.

٦ ـ $\cap$ (ن ، ن + ٢) $= \emptyset$

٨ ـ باستخدام النظرية ١٦ في الفصل الثاني نحصل على Q كثيفة في R . سوف نثبت الآن ان $R \subset \bar{غ}$. لتكن $س \in R$ ، $و > ٠$ ولنكتب $ص = س + و$. اذن يوجد $أ \in Q$ بحيث ان $س < أ < ص$. اذا كان $ص \in غ$ فان $ب = \frac{ص + أ}{٢} \in غ$ و $|س - ب| < و$، لان $س \in غ$.

ولكن اذا كان $ص \in Q$ فان $حـ = أ + \frac{ص - أ}{\sqrt{٢}} \in غ$ و $|س - حـ| < و$ ومنه $س \in \bar{غ}$. لهذا فان $R \subset \bar{غ}$.

١٤ ـ لتكن و > ٠. من تعريف اصغر حاصر علوي فانه يوجد س ∋ ل بحيث ان ص.ح.ع ل − و > س ≥ ص.ح.ع ل، ومنه ص.ح.ع ل ∋ لَ. ولكن لَ = ل لان ل مغلقة.

تمارين ٣ ـ ٣

١. ـ لتكن م١ ، م٢ متراصتين وم١ ⊇ ∪ حα وم٢ ⊇ ∪ حα . اذن م١ ⊇ ∪ حα وم٢ ⊇ ∪ حα .
اذن م١ ⊇ حα١ ∪ حα٢ ∪ .. ∪ حαن وم٢ ⊇ حβ١ ∪ حβ٢ ∪ ... ∪ حβر . اذن
م١ ∪ م٢ ⊇ حα١ ∪ حα٢ ∪ ... ∪ حαن ∪ حβ١ ∪ حβ٢ ∪ ... ∪ حβن .

٣ ـ افرض ان ص ∋ م. اذن |س − ص| > ن لعنصر ما ن ∋ N . اذن ص ∋ ك (س ، ن) ⊆ ∪ ك (س ، ر). اذن م ⊆ ∪ ك (س ، ر)، وبما ان م متراصة فانها تكون مجموعة جزئية من واحدة من هذه الكرات ك (س ، ر).

٥ ـ R غير محصورة ثم استخدم السؤال ٣.

٧ ـ (١) مـ (س ، س) = ،باستخدام (مـ٣) نحصل على
مـ (س ، س) ≥ مـ (س ، ص) + مـ (ص ، س). من (مـ٢) ، ٠ ≥ ٢ مـ (س ، ص) ومنه مـ (س ، ص) ≤ ٠.

(٢) من (مـ٣)، مـ (س ؛ ص) ≥ مـ (س ، ع) + مـ (ع ، ص)
≥ مـ (س ، ع) + مـ (ع ، حـ) + مـ (حـ ، ص).

٨ ـ (١) |س − ص| = ٠ اذا وفقط اذا كان س = ص، |س − ص| = |ص − س| ، ومن المتباينة المثلثية في R ،

|س − ع| = |س − ص + ص − ع| ≥ |س − ص| + |ص − ع| .

(٢) (مـ١) تحتاج لارشاد فقط. اذا كان |س^{٣} −ص^{٣}| = ٠ فان س^{٣} = ص^{٣}. اذا كان ص = ٠ نحصل على س^{٣} = ٠ ومنه س = ٠ . اذا كان ص ≠ ٠ لاحظ ان
(س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢}) = ٠ وَ

$(س + \frac{ص}{٢})^٢ + \frac{٣ ص^٢}{٤} > ٠$. واذن س = ص .

(٤) نتأكـد من (م$_٣$) . اذا كان س = ع تصبـح النتيجـة واضحـة . افرض ان س ≠ ع . اذا كان س = ص فان مـ (ص ، ع) = ١ وتصبح (م$_٣$) ١ ≥ ٠ + ١ . اذا كان س ≠ ص فان مـ (ص ، ع) + مـ (س ، ص) ≥ مـ (س ، ص) = مـ (س ، ع) .

(٧) جزء من (م$_١$) غير صحيح .

ق (س ، ص) = ٠ لا تعطي س = ص ، مثال على ذلك

س = $(\frac{١}{ن})$ = (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، . . . .) ∈ ى ، ص = (٠ ، ٠ ، ٠ ، . . .)

∈ ى .

نها | س$_ن$ − ص$_ن$ | = ٠ ، ولكن س ≠ ص .

تمارين ٣ ـ ٤

١ ـ افرض ان سه ⊇ صه ، صه قابلة للعد . اذا كانت سه = ∅ تكون قابلة للعد بالتعريف . اذا كانت سه ≠ ∅ ، ثبت س ∈ سه . اذا كان ن ∈ N بحيث ان ق (ن) ∈ سه ، عرّف هـ (ن) = ق (ن) . ولـكـن اذا كان ق (ن) ∉ سه عرف هـ (ن) = س . اذن هـ : N ← سه اقتران شامل .

٤ ـ ق : (٠ ، ١) ← (أ ، ب) المعرف بـ ق (س) = أ + (ب − أ) س هو تقابل .

٦ ـ R = Q U غ ، Q قابلة للعد غير نهائية . لوكانت غ قابلة للعد غير نهائية لكانت R كذلك من النظرية ١٣ ، وهذا يناقض النظرية ١٤ .

تمارين ٣ ـ ٥

٢ ـ لتكن سه = ح ∩ R' . اذا كانت سه = ∅ فان سه تكون مفتوحة في R . بعكس ذلك خذ س ∋ سه اذن سَ ∋ ح وس ∋ R . بما ان ح مفتوحة فانه يوجد قر (س ، نق) ⊂ ح ، من الواضح الآن ان الفترة ك (س ، ن) ⊂ سه ، اذن سه مفتوحة في R .

٥ ـ ١) خذ ع$_١$ ، ع$_٢$ ∋ قر (أ ، نق) ، اذن |ع$_١$ − أ| < نق ، |ع$_٢$ − أ| < نق . يجب ان نثبت ان

ن ع$_١$ + (١ − ن) ع$_٢$ ∋ قر (أ ، نق) عندما يكون ٠ ⩽ ن ⩽ ١ .

الآن |ن ع$_١$ + (١ − ن) ع$_٢$ − أ| = |ن (ع$_١$ − أ) + (١ − ن) (ع$_٢$ − أ)|

⩽ ن |ع$_١$ − أ| + (١ − ن) |ع$_٢$ − أ| = ب .

باخذ الحالتين ن = ٠ وَن > ٠ نرى ان ب = |ع$_٢$ − أ| < نق ، ب < ن نق + (١ − ن) |ع$_٢$ − أ| ⩽ نَ نق + (١ − ن) نق = نق . اذن قر (أ ، نق) محدبة .

٦ ـ |ع − ١| = $\frac{١}{٢}$ ، |ع$^{*-١}$ − ١| = $\frac{١}{٢}$ ، ٢ |١ − ع*| = |ع*| ، اذن ٣ |ع*|^٢ − ٤ (ع* + $\bar{ع}^*$) + ٤ = ٠ . يمكن كتابة هذا على صورة

|ع* − $\frac{٤}{٣}$|^٢ = $\frac{٤}{٩}$ ، اذن أ = $\frac{٤}{٣}$ ، نق = $\frac{٢}{٣}$.

٧ ـ ق (ع) =: $\frac{ع}{١ + |ع|}$ هو تناظر مناسب .

تمارين ٤ ـ ١

١ ـ خذ ∈ = ٢$^{-١}$ ، يوجد ن$_١$ = ن$_١$ (∈) بحيث ان |ع$_ن$ − ع$_{ن_١}$| < ٢$^{-٢}$ لكل ن > ن$_١$ كذلك يوجد ر$_١$ بحيث أن |ع$_ن$ − ع$_ر$| < ٢$^{-٢}$ لكل ن ، ر > ر$_١$. افرض ان :

$ن_٢ = ن_١ + ر_١$. اذن

$|ع_{ن_٢} - ع_{ن_١}| < ٢^{-١}$ و $|ع_ن - ع_{ن_٢}| < ٢^{-٢}$ لكل $ن > ن_٢$. استمر في الاستقراء.

٢ ـ نعم

٤ ـ $مـ \ni ى$. $حـ = (ت^ن) \ni ل\infty$ ولكن $مـ حـ = حـ \not\ni ى$.

٥ ـ ق ليس اقترانا محافظا. على سبيل المثال ق (ت مـ) = ١ ولكن ت ق (مـ) = ت.

٧ ـ افرض ان $ع^ن \leftarrow أ$. اذن نها $|ع^ن| = |أ|$ اي ان $|أ| = ١$.

الآن $ع^{ن+١} \leftarrow أ$. لهذا فان $\frac{ع^{ن+١}}{ع^ن} \leftarrow \frac{أ}{أ} = ١$. اي ان $ع = ١$.

٨ ـ لنفرض ان $\in > ٠$. اذا كان $أ = ٠$ فانه يوجد $ن_٠ = ن_٠(\in^٢)$ بحيث ان $ن \geqslant ن_٠$ تعطي $٠ \leqslant أ_ن \leqslant \in^٢$. ومنه $\sqrt{أ_ن} < \in$، لهذا فان $\sqrt{أ_ن} \leftarrow ٠$. اذا كان $أ > ٠$ اكتب

$أ_ن - أ = (\sqrt{أ_ن} - \sqrt{أ})(\sqrt{أ_ن} + \sqrt{أ})$

اذن $|\sqrt{أ_ن} - \sqrt{أ}| \leqslant \frac{|أ_ن - أ|}{\sqrt{أ}}$ ومنه $\sqrt{أ_ن} \leftarrow \sqrt{أ}$.

١٠ ـ (أ) تقاربية، النهاية $\frac{١}{٣}$.

(حـ) تقاربية، النهاية ٥.

(د) تقاربية، النهاية ١.

١١ ـ بما ان $ع \ni ل\infty$، $|ع_ن| \leqslant م$ لكل $ن \ni N$، لهذا فان $|أ| \leqslant م$. اذن $ن \geqslant ن_٠$ تعطي $|$الوسط الحسابي $- أ| = |(ع_١ - أ) + \ldots (ع_ن - أ)| / ن$

$$\leqslant \frac{٢ م ن_٠}{ن} + \frac{ن - ن_٠}{ن} \in < \in + \in$$

اذا كان $ن > \frac{٢ م ن_٠}{\in}$

تمارين ٤ ـ ٢

١ ـ لِـ ن > ١ ، س ن = ن٢ + (−١)ن > ن ومنه س ن ← ∞ . كذلك نها س ن = نها س ن = ∞ .

٢ ـ افرض ان أ > ٠ ونها س ن = حـ ∋ R . من نظرية ٥ ، نحصل على انه اذا كانت ∈ > ٠ فانـه يوجـد ن٠ بحيث ان س ن < حـ + ∈/أ .لكـل ن ≥ ن٠ . وَس ن > حـ − ∈/أ لعدد لا نهائي من ن . بضرب هاتين المتباينتين في أ نحصل على نها أ س ن = أ حـ .

٧ ـ افرض ان م ر = ص ح ع { س ر ، س ر+١ ، . . . } ،
ح ر = ص ح ع { ص ر ، ص ر+١ ، . . . } . اذن ن ≥ ر تعطي
س ن ص ن ≥ م ر ح ر كذلك (ص·ح·ع)ن≥ر س ن ص ن ≥ م ر ح ر .
اجـعـل ر ← ∞ . المـثـال س = (١ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، . . .)، ص = (٠ ، ١ ، ٠ ، ١ ، . . . .) . يعطي علاقة «أقل من» .

٨ ـ في حالة حـ = ١ لا نستطيع القول ان أ ن ← ٠ . على سبيل المثال أ ن = ١ لكل ن .

٩ ـ خطأ كمثال س ن = (−١)ن .

تمارين ٤ ـ ٣

١ ـ س = (١ ، ٠ ، ٢ ، ٠ ، ٣ ، . . .) ، ص = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، . . .) .
افرض ان (ع ن) ∌ ى . اذن يوجد د > ٠ وَن١ < ن٢ < . . . بحيث ان |ع نر| ≥ د لكل ر . ولكن (ع نر) هي متتالية جزئية من (ع ن) . لهذا فانه يوجد متتالية جزئية صفرية (ع مر) من (ع نر) . اذن |ع مر| ≥ د لكل ر مما يناقض ع مر ← ٠ (ر ← ∞) .

٤ ـ |ع ن − أ| < ١ لعدد لا نهائي من ن . اختر واحداً منها لنسمّه ن١ . كذلك |ع ن − أ|

$>$ ٢$^{-ر}$ لعدد لا نهائي من ن اختر واحدة منها $>$ ن$_1$، لنسمها ن$_2$. من الاستقراء |ع$_{ن_ر}$ − أ|
$>$ ر$^{-1}$. اذن أ$_{ن_ر}$ ← أ.

تمارين ٤ ـ ٤

(أ) تقاربية الى الصفر، استخدم (س^3 − ص^3) = (س − ص) (س^2 + س ص + ص^2)

(ب) خذ أي ح $>$ ٠. من المتتالية الخاصة (٣) نحصل على $\frac{ح^{ن}}{ن!}$ ← ٠ لهذا فانه لكل
ن $\geqslant$ ن$_0$ ، $\frac{ح^{ن}}{ن!} < ١$. اذن ح $< \sqrt[ن]{ن!}$. لهذا فان $\sqrt[ن]{ن!}$ ← ∞ .

هـ) $(١ + \frac{١}{ن})^{ن+١}$ ← e ، اذن $\frac{ن^{ن+١}}{(ن + ١)^{ن+١}}$ ← $\frac{١}{e}$. أي ان $(١ - \frac{١}{ن})^{ن}$

← $\frac{١}{e}$.

ك) محصور من اسفل بالصفر. وتيرية متناقصة بنتيجة للنظرية ٢٣، الفصل الثاني، البند ٧ ·
اذن تكون تقاربية. يمكن اثبات أن ن ($\sqrt[ن]{٢}$ − ١) ← لو$_e$٢ (ن ← ∞) باستخدام الحقيقة
القائلة ان $\sqrt[ن]{٢}$ = e$^{ن^{-1}}$لو٢.

تمارين ٤ ـ ٥

١ ـ جذور ق^2 − ق − ١ = ٠ هي أ = $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ ، ب = $\frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}$. اذن

س$_ن$ = أ^ن ح$_1$ + ب^ن ح$_2$، وس$_1$ = س$_2$ = ١ تعطي س$_ن$ = (أ^ن − ب^ن)/ $\sqrt{٥}$ لهذا فان

نها $\frac{س_ن}{س_{ن+١}}$ = $\frac{\sqrt{٥} - ١}{٢}$.

٢ ـ $\frac{(أ حـ - أ ب)}{ب حـ}$ = $\frac{ب حـ}{أ حـ}$ = ر تعطي ر^2 + ر − ١ = ٠، اذن ر = $\frac{\sqrt{٥} - ١}{٢}$.

٤ ـ نها $س_ن = \frac{س_١ + ٢س_٢}{٣}$.

٨ ـ لكل $ن \in N$ ، $س_ن ص_ن = س_١ ص_١$ ، اذن $س_ن ص_ن \leftarrow س_١ ص_١$ ($ن \leftarrow \infty$).
اثبت الآن بالاستقراء ان $س_ن > ص_ن \geqslant ٠$ واستنتج ان
$س_{ن+١} < س_ن$ ، اذن $س_ن \leftarrow أ$ ومنه $ص_ن = ٢ س_{ن+١} - س_ن \leftarrow أ$
اذن $أ^٢ = س_١ ص_١$ ، $أ = \sqrt{س_١ ص_١}$

تمارين ٥ ـ ١

١ ـ اذا كان $س_ن$ ، $ص_ن$ المجمـوعـين الجـزئيـين النونيين لِـ $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ ، فان المجموع الجـزئـي لِـ $\sum حـ_ن$ هوعلى صورة $س_ن + ص_ن$ أو$س_ن + ص_ن + أ_{ن+١}$. ولـكـن $\sum أ_ن$ تقاربية تعطي $أ_{ن+١} \leftarrow ٠$.

٢ ـ $\sum |أ_ر|$ تقاربية تعطي $\sum أ_ر$ تقاربية . من المتباينة المثلثية :
$|أ_١ + \ldots + أ_ن| \leqslant |أ_١| + \ldots + |أ_ن|$ وعندما $ن \leftarrow \infty$ نحصل على
$|\sum أ_ر| \leqslant \sum |أ_ر|$. نحصل على «اقل من». على سبيل المثال اذا اخذنا $أ_١ = ١$ ، $أ_٢ = -١$ ، $أ_ن = ٠$ لكل $ن \geqslant ٣$.
٤ ـ المجموع ١ .

٥ ـ $د = (١ ، -١ ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، -\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \ldots) \in \gamma$ ولكن

$د د = (١ ، ١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \ldots) \notin \gamma$. من المثال ٣ .

الآن اذا كانت $أ \in ل^١$ و $ب \in ل^\infty$ فان

$|$ أ$_{ن}$ ب$_{ن}$ + . . . + أ$_{ن+ر}$ ب$_{ن+ر}$ $| \leqslant$ م ($|$ أ$_{ن}$ $|$ + . . . + $|$ أ$_{ن+ر}$ $|$). واذن

$\sum$ $|$ أ$_{ن}$ ب$_{ن}$ $| < \infty$ من القاعدة العامة لتقارب المتسلسلة. لهذا فان أ ب $\in$ ل^{1}.

٨ ـ أ $\in$ ل^{1} تعطي أ$_{ن}$ $\leftarrow$ ٠ لهذا فانه يوجد ن$_{٠}$ بحيث ان $|$ أ$_{ن}$ $| < ١$ لكل ن $>$ ن$_{٠}$. اذن $|$أ$_{ن}$$|^{2} \leqslant |$ أ$_{ن}$ $|$ لكل ن $>$ ن$_{٠}$. وبتطبيق القاعدة العامة لتقارب المتسلسلات نحصل على

$\sum$ $|$ أ$_{ن}$ $|^{2}$ تقاربية.

لهذا فان ل^{1} $\subset$ ل^{2}. اذا كانت أ $\in$ ل^{2} فان $|$ أ$_{ن}$ $|^{2} \leftarrow$ ٠ ومنه $|$ أ$_{ن}$ $| \leftarrow$ ٠ . اي ان أ $\in$ تق$_{٠}$. كذلك ($\frac{١}{ن}$) $\in$ ل^{2} / ل^{1}. (١ ، -١ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، -$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، . . .) $\in$ تق$_{٠}$ / ل^{2}.

٩ ـ كعينة نلاحظ ان (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٦) ، (٨) ، (٩) صحيحة و(١) ، (٥) ، (٧) ، (١٠) ، (١١) خطأ. على سبيل المثال (٢) صحيحة لأن

$|$ أ$_{ن}$ ب$_{ن}$ $| \leqslant \frac{(أ_{ن}^{2} + ب_{ن}^{2})}{٢}$ لهذا فان $\sum$ أ$_{ن}$ ب$_{ن}$ ذات تقارب مطلق. واذن تقاربية. كذلك (١٠) خطأ لان $\sum \frac{١}{ن}$ تباعدية ولكن $\frac{١}{ن} \leftarrow$ ٠ .

١٠ ـ $\frac{٤}{٣٣}$. الرقم ٠,١٠١٠٠١٠٠٠ غير نسبي

١١ ـ أي عدد مثل $\frac{١}{٢}$ يمكن كتابته على صورة ٠,٥٠ أو ٠,٤٩ . وبصورة عامة فان العدد

س له صورة عشرية وحيدة اذا وفقط اذا لم يكن س على شكل $\frac{د}{٢^{م}٥^{ن}}$ حيث د $\in$ Z ، ن ، م $\in$ N $\cup$ {٠} .

تمارين ٥ ـ ٢

١ ـ (أ) $|$ أ$_{ن}$ $| \leftarrow \frac{١}{e}$. اذن $\sum$ أ$_{ن}$ تباعدية من النظرية ٥ .

(ب) لاحظ ان $|أ_ن| = أ_ن > ٠$ و $\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} = ٢ \left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{-١٠٠} \leftarrow ٢$ لهذا فان

$\sum أ_ن$ تباعدية من اختبار النسبة.

(حـ) لاحظ ان $|أ_ن| = أ_ن > ٠$ و $\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \leftarrow \frac{٢}{٣}$. اذن $\sum أ_ن$ ذات تقارب

مطلق باستعمال اختبار النسبة.

(د) $|أ_ن|^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{ن} - ١ \leftarrow ٠$ $(ن \leftarrow \infty)$. اذن $\sum أ_ن$ ذات تقارب مطلق باستخدام

اختبار الجذر النوني.

(ز) $\sum أ_ن$ ذات تقارب مطلق باستخدام اختبار الجذر النوني.

(ك) اذا كان $|س| > ٠$ فان $\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| \leftarrow \frac{|س|^٣}{٣^٣}$. لهذا فان $\sum أ_ن$

تقاربية اذا كان $|س| < ٣$ وتباعدية اذا كان $|س| > ٣$. اذا كانت $|س| = ٣$ فان

$\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right| > ١$، لهذا فان $|أ_ن| \geqslant |أ_١| = \frac{٩}{٢}$ لكل $ن \in N$ واذن $أ_ن \not\rightarrow ٠$.

لهذا فان $\sum أ_ن$ تباعدية اذا كانت $|س| = ٣$.

٣ ـ خطأ. على سبيل المثال اذا كان $س = \frac{١}{٤}$، $ص = \frac{١}{٢}$ فان

$\sum أ_ن = س + ص + س^٢ + ص^٢ + س^٣ + ص^٣ + \ldots$ تقاربية و

$\frac{أ_{٢ن+٢}}{أ_{٢ن+١}} > ٢$ لكل $ن \geqslant ١$.

٤ ـ باستخدام النتيجة خذ $أ_ن = \frac{ن!}{ن^ن}$. اذن $\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \leftarrow \frac{١}{e}$. لهذا فان

$\frac{(ن!)^{\frac{١}{ن}}}{ن} \leftarrow \frac{١}{e}$.

٥ ـ تقاربية باستخدام اختبار ليبنتس.

(أ) $ص_{٣ن+٣} > \frac{١}{س} + \frac{١}{س+٣} + \ldots + \frac{١}{س+٣ن} \leftarrow \infty$.

٦ ـ اذا كان أ $\in$ { ٠ ، ١ ، ٢ ، ... } فان حدود المتسلسلة سوف تصبح صفرا بعد فترة. لهذا فانها ذات تقارب مطلق. وغير ذلك

$$\left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_{ن}} \right| = \left| \frac{ع(أ-ن)}{ن+١} \right| \leftarrow |ع| .$$

في الحالة $|ع| = ١$ نطبق اختبار رابي لنحصل على

$ن \left(\left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_{ن}} \right| - ١ \right) \leftarrow -$ حق (أ) $- ١$. لهذا نحصل على تقارب مطلق اذا كان حق (أ) > ٠ . اذا كان حق (أ) $\geqslant -١$ فان $|أ_{ن}| \leqslant ١$ ومنه $\sum أ_{ن}$ تباعدية.

٧ ـ $\sum |\Delta ب_{ر}| < \infty$ تعطي $\sum \Delta ب_{ر}$ تقاربية ومنه

$(ب_{١} - ب_{٢}) + \ldots + (ب_{ن-١} - ب_{ن}) \leftarrow أ$. اي ان

$ب_{ن} \leftarrow ب_{١} - أ$. واذن $|س_{ر} \Delta ب_{ر}| \leqslant م |\Delta ب_{ر}|$. لهذا فإن $\sum س_{ر} \Delta ب_{ر}$ ذات تقارب مطلق.

٨ ـ افرض ان $\sum |\Delta ب_{ر}|$ تباعدية. عين اعدادا صحيحة ن (ر) بحيث ان $٠ = ن(٠) < ن(١) < ن(٢) < \ldots$ و $\sum_{١+ن(ر)}^{ن(ر+١)} |\Delta ب_{ر}| > ر + ١$. ثم كون أ $\in \gamma$ بحيث ان

$\sum أ_{ر} \Delta ب_{ر}$ تباعدية.

١٠ ـ مليون واحد.

تمارين ٥ ـ ٣

١ ـ $أ_{٠} = ١$ ، $أ_{١} = -١$ ، $أ_{ن} = ٠$ (ن $\geqslant ٢$). $ب_{ن} = ١$ (ن $\geqslant ٠$)

٢ ـ اذا كانت ع $_{ن}$ ← أ فان |ع $_{ن}$ - أ| > ∈، ن > د. لنفرض ان
م = أك { ق$^{-١}$(٠)، . . . ، ق$^{-١}$(د) } . اذن ن > م تعطي ق (ن) > د، اذن
|ع $_{ق(ن)}$ - أ| > ∈ .

٣ ـ $\frac{٣}{٤}$

٦ ـ ∑ حـ $_{ن}$ = -٦ + ٠ + ٠ + ٠ + ٠ + ...

٧ ـ ∑ (ن + ١) ع ^{ن} هو حاصل الضرب الكوشي (١ + ع + ع^{٢} + . . .)^{٢} = (١ - ع)$^{-٢}$.

١٠ ـ أ $_{ن}$ = (-١)^{ن} (ن + ١)$^{-\frac{١}{٢}}$ ، ب $_{ن}$ (-١)^{ن} (ن + ١)$^{-\frac{١}{٢}}$ تعطي |حـ $_{ن}$| ⩾ (ن + ١)$^{-١}$.
لهذا فان ∑ حـ $_{ن}$ تباعدية بالمقارنة مع المتسلسلة التوافقية. هذا لا يناقض نظرية ميرتينس لانها تقول ان المتسلسلة تقاربية، وليس ذات تقارب مطلق.

١١ ـ α > $\frac{١}{٢}$

١٣ ـ (سا (ع)) (١ - ع)$^{-٢}$ تباعدية لِـ |ع| ⩾ ١.

تمارين ٦ ـ ١

١ ـ ن أ$^{ن-١}$ لأن س^{ن} - أ^{ن} = (س - أ) (س$^{ن-١}$ + س$^{ن-٢}$أ + . . . + س أ$^{ن-٢}$ + أ$^{ن-١}$).

٢ ـ نجد ان δ (٠ ، ∈) = ∈^{٢} ، δ (أ ، ∈) = ∈ $\sqrt{أ}$ لكل أ > ٠.

٣ ـ لأي أ > ٠ ، س > ٠ ، |س - أ| > ٠ نحصل على ($\sqrt{س}$ - $\sqrt{أ}$) (س - أ)$^{-١}$ =
($\sqrt{س}$ + $\sqrt{أ}$)$^{-١}$ والتي تقترب من (٢ $\sqrt{أ}$)$^{-١}$ عندما س ← أ.

٤ ـ خذ م = |أ$_{٠}$| + |أ$_{١}$| + . . . + |أ$_{ن-١}$| وَر$_{٠}$ = ١ + $\frac{ل + م}{|أ_{ن}|}$. اذن |ع| >
ر$_{٠}$ تعطي |ع| > ١. لهذا فان:

$|ك(ع)| \geqslant |أ_ن ع^ن| - م|ع|^{ن-1}$ من المتباينة المثلثية. كذلك $|أ_ن ع| > م + ل$. لهذا فان

$|أ_ن ع^ن| > ل|ع|^{ن-1} + م|ع|^{ن-1}$. اذن
$ك(ع) > ل|ع|^{ن-1} \geqslant ل$.

٧ - لكل $\in > ٠$ يوجد $س_٠ \geqslant ١$ بحيث ان $س > س_٠$ تعطي $|ق(س) - م| < \in$.
اختر $ن_٠ \in N$ بحيث ان $ن_٠ > س_٠$. اذن $ن > ن_٠$ تعطي
$|ق(ن) - م| < \in$. اذن $ق(ن) \leftarrow م$ $(ن \leftarrow \infty)$. عرّف $هـ(ن) = ٠$ لكل $ن \in N$
، $هـ(س) = ١$ لكل $س \in (ن ، ن + ١)$، حيث $ن \in N$.

١٠ - كمثال $ق(س) = ١$. اذا كانت $س \in [-١ ، ١]$. $ق(س) = \frac{١}{|س|}$ اذا كانت $س$
$\notin [-١ ، ١]$. هذا الاقتران محصور على R.

تمارين ٦ - ٢

١ - $ف_١ = (-\infty ، -١)$ ، $ف_٢ = [-١ ، ١]$ ، $ف_٣ = (١ ، \infty)$
٢ - ق متزايد فعلا تعطي ق متباين. افرض ان $سه = ق([أ ، ب])$. اذن يوجد $هـ = ق^{-١}$
: $سه \leftarrow [أ ، ب]$. خذ حـ ، د $\in$ سه ، حـ $<$ د. اذا كان $هـ(د) \geqslant هـ(حـ)$ فان ق
متزايد يعطي $ق(هـ(د)) \geqslant ق(هـ(حـ))$، أي ان $د \geqslant حـ$. وهذا يناقض حـ $<$ د. اذن هـ
$(حـ) <$ هـ (د) ومنه هـ متزايد فعلا.
٣ - $ق(س) = س$ $(٠ \geqslant س > ١)$، $ق(س) = ٣ - س$ $(١ \geqslant س \geqslant ٢)$.
٤ - (أ) نعم ، (ب) لا ، مثال $ق(س) = ٠$، $هـ(س) = س$. (د) نعم.

٧ - $ق(٠) = ق(٠ + ٠) = ق(٠) + ق(٠)$. اذن $ق(٠) = ٠$.
كذلك $ق(-س) = -ق(س)$، $ق(ن س) = ن ق(س)$ لكل $ن \in N$ ، $س \in R$. اذا

كان م = ق (٠−) فان م $\geqslant$ ٠ وم − ϵ > ق (ص) $\geqslant$ م لكل − δ > ص > ٠. اذن ٠> س > δ تعطي م − ϵ > ق (س−) $\geqslant$ م اذن −م $\geqslant$ ق (س). اختر ز $\in$ N بحيث ان $\frac{1}{ن}$ > δ . اذن −م $\geqslant$ ق ($\frac{1}{ن}$) = $\frac{ق(1)}{ن}$ عندما ن ← ∞ نحصل على −م $\geqslant$ ٠، م $\leqslant$ ٠ وبما ان م $\geqslant$ ٠ فان م = ٠. اذن

− ϵ > ق (ص) $\geqslant$ ٠ لكل − δ >. ص > ٠ و٠ $\geqslant$ ق (ص) > ϵ لكل ٠ > س > δ . اذن

| ق (س) | > ϵ لكل ٠ > | س | > δ . اذن ق (س) ← ٠ (س ← ٠).

٨ ـ بما ان | ق (س $_ر$) − ق (س $_{ر-1}$) | = ق (س $_{ر-1}$) − ق (س $_ر$) فان مجموع القيم المطلقة هو ق (أ) − ق (ب) ومنه م = ق (أ) − ق (ب).

٩ ـ جرّب ق (س) = س$^{-1}$ ، س $_ن$ = ٢$^{-1}$ ، س $_{ن-1}$ = ٣$^{-1}$ ، . . . لعدد مناسب ن.

تمارين ٦ ـ ٣

١ ـ البرهان هو نفس برهان النظرية ١ في البند ١ في الفصل ٦.

٢ ـ (أ) متصل الا عند س = ١، (ب) ، (حـ) متصل على كل النقاط.

٣ ـ افرض ان أ عدد حقيقي. اذن | ق (س) − ق (أ) | > ϵ اذا كان | س − أ | > δ . اختر عددا نسبيا حـ بحيث ان حـ $\in$ (أ − δ ، أ + δ). اذن | حـ − أ | > δ ، ق (حـ) = ٠. لهذا فان | ق (أ) | > ϵ، ولكن ϵ > ٠ عدد عشوائي. اذن ق (أ) = ٠ لكل أ $\in$ R.

٤ ـ افرض ان ϵ > ٠ وخذ | س | > ϵ. اذن

| ق (س) − ق (٠) | = | ق (س) | = ٠ أو | س | اعتمادا على كون س $\in$ Q أو في $Q^م$

اذن | ق (س) | > ϵ ومنه ق متصل عند ٠. خذ أ > ٠. اذا كان ق متصلا عند أ فانه يوجد δ > ٠ بحيث ان | ق (س) − ق (أ) | > أ اذا كان أ > س > أ +

δ . اذا كان أ ∌ Q اختر عددا غير نسبي س ∈ (أ ، أ + δ). اذن | س | > أ وهذا يناقض س > أ. اذا كان أ عددا غير نسبي اختر عددا نسبيا س ∈ (أ ، أ + δ). اذن | -أ | > أ. اي ان أ > أ تناقض.

نفس الاسلوب اذا كان أ > ٠.

٥ ـ ق (٠) = ٠، | ق (س) | > ∈ اذا كان | س | > δ . استخدم ق (س) - ق (أ) = ق (س - أ) للاتصال، عند أ. ثم برهن ان ق (ب) = ب ق (١) لكل ب ∈ Q. هـ (ع) = عَ تصلح.

٦ ـ ق (٠) = ٠ ، ع ≠ ٠ تعطي ق (ع) = | ع |^{٢} (١ + أ + أ^{٢} + . . .) حيث ٠ > أ > ١، لهذا نحصل على متسلسلة هندسية تقاربية. نجد ان ق (ع) = ١ + | ع |^{٢} لِـ ع ≠ ٠ اذن ق متصل على ℂ ما عدا عند الصفر.

٩ ـ اذا كان ك (س) = س - ق (س) فان ك (أ) ≥ ٠ وك (ب) ≤ ٠ اذن ك (حـ) = ٠ لعنصر ما جـ ∈ [أ ، ب]. الآن ٠ ≥ هـ (س) ≥ ب لعنصر ما ب > ٠ ولكل س > ٠ اذن هـ : [٠ ، ب] ← [٠ ، ب] طبق الجزء الاول من السؤال حيث أ = ٠، هـ بدلا من ق.

١٢ ـ اذا كان ق محصورا ويأخذ قيما حاصرة فانه يوجد لِـ ق اصغر قيمة. اي انه يوجد د ∈ [أ ، ب] بحيث ان ق (س) ≤ ق (د) لكل س ∈ [أ ، ب]. ولكن ق(س) > ٠ اذن حـ = ق (د) > ٠ ومنه ق (س) ≤ حـ لكل س ∈ [أ ، ب]. الآن هـ (س) = س > ٠ على (٠ ، ١]، هـ متصل على (٠ ، ١] ولكن حـ ∈ (٠ ، ١] يوجد س ∈ (٠ ، ١] بحيث ان س > حـ.

١٦ ـ (أ$_{ن}$) متناقصة ومحدودة من اسفل بـ ٠، اذن أ$_{ن}$ ← م، أ$_{ن+١}$ ← م وق (أ$_{ن}$) ← ق (م).

١٧ ـ افرض ان ق اقتران تقلص، اذن | ق (س) - ق (ص) | ≥ حـ | س - ص | لكل س ، ص ∈ [٠ ، ١]. خذ س = ١، حـ > ص > ١. اذن | ص (١ - ص) | ≥ حـ | ١ - ص | ، اذن | ص | = ص ≥ حـ. وهذا يناقض حـ > ص.

تمارين ٦ ـ ٤

١ ـ | ق (س) − ق (ص) | = $\frac{|س - ص|}{س ص}$ ⩽ | س − ص | لان س ، ص > ١. خذ
$\delta = \epsilon$.

٣ ـ ق منتظم الاتصال على [٠ ، ٣]. لهذا فانه لكل ϵ > ٠ يوجد $\delta = \delta(\epsilon)$ > ١
بحيث ان
| ق (س) − ق (ص) | < ϵ اذا كانت | س − ص | < δ وس ، ص ∈ [٠ ، ٣].
الآن خذ | س − ص | < أ ص (δ ، ϵ) وس ، ص ⩾ ٠ اذا كان س ⩽ ٢ فان
| $\sqrt{س}$ − $\sqrt{ص}$ | = $\frac{|س - ص|}{\sqrt{س} + \sqrt{ص}}$ ⩽ | س − ص | < ϵ، واذا كان ٠ ⩽
س < ϵ فان ص < س + δ < ٣. لهذا فان س ، ص ∈ [٠ ، ٣] واذن | ق (س) −
ق (ص) | < ϵ في جميع الحالات.
٥ ـ ق دوري يعطي ق (س + ن د) = ق (س) لكل س ∈ R ، ن ∈ N . الآن ق
منتظم الاتصال على [−د ، ٢ د]. اذن يوجد δ < د بحيث ان | ق (س) − ق (ص) | <
ϵ اذا كان | س − ص | < δ وس ، ص ∈ [−د ، ٢د]. خذ س ، ص ∈ R و| س
− ص | < δ . اذن ن د ⩽ س < (ن + ١) د لعدد ما ن ∈ N . استخدم س − ن د وَ
ص − ن د ∈ [−د ، ٢د].

تمارين ٧ ـ ١

١ ـ ق (س) = | س ـ أ | غير قابل للتفاضل عند أ ولكن هـ (أ ، و) = ٠

٢ ـ $هـ_ن$ (س) = ن { ق (س + $\frac{1}{ن}$) − ق (س) }

٣ ـ قَ (٠) = ٠ لان | ق (س) − ق (٠) | = | ق (س) | ⩽ $س^2$ لاي س، وكذلك $س^2$ ⩽

$\in$ | س | اذا كان | س | $\leqslant$ $\in$. نحصل على النتيجة من النظرية ١ . على سبيل المثال أ

$\in Q^+$. اذن ك (س ، أ) = س + أ اذا كان س $\in$ Q، وك (س ، أ) = $\frac{-أ^٢}{س - أ}$.

اذا كان س $\notin$ Q . من الواضح انه لا يوجد نهاية لِـ ك (س ، أ) عندما س ← أ.

٤ ـ حـ = $\frac{أ + ب}{٢}$.

٨ ـ ١٩ + ١٤ (س − ٢) + (س − ٢)^٢ − (س − ٢)^٣.

٩ ـ (ب) اذا كان ق (س) = أ. + أ$_١$س + . . . + أ$_ن$ س^ن،

قَ (س) = س$^{-١}$ فان أ$_١$س + . . . + ن أ$_ن$ س^ن = ١ لكل س > ٠ بمفاضلة الطرفين نحصل على أ$_١$ = ٠ . كرر هذا تجد أ$_٢$ = ... = أ$_ن$ = ٠ . اذن ق (س) = ٠ مما يناقض قَ (س) = س$^{-١}$.

١٤ ـ نعم . | ك (س ، أ) | $\leqslant$ | س − أ |$^{حـ-١}$ ← ٠ (س ← أ) لاي أ $\in$ C ، اذن قَ (أ) = ٠ لكل أ $\in$ C .

١٦ ـ كَ متصل على [أ ، ب]، ان عملية حسابية تبين ان كَ (أ) = (أ − ب) (أ − حـ) ، كَ (ب) = (ب − أ) (ب − حـ) . اذن كَ (ب) < ٠ < كَ (أ) . ومن نظرية القيمة المتوسطة للاقترانات المتصلة نرى انه يوجد د $\in$ (أ ، ب) بحيث ان كَ (د) = ٠

تمارين ٧ ـ ٢

١ ـ (١) حر = { −٢ ، $\frac{-١}{٥}$ ، ١ } . قمح = { $-\frac{١}{٥}$ ، ١ } ، قمط = $\varnothing$.

(٢) حر = قمح = { −٢ ، ٢ } ، قمط = { ٢ ، ٥ } .

(٣) حر = قمح = قمط = { $\frac{\pi}{٤}$ } .

٢ ـ افرض ان طولي الضلعين هما س ، ص ، م = ٢ (س + ص)، ح (مساحة) = س ص ،

ح = س ($\frac{م}{٢}$ – ص). جد حر (ح).

٣ ـ حـ = $\frac{مـ}{مـ + ن}$

٦ ـ طبق نظرية رول على أ س^{٤} + ب س^{٣} + حـ س^{٢} – (أ + ب + حـ) س على [٠ ، ١].

٨ ـ اذا كان ق (س) = أ٠ويوجد صفر واحد س$_{١}$ فان ق (س$_{١}$) = أ$_{٠}$ = ٠. اذا كان ق (س) = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$س،ويوجد صفران س$_{١}$ ، س$_{٢}$ فان قَ (ص$_{١}$) = أ$_{١}$ = ٠ من نظرية رول. اذن ق (س) = أ$_{٠}$ وله صفر س$_{١}$. اذن أ$_{٠}$ = ٠. وبنفس الطريقة اذا كان ق (س) = أ. + أ$_{١}$س + أ$_{٢}$س^{٢} وله ثلاثة اصفار س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ فاننا نجد قَ (س) = أ$_{١}$ + ٢ أ$_{٢}$س له صفران، اذن أ$_{١}$ = أ$_{٢}$ = ٠ كما في السابق. اذن ق (س) = أ$_{٠}$ ، أ$_{٠}$ = ٠. نستمر بالاستقراء. اذا كان هـ (س) = $\frac{أ (س)}{ب (س)}$ حيث أ (س) ، ب (س) كثيرا حدود وكان هـ (س + د) = هـ (س) لكل س ∋ R . خذ كثير الحدود ك (س) = أ (س) – هـ (٠) ب (س). اذن ك (ن د) = ٠ لكل ن ∋ N ، اذن ك (س) = ٠ لكل س ∋ R .

تمارين ٧ ـ ٣

١ ـ ق (٣) – ق (–٢) = ٥ قَ (حـ) ؛ حـ = $\frac{١}{\sqrt{٦}}$.

٢ ـ حـ = $\frac{أ + ب}{٢}$.

٥ ـ طبق نظرية رول على { ق (س) }^{٢} ق (١ – س). نعم يوجد و ∋ (٠ ، ١).

٧ ـ لكل ∈ > ٠، يوجد أ = أ (∈) > ٠ بحيث ان | قَ (س) – م | > ∈ لكل س > أ.

الآن اذا كان س > أ فانه لعنصر ما حـ ∋ (أ ، س) نحصل على

ق (س) = ق (أ) + (س – أ) قَ (حـ). نحصل على النتيجة بكتابة قَ (س) = قَ (س) – م + م واستخدام | قَ (س) – م | > ∈

٩ ـ لاحظ ان هَـ (س) $>$ ٠ وهـ (ب) − هـ (أ) $>$ ٠ استخدم النظرية ٨.

١١ ـ استخدم نظرية رول على الاقتران، وقَ (س) = ق (س).

١٣ ـ ٢ ، $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$.

١٤ ـ ارتفاع المستطيل = نصف القطر = م $(\pi + ٤)^{-١}$

١٨ ـ حـ = $\frac{-ك}{٣}$.

١٩ ـ ق (س) = $س^{٣}$ + س.

تمارين ٧ ـ ٤

٢ ـ افرض ان و = $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$ طبق نظرية تايلور.

ق $(س_{١})$ = ق (و) + . . . ، ق $(س_{٢})$ = ق (و) + . . . ثم اجمع

٤ ـ انظر المثال ٢٥.

٥ ـ لو(١ + س) = س − $\frac{س^{٢}}{٢ (١ + حـ)^{٢}}$ حيث ٠ $<$ حـ $<$ س.

المتسلسلة تقاربيـة بمقـارنتها مع المتسلسلة التقاربية $\sum \frac{١}{٢ ر^{٢}}$. عند اخذ المجاميع الجزئية

استخدم لو أ ب = لو أ + لو ب، لو(١ + $\frac{١}{ن}$) ← ٠ (ن ← ∞).

٦ ـ قيمة عظمى محلية عند ٠ ، انعطاف عند ± $\frac{١}{ب \sqrt{٢}}$

٨ ـ من نظرية القيمة الوسطى $ق^{(ن-١)}$ (و) − $ق^{(ن-١)}$ (٠) = و$ق^{(ن)}$ (س) لعنصر ما س بين ٠ وَ و

تمارين ٧ ـ ٥

٤ ـ قَ (س) = ق (س) تعطي $ق^{(ن)}$ (س) = ق (س) لكل ن ∈ N . وبما ان

$س^{ن} \frac{ق(\theta ن)}{ن!}$ ← ٠ (ن ← ∞) فاننا نحصل على

ق (س) = ق (٠) (١ + س + $\frac{س^{٢}}{!٢}$ + . . .) هذا يعطي ان ق (٠) = ٠ . لانه اذا كان

ق (٠) > ٠ فانه بأخذ س = $\frac{م}{ق(٠)}$ > ٠ نحصل على $\frac{ق(س)}{ق(٠)}$ > ١ + س

> $\frac{م}{ق(٠)}$. اذن ق (س) > م لعنصر ما س وهذا يناقض ق (س) < م لكل س

∈ R . بما ان ق (٠) = ٠ فاننا نحصل على ق (س) = ٠ لكل س ∈ R .

٦ ـ (٢) ق (س) = $\frac{جاس}{جتاس}$ ، قَ (س) = $جتا^{-٢}$س، قً (س) = ٢ جاس $جتا^{-٣}$س ،

. . . .

(٣) من التعريف، قَ (٠) = $نها_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{س + ١ - e^{س}}{س e^{س} - س}$. استخدم قاعدة لوبتال مرتين.

تمارين ٧ ـ ٦

١ ـ ٠ ≤ قَ (س) ≤ ٦ س ≤ ٦ لكل س ∈ [٠ ، ١]. الخطأ ≤ $\frac{٦(٠,١)^{٢}}{٨}$ + $\frac{٥}{١٠^{٣}}$

أي ٠,٠١٢٥ طول الفترة ل = $\frac{\pi}{٥}$ × ١٨٠ و|(جاس)ً| ≤ ١، اذن الخطأ اقل

من أو يساوي $\frac{ل^{٢}}{٨}$ + $\frac{٥}{١٠^{٦}}$ > ٥,١٦ × $١٠^{-٧}$ على فرض ان $\pi^{٢}$ > ١٠ .

٣ ـ طول الفترة ل = ٠,٠٠٨ والخطأ اقل من او يساوي ٧ ل^{٢} + $\frac{٥}{١٠^{٤}}$ < ٠,٠٠١

٨ ـ س $_{ن}$ ← $\sqrt{أ}$، ثابت الخطأ التقريبي هو $\frac{١}{٤ أ}$ لان

س $_{ن+١}$ ـ $\sqrt{أ}$ = (س $_{ن}$ ـ $\sqrt{أ}$)^{٣} / (أ + ٣ س $_{ن}^{٢}$).

٩ ـ س $_{ن+١}$ = $\frac{س_{ن}^{٢} - ١}{٢ س_{ن}}$. اذا كان س$_{٠}$ = ٠ فان س$_{١}$ غير معرف. اذا كان س$_{٠}$ = ± ١

فان س$_{١}$ = ٠ وس$_{٢}$ غير معرف. اذا فرضنا ان (س $_{ن}$) معرفا وان س $_{ن}$ ← م (ن ← ∞)
فان ٢ س $_{ن}$ س $_{ن+١}$ = س$_{ن}^{٢}$ − ١ وهذا يعطي ٢ م^{٢} = م^{٢} − ١ . اذن م^{٢} = −١ تناقض. اذن
اما ان (س $_{ن}$) غير معّرفة أو أنها تباعدية.

تمارين ٨ ـ ١

٢ ـ (١) ١، (٢) ٠، (٣) ∞ ، (٤) ١، (٥) افرض ان سه = { ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . } . اذا
كان أ ∈ سه فان نق = ∞، وإذا كان أ ∉ سه فان نق = ١.

٣ ـ بما ان (١ + $\frac{١}{ن}$)^{ن} تتزايد الى نهايتها e فان (ن + ١)^{ن} < e ن^{ن}. اذن اذا كان

ن! e ^{ن} ⩾ ن ^{ن} e فان (ن + ١)! e$^{ن+١}$ ⩾ (ن + ١) ن ^{ن} e^{٢} < (ن + ١)$^{ن+١}$ e . الآن

نق = e ، اذن |ع| = e تعطي.

| $\frac{ن!}{ن^{ن}}$ ع ^{ن} | ⩾ e اذن الحد النوني من المتسلسلة لا يقترب من الصفر. اذن تباعدية.

٤ ـ $\frac{أ_{ن+١}}{س_{ن+١}}$ ← ٠ تعطي $\frac{س_{ن+١} - س_{ن}}{س_{ن+١}}$ ← ١ لهذا فان نصف قطر التقارب

لِـ ∑ س $_{ن}$ ع ^{ن}، نق = ١ من اختبار النسبة. بأخذ أ $_{ن}$ = ١، س $_{ن}$ = ن + ١ في هذه النتيجة
نحصل على ∑ (ن + ١) ع ^{ن} = (١ − ع)$^{-٢}$ لان ∑ ع ^{ن} = (١ − ع)$^{-١}$ لِـ |ع| < ١.

تمارين ٨ ـ ٢

١ ـ المعادلة غير صحيحة لِـ س = ٠

٢ ـ المتسلسلة الاسية ذات تقارب مطلق في |ع| < ١ لأن

|أ$_{ن}$ ع^{ن}| ≤ |أ$_{ن}$| ≤ ن |أ$_{ن}$| لِـ ن ≥ ٢. الآن

ع + أ$_{٢}$ع^{٢} + . . . = ص + أ$_{٢}$ ص^{٢} + . . . تعطي

(ع − ص) (١ + أ$_{٢}$ (ع + ص) + . . .) = ٠

و |١ + أ$_{٢}$ (ع + ص) + . . . | > ١ − (٢ |أ$_{٢}$| + ٣ | أ$_{٣}$| + . . .) ≥ ٠

لِـ |ع| ، |ص| < ١ اذن ص = ع.

٤ ـ استخدم (١ + س)^{٢ن} = (١ + س)^{ن} (١ + س)^{ن} ، نظرية ذات الحدين وان $\binom{ن}{ر}$ = $\binom{ن}{ن-ر}$.

٥ ـ ق (ع) = ع − $\frac{ع^{٣}}{٣}$ + $\frac{ع^{٥}}{٥}$ − . . . .

٧ ـ لِـ س ∋ R و |س| < ١ خذ مشتقة ق (س) (١ + س)$^{-أ}$. نجد ان المشتقة صفر لأن (١ + س) قَ (س) = أ ق (س). اذن ق (س) (١ + س)$^{-أ}$ = عددا ثابتا = ق (٠) = ١.

تمارين ٨ ـ ٣

٢ ـ من النتيجة ١ (٢) للنظرية ٢ نحصل على ان ق (س) = ∑ أ$_{ن}$ س^{ن} تعرف اقترانا متصلا ق على |س| < نق.

اذا كانت ∑ أ$_{ن}$ نق^{ن} تقاربية فانه باستخدام نظرية النهاية لآبل نحصل على ق (س) ← ق (نق) عندما س ← نق − اذن ق متصل عند نق. وبطريقة مشابهة نحصل على ق متصل عند − نق اذا كانت ∑ أ$_{ن}$ (− نق)^{ن} تقاربية.

٣ - (١) $\sum$ (−١)^ن س^ن = $\frac{١}{١ + س}$ ← $\frac{١}{٢}$ عندما س ← ١ -

(٢) $\sum$ ن^ن س^ن ، (٣) افرض ان م > ٠ وخذ ر ∈ N بحيث ان
ل = أ. + أ١ + . . . + أر > م + ١ . الآن هـ (س) = أ. + أ١ س + . . . + أر سر تقترب من ل عندما س ← ١ - ، لهذا فان
هـ (س) > ل - ١ اذا كان ١ - δ > س > ١. اذن ١ - δ > س > ١ تعطي ق (س) ⩾ هـ (س) > م . لهذا فان ق (س) ← ∞ (س ← ١-) .

٦ - بشكل خاص | أ. + أ١ + . . . + أن | ⩽ م ، اذن | أن | ⩽ ٢م لكل ن ، ومنه
| أن ع^ن | ⩽ ٢م | ع |^ن . لهذا فان $\sum$ أن ع^ن ذات تقارب مطلق على | ع | > ١ . اذا كان ع = ٠ فان
| ق (ع) | = | أ. | ⩽ م . اذا كان ٠ > | ع | > ١ . اكتب ص = $\frac{ع}{|ع|}$. اذن | ص | = ١ . لهذا فان
| أ. + أ١ ص + . . . + أن ص^ن | ⩽ م .

الآن كون حاصل الضرب الكوشي لـ ق (ع) = $\sum$ أن ص^ن | ع |^ن و $\sum$ | ع |^ن .

تمارين ٩ - ١

١ - ق (س + ص) = ق (س) ق (ص) تعطي ق (٠) = ق^{٢} (٠) . اذا كان ق (٠) = ٠ فان
ق (س) = ق (س) ق (٠) = ٠ لكل س مما يناقض كون ق شاملا .
اذن ق (٠) = ١ . باستخدام تعريف قَ (س) ونهاية كسر نيوتن نثبت ان قَ (س) =
ق (س) قَ (٠) .

٢ ـ ق (س) = سا $(س^٢)$.

٤ ـ (١) اذا كان $س_ن(ع_١)$ هو المجموع الجزئي النوني في متسلسلة سا $(ع_١)$ فان $\overline{س_ن(ع_١)} = س_ن(\overline{ع_١})$، استخدم

$س_ن \leftarrow س$ تعطي $\overline{س_ن} \leftarrow \overline{س}$ (ن ← ∞) . (٣) استخدم $|ل|^٢ = ل\,\overline{ل}$ حيث ل =

سا (ت س) . اذا كان س = ت فان | ل | = سا (−١) = $\frac{١}{e} < ١$.

٥ ـ عند الزمن ن، اذا كان التيار في الدائرة أ فان أ (ن) = − كَ (ن) . افرض ان ف هو

فرق الجهد المكثف . فان ف = $\frac{ك}{حـ}$ ومن قانون أوم ف = أ م اذن − م كَ (ن) = $\frac{ك(ن)}{حـ}$

من النظرية ٢، ك (ن) = ك (٠) سا $(\frac{-ن}{م\,حـ})$. وعند ن = ٠، ف = ل اذن ك (٠) = ل حـ .

٧ ـ اختر $ن_٠ = ن_٠ (\in)$ بحيث ان $\left| \frac{ع^{ن_٠+١}}{(ن_٠+١)!} + \ldots \right| < \in$. خذ $ن > ن_٠$ وادرس

$$\left| \sum_{ر=٠}^{ن} \left\{ \binom{ن}{ر} ع^ر ن^{-ر} - \frac{ع^ر}{ر!} \right\} - \sum_{ر=ن+١}^{\infty} \frac{ع^ر}{ر!} \right|$$

٨ ـ (١) اذا كان س = ٠ فان $e^{س} = ١ + س$ واذا كان س ≠ ٠ فان

$e^{س} = ١ + س + \frac{س^٢}{٢} e^{حـ} > ١ + س$ لان $e^{حـ} > ٠$.

٩ ـ (١) $|e^{ع} - ١| = |ع + \frac{ع^٢}{٢!} + \ldots| \leqslant |ع| + \frac{|ع|^٢}{٢!} + \ldots$

اذا كان س > ٠ فان $|e^{س} - ١| = |س|\, e^{حـ} < |س| < e^{|س|} - ١$

(٢) $|e^{ع} - ١| \leqslant e - ١$ اذا كان $|ع| \leqslant ١$ و $e - ١ < \frac{٧}{٤}$.

تمارين ٩ ـ ٢

٢ ـ (١) جاع = ع − $\frac{ع^3}{!٣}$ + . . . ، لهذا فان ع ≠ ٠ تعطي

$\frac{جاع}{ع}$ = ١ − $\frac{ع^2}{!٣}$ + . . . ← ١ عندما ع ← ٠.

٣ ـ استخدم تعريف جتاس، جتاص، جتال كمتسلسلات.

٤ ـ (١) جا (أ ± ب) = جاأ جتاب ± جاب جتاأ. خذ أ = $\frac{ع + ل}{٢}$ ، ب = $\frac{ع - ل}{٢}$ ،

(٣) جتا $\frac{\pi}{٢}$ = ٠ وجا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ + جتا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ = ١. اذن جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١.

لهذا فان جا ($\frac{\pi}{٢}$ − ع) = جا $\frac{\pi}{٢}$ جتاع − جتا $\frac{\pi}{٢}$ جاع = جتاع.

١٠ ـ اذا كان ع =ت ص وص عدد حقيقي موجب، فان | جاع | = $\frac{e^{ص} - e^{-ص}}{٢}$ ← ∞

عندما ص ← ٠. لهذا فان | جاع | > ١ لعدد مركب ما ع.

سً (ن) = − س (ن) تعطي س (ن) = أ جتان + ب جان. بما ان الجسيم بدأ عند م فان س (م) = ٠. السرعة الابتدائية سَ (٠) = ع. . اذن س (ن) = ع. جان. السرعة عند زمن ن هي سَ (ن) = ع. جتان وتكون اول ما تساوي لصفر عند ن = $\frac{\pi}{٢}$. المسافة المقطوعة عندها هي ع. ، اذن حركة الجسيم تتذبذب حول الصفر بين النقطتين (ع. ، ٠) و(−ع. ، ٠) ويقال ان حركة الجسيم هي حركة توافقية بسيطة.

ان حركات كهذه (حيث يكون سً (ن) = − حـ س (ن) ، حـ ثابت) تظهر في حركة البندول البسيط.

١٣ ـ بما ان هَـ (س) = − جاس فانه باستخدام نظرية القيمة المتوسطة نحصل على ان هـ اقــتران تقلصي على الفــترة [−١ ، ١]. ولكن $س_١ \in$ [−١ ، ١] لهذا فان ($س_١$ ، $س_٢$ ، . . .) تتقارب الى م $\in$ [−١ ، ١]. اذن م = جتام و ٠ < جتا١ ⩽ م ⩽ ١.

تمارين ٩ ـ ٣

٢ ـ (١) معرف لـ س ≠ (٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$. المشتقة صفر.

(٢) معرف لكل س $\in$ R المشتقة جاز^{٢} (س) + جتا^{٢} ز (س)= جتا ز (٢ س)

(٦) معرف لِـ س ⩾ ٠، المشتقة لِـ س > ٠ هي $\frac{١}{٢}$ (جاز (س))$^{\frac{-١}{٢}}$ جتاز (س).

٣ ـ (١) جتاز (س) = ١ + $\frac{س^{٢}}{!٢}$ + $\frac{س^{٤}}{!٤}$ + . . . ⩾ ١ لكل س $\in$ R و

(جتاز (س))َ = جاز (س) > ٠ لكل س > ٠

(٢) جتــاز (ع) = جتــا (ت ع) وإذن جتــاز ((٢ن + ١) $\frac{\pi ت}{٢}$) = جتــا ((٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$)= ٠، وبالعكس جتاز (ع) = ٠ تعطي ان ٠ = جتا (ت ع) = جتا (− ت ع). واذن −ت ع = (٢ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$ ومنه ع = $\frac{(٢ن + ١)}{٢}$ π ت.

٧ ـ اذا كان ب = ٠ فان القيمة العظمى هي |أ| والقيمة الصغرى هي − |أ| . اذا كان ب ≠ ٠ فان قَ (س) = أ جتاس − ب جاس = ٠ عندما تحقق س ظاس = $\frac{أ}{ب}$. لهذه الـ س ق (س) = $\frac{ب^{٢} + أ^{٢}}{ب}$ جتاس = $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$ أو − $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$. كذلك قً (س) = − ق (س). لهذا فان القيمة العظمى هي $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$ والقيمة الصغرى − $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$.

تمارين ٩ - ٤

١ - (٢) بما ان الاقتران معرف بواسطة لو فان الاقتران معرف اذا وفقط اذا كان س > ٠ .
المشتقة هي ١ .
(٥) معرف لِـ س > ٠، المشتقة (١ + لوس) سا(س لوس).
(٧) معرف لِـ س ≠ ٠، بفصل الحالات س > ٠ و س < ٠ نجد ان

د لو | س | = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠.

٣ - (١) لو(١ + س) = س - $\frac{س^٢}{٢}$ + . . . ، لو(١ - س) = -س - $\frac{س^٢}{٢}$ . . . لـ | س | < ١. ولو $\frac{أ}{ب}$ = لوأ - لوب اذا كان أ ، ب > ٠. غير صحيح عند ١ أو -١.

(٢) اختر س = $\frac{١}{٣}$. أول ثلاثة حدود من متسلسلة لو٢ تعطي ‾٠,٦٩٣

٤ - اذا كان يوجد ن ∋ N بحيث ان لو ن = ٢ فان ن = $e^٢$ ولكن
٢,٧ < e < ٢,٨ . اذن ٧ < $e^٢$ < ٨. لهذا فانه لا يوجد ن.

٦ - اذا كان θ = جتا$^{-١}$س فان جتا (ن + ١) θ + جتا (ن - ١) θ = ٢ جتا ن θ جتاθ
وبالاستقراء نجد ان

ل $_ن$ (س) = ٢$^{ن-١}$ س^ن - . . . لِـ ن ≥ ١.

٧ - اذا كان ع = أ + ت ب، م = حـ + ت د في سه فان
| ب - د | < ٢π٠ $e^ع$ = $e^م$ تعطي م - ع = ٢ π ن ت حيث ن عدد صحيح.
اذن د - ب = ٢ π ن. اذن | ن | < ١، لهذا فان ن = ٠ ومنه ع = م.

تمارين ١٠ ـ ١

١ ـ (١) ك (س) = $٢^{-١}$س | س | اقتران بدائي (خذ س > ٠ وس < ٠، ولكن لاحظ انه يجب الرجوع للتعريف كنهاية كسر نيوتن لحساب كَ (٠)). تكامل نيوتن المحدد هو ك (١) − ك (−١) = ١.

(٢) $٢^{-١}$ (e − ١). ، (٣) صفر، (٤) لو(لـو٣) ، (٥) لو(س + ١) − لو(س + ٢) اقتران بدائي. الاقتران المحدد هو لو($\frac{٤}{٣}$).

٢ ـ $٢^{-١}$ $ق^{٢}$ ولوهـ بدائيان

٤ ـ يوجد ك بحيث ان كَ = ق على [أ ، ب]، لهذا فان تحديد ك على [أ ، حـ] اقتران بدائي لتحديد ق على [أ ، حـ]. لاحظ ان

ك (ب) − ك (أ) = ك (حـ) − ك (أ) + ك (ب) − ك (حـ).

٥ ـ اذا كان يَ = ق هَـ فان (ق هـ − ي)َ = هـ قَ لهذا فان هـ قَ ∋ نيو[أ ، ب]. كذلك

$\int_{أ}^{ب}$ هـ قَ = [ق هـ − ي]$_{أ}^{ب}$ = [هـ ق]$_{أ}^{ب}$ − $\int_{أ}^{ب}$ هَـ ق.

٦ ـ استخدم نظرية داربو

٨ ـ افرض ان ق متزايد واكتب ي = ق (ب) − ق (أ). اخترج بحيث ان (س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$) > و(ي + ١)$^{-١}$ لِـ ١ ⩽ ر ⩽ ن. اذن

$$ع (ج) − د (ج) ⩽ \frac{\epsilon}{ي + ١} \sum \{ق (س_{ر}) − ق (س_{ر-١})\}$$

$$= \frac{\epsilon}{ي + ١} ي < \epsilon .$$

٩ ـ بدراسة قيم ق على الفترة ($\frac{١}{ن + ١}$ ، $\frac{١}{ن}$] نرى ان ق متزايد على [٠ ، ١].

١٠ ـ لتكن التكاملات هي تكاملات نيوتن محددة على [أ ، ب]. $ق^٢$ (س) > ٠ على (أ ، ب) تعطي ف = ∫ $ق^٢$ > ٠، لاحظ ان

$$حـ^٢ \int ف^٢ + ٢حـ \int ق\,هـ + \int هـ^٢ \geqslant ٠$$

لاي حـ ∈ R . اذا اخـذنـا حـ = $\frac{- \int ق\,هـ}{ف}$ فاننـا نحصـل على متبـاينـة شوارتس.

للاستنتاج خذ ق (س) = $\sqrt{جتاس}$، هـ (س) = ١، أ = ٠ ، ب = $\frac{\pi}{٢}$.

تمارين ١٠ ـ ٢

١ ـ افرض ان امكن انه يوجد حـ ∈ [أ ، ب] بحيث أن ق (حـ) > ٠. افرض ان أ < حـ < ب (الحالات حـ = أ، حـ = ب) مشابهة. من اتصال ق فانه يوجد δ > ٠ بحيث ان

| ق (س) - ق (حـ) | < $\frac{ق (حـ)}{٢}$ لِـ أ < حـ - δ ≤ س < حـ + δ < ب. لهذا فان

ق (س) > $\frac{ق (حـ)}{٢}$ لِـ حـ - δ ≤ س ≤ حـ + δ . بما ان ق (س) ≥ ٠ على [أ ، ب] فان،

$$٠ = \int_{أ}^{ب} ق (س)\, د س \geqslant \int_{حـ - \delta}^{حـ + \delta} ق (س)\, د س \geqslant \int_{حـ - \delta}^{حـ + \delta} \frac{ق (حـ)}{٢}\, د س$$

= ق (حـ). δ > ٠،

هذا تناقض.

٢ ـ بما ان ق ، هـ محصوران فانه يوجد ثابت م بحيث ان

| ق (س) | ≤ م، | هـ (س) | ≤ م لكل س ∈ [أ ، ب]. اثبت ان

| ق (س) هـ (س) - ق (ص) هـ (ص) | ≤ م (| ق (س) - ق (ص) | + | هـ (س) - هـ (ص) |)،

واستنتج انه اذا كان ى (ق) = ص ح ع ق - ك ح د ق فان

ى (ق هـ) $\geqslant$ م { ى (ق) + هـ (ق) } . طبق الآن النظرية ٥ .

٣ - لِـ ٠ $\geqslant$ س $\geqslant$ ١ نحصل على ١ $\geqslant$ $\sqrt{١ + س^٢}$ $\geqslant$ $\sqrt{٢}$ واذن

$\frac{س^٣}{\sqrt{٢}} \geqslant \frac{س^٣}{\sqrt{١ + س^٢}} \geqslant س^٣$. كامل الآن

٤ - ق (س) = ١ (س غير نسبي) ق (س) = -١ (س نسبي).

٧ - أ $_ن$ = ٠ لـ ن زوجي ، أ $_ن$ = $\frac{٢}{ن}$ لِـ ن فردي . اذن أ $_ن$ ← ٠ (ن ← ∞). لكل ب $_ن$

نقسم مدى التكامل بالنقاط ٠ ، $\frac{\pi}{ن}$ ، $\frac{٢\pi}{ن}$ ، . . . ونجد ان مساهمة كل [$\frac{ر\pi}{ن}$ ،

$\frac{(ر + ١)\pi}{ن}$] هو $\frac{٢}{ن}$. اذن ب $_ن$ = ٢ لكل ن ومنه ب $_ن$ ← ٢ (ن ← ∞) .

٨ - باستخدام الارشاد، ق (و) $\int$ هـ $\geqslant$ $\int$ ق هـ $\geqslant$ ق (ى) $\int$ هـ. الآن ل (س) = ق

(س) $\int$ هـ متصل على [أ ، ب]، طبق نظرية القيمة المتوسطة لِـ ل .

تمارين ١٠ - ٣

١ - افرض ان أ = ٠ ، حـ = ١ في المثال ٧ ، ولاحظ ان ظا$^{-١}$ب ← $\frac{\pi}{٢}$ (ب ← ∞) .

٢ - افرض ان ق (س) = ظا$^{-١}$س ، هـ (س) = س في نظرية ١٤ اذن

$\int$ ظا$^{-١}$س د س = س ظا$^{-١}$س - $\int \frac{س}{س^٢ + ١}$ د س = س ظا$^{-١}$س - $\frac{١}{٢}$ لو(١ + س^٢).

كذلك باستخدام طريقة التكامل بالاجزاء مرتين نحصل على

$\int$ جاس جتاز (س) د س = $\frac{١}{٢}$ (جاس جاز (س) - جتاس جتاز (س)).

٣ ـ التكامل بالاجزاء ن مرة واستخدام ب^{ر} e$^{-ب}$ ← ٠ (ب ← ∞) لِـ ر = ٠ ، ١ ، . . . ، ن . نجد ان ل = ن! .

٤ ـ طبق النظرية ١٥ لِـ هـ (س) = جتا (ن س) .

٨ ـ طبق النظرية ١٧ : (١) $\int_{٠}^{١}$ س^{أ} د س = (١ + أ)$^{-١}$ ،

(٢) لو $\frac{٣}{٢}$ ، (٣) $\frac{\pi}{٤}$.

٩ ـ نها$_{ن \to \infty}$ س$_{ن}$ (θ) = $\int_{٠}^{١}$ جتا (θ س) د س والتي تساوي ١ اذا كانت θ = ٠ و

$\frac{جا \theta}{\theta}$ اذا كان θ ≠ ٠ . اذن نها$_{\theta}$ نها$_{ن}$ س$_{ن}$ (θ) = ١ .

ولكن نها$_{\theta}$ س$_{ن}$ (θ) = ١ لكل ن ، لان جتا $\frac{ر\theta}{ن}$ ← ١ (θ ← ٠) .

تمارين ١٠ ـ ٤

١ ـ بما ان $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ← م (س ← ∞) فانه يوجد ى و س$_{٠}$ بحيث ان

| ق (س) | < ى هـ (س) لكل س > س$_{٠}$. الآن طبق النظرية ١٨ لتثبت ان | ق | ∈ ر [أ ، ∞) . من النظرية ١٩ ينتج ان ق ∈ ر [أ ، ∞) . باخذ ق (س) = e$^{-س}$ س^{حـ} حاس و

هـ (س) = س$^{-٢}$ نجد ان $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ← ٠ (س ← ∞) .

٢ ـ لِـ ب نأخذ التكامل من حـ الى و، افرض س = ص^{٢} وكامل بالاجزاء .

٣ ـ افرض ان س = ص^{٢} وكامل بالاجزاء ثلاث مرات .

٤ ـ التكامل ل يساوي $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ لو (جتاص) د ص . اذن

٢ ل = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ لو ($\frac{\text{جا٢ص}}{٢}$) د ص . ومنه ل = − π ٢$^{-1}$ لو٢ .

٦ ـ لا تحديد على ب لكن أ > ٠ .

٨ ـ (٢) $\sqrt{\frac{\pi}{٢}}$.

تمارين ١٠ ـ ٥

١ ـ لِـ | س | < ١ مشتقة

ق (س) = جا$^{-1}$س − (س + . . .) هي (١ − س^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$ − (١ + . . .) ويساوي صفرا من نظرية ذات الحدين. اذن ق (س) = ق (٠) = ٠ لِـ | س | < ١ . طبق نظرية آبل للنهايات للحصول على المتسلسلة عند س = ± ١ .

٣ ـ (١) بما ان حـ$_{ر+١}$ − حـ$_{ر}$ ⩾ ق (ر + ١) − ق (ر) لِـ ر ⩾ ١ فانه بالامكان وضع ر = ن ، ن + ١ ، . . .، مـ − ١ ونجمع المتباينات لنحصل على

حـ$_{مـ}$ − حـ$_{ن}$ ⩾ ق (مـ) − ق (ن) . عندما مـ ← ∞ نحصل على م − حـ$_{ن}$ ⩾ − ق (ن) .

٦ ـ (١) مَ (ص) = أ (١ − جتاص) + ت أجاص ، لهذا فان الطول يساوي

$$\int_{0}^{\pi ٢} \sqrt{أ^{٢} - ٢أ^{٢} \text{ جتاص} + أ^{٢} \text{ جتا}^{٢}\text{ص} + أ^{٢} \text{ جا}^{٢}\text{ص}}\ \text{د ص}$$

$$= أ \sqrt{٢} \int_{0}^{\pi ٢} \sqrt{(١ - \text{جتاص})}\ \text{د ص} = ٢أ \int_{0}^{\pi ٢} \text{جا} \frac{\text{ص}}{٢}\ \text{د ص}$$

$$= ٢أ \left[-٢ \text{ جتا} \frac{\text{ص}}{٢} \right]_{0}^{\pi ٢} = ٨أ .$$

تمارين ١١

١ ـ من متباينة منكووسكي، نجد ان

$||م_١ + م_٢|| \leqslant ||م_١|| + ||م_٢||$ لأي $م_١$ ، $م_٢ \in R^٢$

اذن $||م|| \leqslant ||م - ل|| + ||ل||$ ،

كذلك $||ل|| \leqslant ||م|| + ||م - ل||$ ،

اذن $||م|| - ||ل|| \leqslant ||م - ل||$. لهذا فان $|ق(م) - ق(ل)| < \epsilon$ اذا كان $||م - ل||$

$< \epsilon$، اذن ق متصل عند ل. لكن ق غير قابل للتفاضل عند θ لانه من السهل اثبات ان $ق_س$ و $ق_ص$ غير موجودتين عند θ .

٢ ـ $ق_س = ق_ص = ٠$ عند θ

و $|ق(م)| \leqslant |س|^ن + |ص|^ن \leqslant ||م||^٢ \leqslant \epsilon$ على شرط ان يكون $||م|| \leqslant$ أص $\{١ ، \epsilon\}$.

٤ ـ اكتب ق (م) − ق (ل) = ق (م) − ق (س ، ب) + ق (س ، ب) − ق (ل)،
طبق نظرية القيمة الوسطى لِـ ق (م) − ق (س ، ب) ثم استخدم اتصال $ق_ص$ عند ل.

٥ ـ ق ، ك توافقيان على $R^٢$ ولكن ى غير توافقي .

قاموس المصطلحات الواردة
في هذا الكتاب ورموزها

Abelian Group	زمرة تبديلية (ابيلية)
Absolutely Convergent	تقاربي مطلق
Absolute Convergence	تقارب مطلق
Absolute value	قيمة مطلقة
Acceleration	تسارع
Accumulation point	نقطة تراكم
Additive	جمعية
Algebraic	جبرية
Alternating series	متسلسلة متناوبة

Archimedes, Axiom of	مسلسلة ارخميدس
Argument of a complex number	سعة العدد المركب
Associative operation	عملية توزيعية
Asymptotic error constant	ثابت الخطأ التقاربي
Axiom	مسلمة
Bijective function	اقتران تقابل
Binary	ثنائي
Binomial	ثنائي الحدود
Bounded	محصور
Bounded Variation	تغير محصور
Convergent	تقاربي
Complex numbers	اعداد مركبة
Cardinal number	عدد رئيسي
Cartesian Product	الضرب الديكارتي
Chain Rule	قاعدة السلسلة
Characteristic function	اقتران مميز
Closed	مغلق
Closure of a set	انغلاق المجموعة
Codomain	المجال القابل
Commutative	تبديلي
Compact	متراصة
Comparison test	اختبار المقارنة
Complement of a set	متممة المجموعة
Composition of functions	تركيب الاقترانات
Conditional Convergence	تقارب مشروط

Completeness of R	خاصية التمام في R (حقل الأعداد الحقيقية)
Congruence	تطابق
Conjugate	مرافق
Conjunction	الوصل
Connected	موصول
Continuous function	اقتران متصل
Contraction mapping	اقتران تقليص
Contradiction	تناقض
Contrapositive	المعاكس الايجابي
Convex	محدب
Cosine	جتا (جيب التمام)
Countable	قابل للعد
Critical Points	نقاط حرجة
Curve	منحنى
Decimal	عشري
Definite integral	تكامل محدد
Dense set	مجموعة كثيفة
Derivative	مشتقة
Determinants	محددات
Differentiable	قابل للتفاضل
Direct proof	برهان مباشر
Disjoint	منفصل ،- متباعد
Disjunction	الفصل
Distributive Laws	قوانين التوزيع
Divergent	تباعدي

Domain	مجال
Eccentricity	اختلاف مركزي
Element	عنصر
Empty set	المجموعة الخالية
Equivalence	تكافؤ
Existential Quantifier	السور الجزئي
Exponential	أسي
Extremum	قمة
Factor group	زمرة كسرية
Factorial	مضروب ، مفكوك
Field	حقل
Finer partition	تجزئة محسنة
Finite	نهائي ، منته
Fixed point	نقطة ثابتة
Function	اقتران
Fundamental theorem	النظرية الاساسية
Gradient	ميـل
Global extremum	قمة مطلقة
Greatest lower bound	اكبر حاصر أدنى
Group	زمـرة
Harmonic	توافقي
Homeomorphis	اقتران توبولوجي
Hyperbolic functions	الاقترانات الزائدية
Ideal	مثالية
Identity (in a group)	عنصر محايد (في زمرة)

Image	صورة
Imaginary	تخيلي
Implication	التضمين
Improper Integral	تكامل معتل
Increasing function	اقتران متزايد
Indefinite integral	تكامل غير محدد
Indeterminate	صيغة غير معينة
Index	دليل
Induction	استقراء
Inequality	متباينة
Infimum	اكبر حاصر ادنى
Infinite	غير منته ، لا نهائي
Injective function	اقتران تبايني (واحد لواحد)
Integer	عدد صحيح
Interior (of a set)	داخل (المجموعة)
Intermediate Value theorem	نظرية القيم الوسطى
Intersection	تقاطع
Interval	فترة
Inverse	عكس ، معكوس
Irrational	غير نسبي
Isomorphism	تشاكل
Kernel	نـواة
Least upper bound	اصغر حاصل اعلى
Limit	نهاية
Linear	خطي

Local	محلي
Logarithm	لوغاريتم
Logically equivalent	متكافيء منطقياً
Mapping	اقتران ، دالة
Mean Value Theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Metric Space	فضاء قياسي
Modulus of Complex number	مقياس العدد المركب
Monotonic	وتيري
Natural numbers	الاعداد الطبيعية
Necessary and Sufficient	كاف وضروري
Negation	نفي
Nesting principle	خاصية التشابك
Nilpotent	صفري
Norm	معيار
Normed Linear Space	فضاء خطي معياري
Null sequence	متتالية صفرية
One to one correspondence	تناظر واحد لواحد
Onto	شامل
Open	مفتوح
Open cover	غطاء مفتوح
Ordered pair	زوج مرتب
Partial	جزئي
Periodic	دوري
Permutations	تباديل
Point of inflexion	نقطة انعطاف (انقلاب)

Prime numbers	اعداد أولية
Primitive	بدائي
Proper subset	مجموعة جزئية فعلا
Quantifier	سور
Radius of Convergence	نصف قطر التقارب
Ratio Test	اختبار النسبة
Rectifiable Curve	منحنى قابل للتعديل
Recurrence Relation	علاقة دورية
Reflexive	إنعكاسي
Relation	علاقة
Restriction of a function	تحديد الاقتران
Ring	حلقة
Sequence	متتالية
Series	متسلسلة
Set	مجموعة
Sine	جيب ، جا
Strict increase	تزايد فعلي
Sub additive	تحت جمعية
Subgroup	زمرة جزئية
Subring	حلقة جزئية
Subsequence	متتالية جزئية
Subset	مجموعة جزئية
Supremum	اصغر حاصل اعلى
Surjective	شامل
Symmetric	متماثل

Tangent	مماس
Tautology	تحصيل حاصل
Topological	تبولوجي
Totally ordered field	حقل تام الترتيب
Transitive	متعدّ
Trapezium rule	قاعدة شبه المنحرف
Trichotomy	التثليث
Trigonometric	مثلثي
Trivial	بديهي
Truth table	جدول الصواب
Ultimately constsnt	ثابت في النهاية
Uniform	منتظم
Universal Quantifier	سور كلي
Upper	علوي
Well - ordering principle	قاعدة الترتيب الحسن

